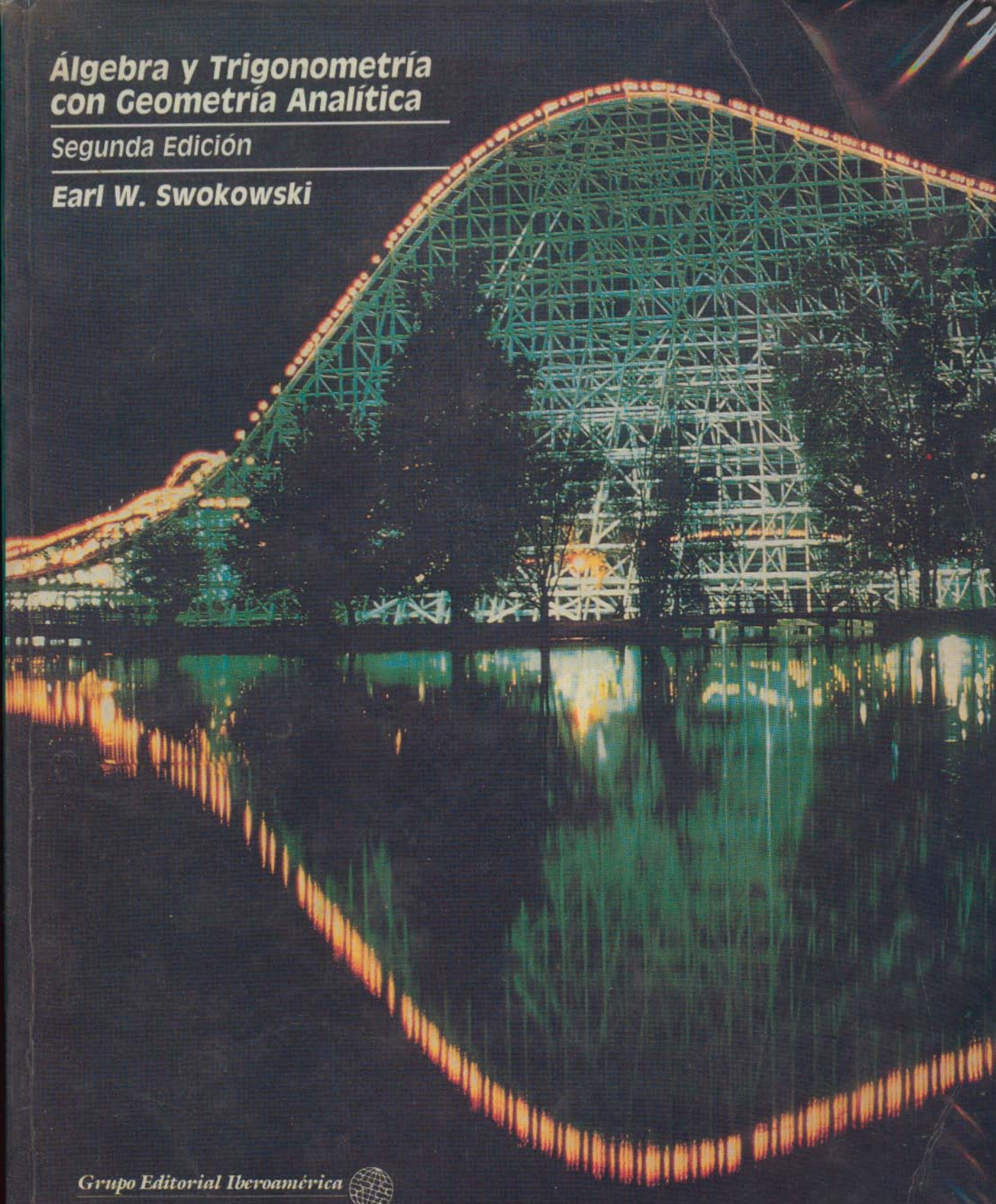
Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica

Segunda Edición

Earl W. Swokowski



Grupo Editorial Iberoamérica

CAPÍTULO 1

Conceptos fundamentales de álgebra

El material en este capítulo es básico para el estudio del álgebra. ■ Comenzaremos con la discusión de las propiedades de los números reales. ■ Posteriormente, estudiaremos los exponentes y radicales y el modo de aplicación para simplificar expresiones algebraicas complicadas.

1.1 ¿Qué es el álgebra?

Es esencial contar con una buena base en álgebra para los cursos avanzados de matemáticas, ciencias naturales e ingeniería. También es útil para resolver problemas de diversas áreas como en la industria, los negocios, la estadística y muchas otras. De hecho, toda situación en la que se hace uso de procesos numéricos puede servirse de los métodos algebraicos.

El álgebra se desarrolló a partir de las reglas y operaciones de la aritmética. El estudio de esta última comienza con la adición, multiplicación, sustracción y división de números como

$$4 + 7, \quad (37)(681), \quad 79 - 22, \quad \text{y} \quad 40 \div 8.$$

En *álgebra* introducimos símbolos o letras tales como a, b, c, d, x, y para denotar números *arbitrarios* y frecuentemente consideramos expresiones *generales*, en lugar de casos especiales, como

$$a + b, \quad cd, \quad x - y, \quad \text{y} \quad x \div a.$$

Este *lenguaje del álgebra* es útil por dos razones. Primero, puede ser utilizado para abreviar y simplificar expresiones largas o complicadas, y segundo, es un modo adecuado de generalizar muchas expresiones específicas. Para ilustrar esto observemos que desde su más tierna infancia los niños aprenden que

$$2 + 3 = 3 + 2, \qquad 4 + 7 = 7 + 4, \qquad 1 + 8 = 8 + 1,$$

y así sucesivamente. Esta propiedad puede escribirse "si se suman dos números, el orden en que se sumen no tiene importancia; esto es, se obtiene el mismo resultado si el segundo número se suma al primero, o si el primero se suma al segundo". Esta larga descripción puede ser reducida y comprendida fácilmente por medio de la expresión algebraica

$$a + b = b + a,$$

donde a y b denotan números arbitrarios.

Algunas fórmulas usadas en la ciencia y en la industria pueden servir para ilustrar la generalidad del álgebra. Por ejemplo, si un avión vuela a una velocidad constante de 300 mi/h (millas por hora) durante 2 horas, entonces la distancia recorrida será

$$(300)(2) \qquad \text{o sea} \qquad 600 \text{ millas}$$

Si la velocidad del avión es de 250 mi/h y el tiempo transcurrido es de 3 horas, entonces la distancia recorrida es

$$(250)(3) \qquad \text{o sea} \qquad 750 \text{ millas}$$

Si introducimos símbolos y denotamos con r la velocidad constante, con t el tiempo transcurrido y con d la distancia recorrida, entonces los dos ejemplos anteriores son casos especiales de la fórmula algebraica general

$$d = rt.$$

Cuando se dan valores numéricos determinados a r y t, la distancia d puede ser calculada sustituyendo adecuadamente en la fórmula. Además, la fórmula se puede usar para resolver problemas relacionados. Por ejemplo, supóngase que la distancia entre dos ciudades es de 645 millas y deseamos conocer la velocidad constante a la cual un aeroplano recorrería esa distancia en un tiempo de 2 horas y 30 minutos. Entonces tenemos

$$d = 645 \text{ mi} \qquad \text{y} \qquad t = 2.5 \text{ h}$$

y el problema se reduce a encontrar r. Puesto que $d = rt$, se tiene que

$$r = \frac{d}{t}$$

y de aquí obtenemos, en nuestro caso especial,

$$r = \frac{645}{2.5} = 258 \text{ mi/h}.$$

Esto es, si un aeroplano vuela a una velocidad constante de 258 mi/h, entonces habrá recorrido las 645 millas en un tiempo de 2 horas y 30 minutos. Del mismo modo, si conocemos r y se quiere averiguar el tiempo t necesario para recorrer una distancia d, puede obtenerse por medio de la fórmula

$$t = \frac{d}{r}.$$

Nótese cómo la introducción de una fórmula algebraica no sólo permite resolver convenientemente problemas especiales, sino que también amplía el alcance de nuestro conocimiento al sugerir problemas nuevos.

Hemos dado varias ilustraciones elementales del valor que tienen los métodos algebraicos. Hay un número ilimitado de problemas en los que el enfoque simbólico puede conducirnos a conocimientos profundos y soluciones que serían imposibles de obtener con procesos numéricos. Al estudiar este texto y otros más avanzados quedará clara la importancia y la fuerza de las técnicas algebraicas en matemáticas y en otros campos que las utilizan.

1.2 Números reales

Los números reales se emplean en todas las fases de las matemáticas y es importante estar familiarizado con los símbolos que los representan, por ejemplo:

$$1, \quad 73, \quad -5, \quad \tfrac{49}{12}, \quad \sqrt{2}, \quad 0, \quad \sqrt[3]{-85}, \quad 0.33333\ldots \quad \text{y} \quad 596.25.$$

El conjunto de los números reales se dice que es **cerrado** respecto a las operaciones de adición (denotada por $+$) y multiplicación (denotada por $\cdot$). Esto significa que a cada par de números reales a, b le corresponde un único número real $a + b$, llamado **suma** de a y b, y un único número real $a \cdot b$ (también escrito ab), llamado **producto de** a

y b. Si a y b denotan al mismo número real, escribimos $a = b$ (que se lee "a igual a b"). Una expresión de este tipo se llama **igualdad**.

Los números especiales como 0 y 1, mencionados como **cero** y **uno**, respectivamente, tienen las propiedades $a + 0 = a$ y $a \cdot 1 = a$ para todo número real a. Cada número real a tiene su **negativo**, denotado por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$ y cada número real diferente de cero, a, tiene un **recíproco**, $\frac{1}{a}$, tal que $a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$. Éstas y otras propiedades importantes se incluyen en la siguiente lista, en la que a, b y c denotan números reales arbitrarios.

PROPIEDADES CONMUTATIVAS	$a + b = b + a,$	$ab = ba$
PROPIEDADES ASOCIATIVAS	$a + (b + c) = (a + b) + c,$	$a(bc) = (ab)c$
ELEMENTOS NEUTROS (O IDENTIDAD)	$a + 0 = a = 0 + a,$	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
INVERSOS	$a + (-a) = 0 = (-a) + a,$	$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1 = \left(\frac{1}{a}\right)a$ si $a \neq 0$
PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS	$a(b + c) = ab + ac,$	$(a + b)c = ac + bc$

Los números reales 0 y 1 se suelen denominar **neutro aditivo** y **neutro multiplicativo**, respectivamente. Se llama a $-a$ **inverso aditivo** de a (o **negativo** de a). Si $a \neq 0$, entonces $1/a$ se llama **inverso multiplicativo** de a (o **recíproco** de a). El símbolo a^{-1} se usa con frecuencia en lugar de $1/a$. Se tiene entonces que, por definición,

DEFINICIÓN DE a^{-1}

Puesto que $a + (b + c)$ y $(a + b) + c$ son siempre iguales, se puede usar el símbolo $a + b + c$ para denotar este número real, sin ninguna confusión. Del mismo modo, la notación abc se emplea para $a(bc)$ o $(ab)c$. Una situación análoga se presenta si se suman o multiplican cuatro o más números reales. Entonces, si a, b, c y d son números reales, podemos escribir su suma como $a + b + c + d$ y su producto como $abcd$, sin importar cómo estén agrupados los números o cómo se puedan intercambiar.

Las propiedades distributivas sirven para hallar los productos de muchos tipos de expresiones. El siguiente ejemplo da una ilustración.

EJEMPLO 1 Si a, b, c y d denotan números reales, demostrar que

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

SOLUCIÓN Usando las dos propiedades distributivas

$$\begin{aligned}(a + b)(c + d) &= (a + b)c + (a + b)d \\ &= (ac + bc) + (ad + bd) \\ &= ac + bc + ad + bd.\end{aligned}$$ ■

Si $a = b$ y $c = d$ entonces $a + c = b + d$ y $ac = bd$. Con frecuencia, esto se llama **principio de sustitución**, puesto que podemos pensar en sustituir a por b y c por d en las expresiones $a + c$ y ac. Como caso especial, usando el hecho de que $c = c$, se obtienen las siguientes reglas.

[redacted]

Algunas veces, nos referimos a estas reglas de la siguiente manera: "cualquier número c puede ser sumado a ambos lados de una igualdad" y "ambos lados de una igualdad pueden ser multiplicados por el mismo número c".

Se puede demostrar el siguiente teorema. (Ejercicios 34 y 35.)

TEOREMA

[redacted]

El teorema anterior implica que $ab = 0$ *si y sólo si* $a = 0$ ó $b = 0$. La frase "si y sólo si" que es utilizada en matemáticas, siempre tiene un carácter doble. Aquí significa que si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o bien $b = 0$, y *recíprocamente* si $a = 0$ o bien $b = 0$, entonces $ab = 0$. Por consecuencia, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $ab \neq 0$; esto es, *el producto de dos números reales distintos de cero, es siempre distinto de cero.*

Las siguientes propiedades también pueden demostrarse.

PROPIEDADES DE LOS NEGATIVOS

[redacted]

La operación de **sustracción** (denotada por $-$) se define como

DEFINICIÓN DE LA SUSTRACCIÓN O RESTA

[redacted]

La **división** (denotada por $\div$) se define como:

DEFINICIÓN DE DIVISIÓN

$$a \div b = a\left(\frac{1}{b}\right) = ab^{-1}; \qquad b \neq 0$$

El símbolo a/b, o bien $\frac{a}{b}$, es utilizado con frecuencia en lugar de $a \div b$ y nos referimos a él como el **cociente de a entre b o la fracción a sobre b**. Los números a y b se llaman **numerador** y **denominador**, respectivamente. Es importante notar que, puesto que el 0 no tiene inverso multiplicativo, a/b no está definido para $b = 0$; esto es, *no se permite la división entre cero*. Obsérvese también, que

$$1 \div b = \frac{1}{b} = b^{-1}.$$

Se pueden establecer las siguientes propiedades de los cocientes, en donde todos los denominadores son números reales distintos de cero.

PROPIEDADES DE LOS COCIENTES

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{si y sólo si} \quad ad = bc$$

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}, \qquad \frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Los **enteros positivos** 1, 2, 3, 4, ..., pueden obtenerse sumando el número real 1 a sí mismo sucesivamente. Los números $-1, -2, -3, -4, \ldots$ se llaman **enteros negativos**. La totalidad de los enteros positivos y negativos, junto con el número real 0, constituyen el conjunto de los **enteros**.

Si a, b y c son enteros y $c = ab$, entonces a y b se llaman **factores**, o **divisores**, de c. Por ejemplo, el entero 6 puede escribirse como

$$6 = 2 \cdot 3 = (-2)(-3) = 1 \cdot 6 = (-1)(-6),$$

Por consiguiente 1, −1, 2, −2, 3, −3, 6 y −6 son factores de 6.

Un entero positivo p diferente de 1 es **primo** si sus únicos factores positivos son 1 y p. Algunos de los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19. El **Teorema Fundamental de la Aritmética** dice que todo entero positivo diferente de 1 se puede expresar como el producto de números primos según una y solamente una forma (excepto por el orden de los factores). Algunos ejemplos son:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \qquad 126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7, \qquad 540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Un **número racional** es un número real que se puede escribir en la forma a/b, en donde a y b son enteros y $b \neq 0$. A los números reales que no son racionales se les llama **números irracionales**. El cociente de la circunferencia de un círculo y su diámetro es el número real irracional π, que se puede calcular con la aproximación dada por el decimal 3.1416 o por el número racional 22/7. Se usará la notación $\pi \approx 3.1416$ para indicar que π es *aproximadamente igual* a 3.1416.

No existe ningún número racional b tal que $b^2 = 2$, en donde b^2 denota a $b \cdot b$. Sin embargo, sí existe un número *irracional*, denotado por $\sqrt{2}$, tal que $(\sqrt{2})^2 = 2$. En general, tenemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN DE RAÍZ CUADRADA

Sea a un número real no negativo. La **raíz cuadrada principal de** a, denotada por $\sqrt{a}$, es el número real *no negativo* b tal que $b^2 = a$.

A menudo nos referimos a $\sqrt{a}$ simplemente como la *raíz cuadrada de a*. Algunas raíces cuadradas son racionales. Por ejemplo,

$$\sqrt{25} = 5, \qquad \sqrt{\tfrac{9}{4}} = \tfrac{3}{2}, \qquad \sqrt{16} = 4.$$

Otras raíces cuadradas, como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{\frac{7}{2}}$, son irracionales.

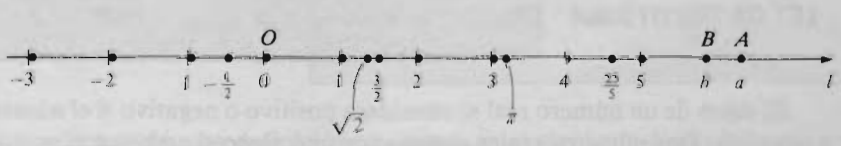
Los números reales pueden ser representados por expresiones decimales. Las representaciones decimales de los números racionales son finitas o se repiten indefinidamente. Por ejemplo, puede demostrarse por división que

$$\tfrac{5}{4} = 1.25 \qquad \text{y} \qquad \tfrac{177}{55} = 3.2181818\ldots,$$

donde los dígitos 1 y 8 se repiten indefinidamente. Las representaciones decimales de los números irracionales siempre son expresiones infinitas y no repetitivas.

Es posible asociar el conjunto de los números reales con el conjunto de los puntos en una recta l de modo que a cada número real a le corresponda un punto y uno solo de l; y recíprocamente, que a cada punto P de la recta l le corresponda exactamente un número real. Esta asociación entre dos conjuntos se llama **correspondencia uno a uno** (o **biunívoca**). Primeramente, se escoge un punto arbitrario llamado **origen** y se le asocia el número real 0. Los puntos asociados a los enteros quedan determinados al marcar segmentos de recta sucesivos de igual longitud a cada lado de 0, como se ilustra en la Figura 1.1. Los puntos correspondientes a números racionales como 23/5 y $-1/2$, se obtienen subdividiendo los segmentos de recta de igual longitud. Los puntos asociados a ciertos números irracionales, como $\sqrt{2}$, se pueden localizar por construcción geométrica. Para otros números irracionales como π, no es posible hacer ninguna

FIGURA 1.1



construcción. (Véase el Ejercicio 47.) A todo número irracional le corresponde un punto único en l, y recíprocamente, todo punto que no está asociado a un número racional corresponde a un número irracional.

El número a que está asociado al punto A en l se llama **coordenada** de A. El método de asignación de coordenadas a puntos en l se llama **sistema coordenado** para l, y l se denomina **recta coordenada** o **recta numérica real**. Se puede asignar una dirección a l (supuesta horizontal) considerando la **dirección positiva** hacia la derecha de la recta y la **dirección negativa** hacia la izquierda de la misma. La dirección positiva se identifica por la flecha en el extremo de l, como se muestra en la Figura 1.1.

Los números que corresponden a puntos del lado derecho de O en la Figura 1.1, se llaman **números reales positivos**, y los que corresponden a puntos a la izquierda de O, **números reales negativos**. *El número real* 0 *no es ni positivo ni negativo.*

Si a y b son números reales y $a - b$ es positivo, se dice que a **es mayor que** b y se escribe $a > b$. Equivalentemente, se dice que b **es menor que** a, **y se escribe** $b < a$. Los símbolos $>$ o bien $<$ se llaman **signos de desigualdad**; y expresiones como $a > b$ o $b < a$ se llaman **desigualdades**. Por el modo en que se construye la recta coordenada l en la Figura 1.1, se puede ver que si A y B son puntos con coordenadas a y b respectivamente, entonces $a > b$ (o bien $b < a$) *si y sólo si A está a la derecha de B*. Se establece la siguiente definición como referencia, en donde a y b denotan números reales.

DEFINICIÓN DE $>$ Y $<$

$a > b$ significa que $a - b$ es positivo.

$b < a$ significa que $a - b$ es positivo.

Nótese que $a > b$ y $b < a$ significan exactamente lo mismo. Ejemplos:

$5 > 3$ dado que $5 - 3 = 2$ es positivo;

$-6 < -2$ dado que $-2 - (-6) = -2 + 6 = 4$ es positivo;

$-\sqrt{2} < 1$ dado que $1 - (-\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$ es positivo;

$2 > 0$ dado que $2 - 0 = 2$ es positivo y

$-5 < 0$ dado que $0 - (-5) = 5$ es positivo.

Los últimos dos ejemplos son casos especiales de las siguientes propiedades generales:

$a > 0$ si y sólo si a es positivo.

$a < 0$ si y sólo si a es negativo.

Estas propiedades son consecuencia de las definiciones de $>$ y $<$.

Con base en lo expuesto, queda claro que si a y b son números reales, entonces *una y solamente una de las siguientes expresiones es verdadera*:

LEY DE TRICOTOMÍA

$a = b$, $a > b$, o bien $a < b$.

El **signo** de un número real se considera positivo o negativo si el número es positivo o negativo. Dos números reales *tienen el mismo signo* si ambos son positivos o negati-

vos; tienen *signos opuestos* si uno es positivo y el otro negativo. El siguiente resultado respecto a los signos de productos y cocientes de dos números reales a y b se puede demostrar a partir de las propiedades mencionadas de los negativos y de los cocientes.

LEYES DE LOS SIGNOS

(i) Si a y b tienen el mismo signo, entonces ab y a/b son positivos.

(ii) Si a y b tienen signos opuestos, entonces ab y a/b son negativos.

Los recíprocos de la ley de los signos también son ciertos. Por ejemplo, si un cociente es negativo, entonces el numerador y el denominador tienen signos opuestos.

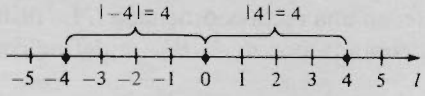
La notación $a \geq b$, que se lee **a es mayor o igual que b**, y quiere decir que $a > b$ o bien $a = b$ (pero no ambos). Por ejemplo, $a^2 \geq 0$ para todo número real a. El símbolo $a \leq b$ se lee **a es menor o igual que b**, y significa que $a < b$ o bien $a = b$. La expresión $a < b < c$ significa que $a < b$ y $b < c$, en cuyo caso decimos que b **está entre a y c. También podemos escribir** $c > b > a$, que significa que $c > b$ y $b > a$. Por ejemplo:

$$1 < 5 < \tfrac{11}{2}, \qquad -4 < \tfrac{2}{3} < \sqrt{2}, \qquad 3 > -6 > -10.$$

Se usan otras variaciones de la notación de desigualdad. Por ejemplo: $a < b \leq c$ significa que $a < b$ y $b \leq c$. Análogamente, $a \leq b < c$ significa que $a \leq b$ y $b \leq c$. Finalmente, $a \leq b$ y $b \leq c$.

Si a es un número real, entonces es la coordenada de algún punto de A de la recta coordenada l, y el símbolo $|a|$ denota el número de unidades (o distancia) entre A y el origen, sin tomar en cuenta la dirección. El número no negativo $|a|$ se conoce como **valor absoluto** de a. En la Figura 1.2, vemos que, para el punto de coordenadas -4 se tiene $|-4| = 4$. Análogamente, $|4| = 4$.

FIGURA 1.2



En general, *si a es negativo cambiamos su signo para encontrar $|a|$, mientras que si a es no negativo, entonces $|a| = a$*. En resumen, se tiene la siguiente definición:

DEFINICIÓN

Si a es un número real, entonces el **valor absoluto** $|a|$ de a se define como

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0. \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

El uso de esta definición se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Determinar $|3|$, $|-3|$, $|0|$, $|\sqrt{2}-2|$ y $|2-\sqrt{2}|$.

SOLUCIÓN Dado que 3, $2-\sqrt{2}$ y 0 son no negativos, entonces

$$|3| = 3, \quad |2-\sqrt{2}| = 2-\sqrt{2}, \quad \text{y} \quad |0| = 0.$$

Puesto que -3 y $\sqrt{2}-2$ son negativos, usamos la fórmula $|a| = -a$ y obtenemos

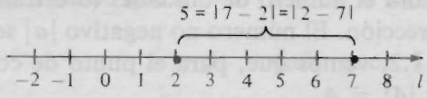
$$|-3| = -(-3) = 3 \quad \text{y} \quad |\sqrt{2}-2| = -(\sqrt{2}-2) = 2-\sqrt{2}. \quad \blacksquare$$

Nótese que en el Ejemplo 2, $|-3| = |3|$ y $|2-\sqrt{2}| = |\sqrt{2}-2|$. Se puede demostrar que

$$|a| = |-a| \text{ para todo número real } a.$$

Se usará el concepto de valor absoluto para definir la distancia entre dos puntos de una recta coordenada. Comencemos por notar que la distancia entre los puntos con coordenadas 2 y 7, como se muestra en la Figura 1.3, es igual a 5 unidades en l. Esta distancia es la diferencia, $7-2$, que se obtiene de restar la coordenada menor de la mayor. Si empleamos valores absolutos, entonces, puesto que $|7-2| = |2-7|$, no es necesario que nos preocupemos por el orden de la resta. Esto motiva nuestra siguiente definición.

FIGURA 1.3



DEFINICIÓN

Sean a y b las coordenadas de dos puntos A y B, respectivamente, en una recta coordenada l. La **distancia entre A y B**, denotada por $d(A, B)$, se define como

$$d(A, B) = |b-a|$$

El número $d(A, B)$ se llama **longitud del segmento de recta AB**.

Obsérvese que, como $d(B, A) = |a-b|$ y que $|b-a| = |a-b|$, podemos escribir

$$d(A, B) = d(B, A).$$

Nótese también que la distancia entre el origen O y el punto A es

$$d(O, A) = |a-0| = |a|,$$

lo cual coincide con la interpretación geométrica de valor absoluto ilustrada en la Figura 1.2. La fórmula $d(A, B) = |b-a|$ es válida independientemente de los signos de a y b, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

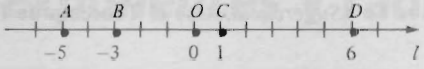
EJEMPLO 3 Sean A, B, C y D puntos con coordenadas -5, -3, 1 y 6, respectivamente, en una recta coordenada l (Figura 1.4). Hallar $d(A, B)$, $d(C, B)$, $d(O, A)$ y $d(C, D)$.

SOLUCIÓN Por la definición de distancia,

$$d(A, B) = |-3 - (-5)| = |-3 + 5| = |2| = 2$$
$$d(C, B) = |-3 - 1| = |-4| = 4$$
$$d(O, A) = |-5 - 0| = |-5| = 5$$
$$d(C, D) = |6 - 1| = |5| = 5$$

Estas respuestas pueden comprobarse geométricamente observando la Figura 1.4. ■

FIGURA 1.4



Además de ser útil para encontrar la distancia entre dos puntos, el concepto de valor absoluto tiene otros usos. Generalmente se emplea siempre que estemos interesados en la "magnitud" o "valor numérico" de un número real sin importar su signo.

Ejercicios 1.2

1. Si $x < 0$ y $y > 0$, determinar el signo de los siguientes números reales:

   (a) x^2y (b) xy^2 (c) $\frac{x}{y} + x$

   (d) $y - x$ (e) $\frac{x - y}{xy}$

2. Los números racionales $\frac{22}{7}$ y $\frac{355}{113}$ son dos aproximaciones útiles para el valor de π. Calcule las distancias $d(\frac{22}{7}, \pi)$ y $d(\frac{355}{113}, \pi)$ para decidir cuál aproximación es más cercana al valor de π.

En los Ejercicios 3 a 6, reemplace el símbolo □ con $<$, $>$, o bien $=$.

3. (a) $-7 \square -4$
   (b) $3 \square -1$
   (c) $1 + 3 \square 6 - 2$

4. (a) $-3 \square -5$
   (b) $-6 \square 2$
   (c) $\frac{1}{4} \square 0.25$

5. (a) $\frac{1}{3} \square 0.33$
   (b) $\frac{125}{57} \square 2.193$
   (c) $\frac{22}{7} \square \pi$

6. (a) $\frac{1}{7} \square 0.143$
   (b) $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \square \frac{19}{12}$
   (c) $\sqrt{2} \square 1.4$

En cada uno de los Ejercicios 7 a 18, exprese el enunciado en términos de desigualdad.

7. -8 es menor que -5.
8. 2 es mayor que 1.9.
9. 0 es mayor que -1.
10. $\sqrt{2}$ es menor que π.
11. x es negativo.
12. y es positivo.
13. a está entre 5 y 3.
14. b está entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{3}$.
15. b es mayor o igual que 2.
16. x es menor o igual que -5.
17. c no es mayor que 1.
18. d es no negativo.

En los Ejercicios 19 a 22 vuelva a escribir los números, sin hacer uso del símbolo de valor absoluto.

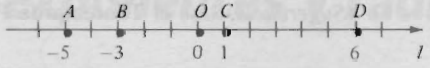
EJEMPLO 3 Sean A, B, C y D puntos con coordenadas -5, -3, 1 y 6, respectivamente, en una recta coordenada l (Figura 1.4). Hallar $d(A, B)$, $d(C, B)$, $d(O, A)$ y $d(C, D)$.

SOLUCIÓN Por la definición de distancia,

$$d(A, B) = |-3 - (-5)| = |-3 + 5| = |2| = 2$$
$$d(C, B) = |-3 - 1| = |-4| = 4$$
$$d(O, A) = |-5 - 0| = |-5| = 5$$
$$d(C, D) = |6 - 1| = |5| = 5$$

Estas respuestas pueden comprobarse geométricamente observando la Figura 1.4. ■

FIGURA 1.4



Además de ser útil para encontrar la distancia entre dos puntos, el concepto de valor absoluto tiene otros usos. Generalmente se emplea siempre que estemos interesados en la "magnitud" o "valor numérico" de un número real sin importar su signo.

Ejercicios 1.2

1. Si $x < 0$ y $y > 0$, determinar el signo de los siguientes números reales:
   (a) x^2y (b) xy^2 (c) $\frac{x}{y} + x$
   (d) $y - x$ (e) $\frac{x - y}{xy}$

2. Los números racionales $\frac{22}{7}$ y $\frac{355}{113}$ son dos aproximaciones útiles para el valor de π. Calcule las distancias $d(\frac{22}{7}, \pi)$ y $d(\frac{355}{113}, \pi)$ para decidir cuál aproximación es más cercana al valor de π.

En los Ejercicios 3 a 6, reemplace el símbolo □ con $<$, $>$, o bien $=$.

3. (a) $-7 \square -4$
   (b) $3 \square -1$
   (c) $1 + 3 \square 6 - 2$

4. (a) $-3 \square -5$
   (b) $-6 \square 2$
   (c) $\frac{1}{4} \square 0.25$

5. (a) $\frac{1}{3} \square 0.33$
   (b) $\frac{125}{57} \square 2.193$
   (c) $\frac{22}{7} \square \pi$

6. (a) $\frac{1}{7} \square 0.143$
   (b) $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \square \frac{19}{12}$
   (c) $\sqrt{2} \square 1.4$

En cada uno de los Ejercicios 7 a 18, exprese el enunciado en términos de desigualdad.

7. -8 es menor que -5.
8. 2 es mayor que 1.9.
9. 0 es mayor que -1.
10. $\sqrt{2}$ es menor que π.
11. x es negativo.
12. y es positivo.
13. a está entre 5 y 3.
14. b está entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{3}$.
15. b es mayor o igual que 2.
16. x es menor o igual que -5.
17. c no es mayor que 1.
18. d es no negativo.

En los Ejercicios 19 a 22 vuelva a escribir los números, sin hacer uso del símbolo de valor absoluto.

19. (a) $|4 - 9|$
(b) $|-4| - |-9|$
(c) $|4| + |-9|$

20. (a) $|3 - 6|$
(b) $|0.2 - \frac{1}{5}|$
(c) $|-3| - |-4|$

21. (a) $3 - |-3|$
(b) $|\pi - 4|$
(c) $(-3)/|-3|$

22. (a) $|8 - 5|$
(b) $-5 + |-7|$
(c) $(-2)|-2|$

En cada uno de los Ejercicios 23 a 26, los números que se dan son las coordenadas de tres puntos A, B y C (en ese orden) en una recta coordenada l. Encuentre, para cada uno, (a) $d(A, B)$; (b) $d(B, C)$; (c) $d(C, B)$; (d) $d(A, C)$.

23. $-6, -2, 4$

24. $3, 7, -5$

25. $8, -4, -1$

26. $-9, 1, 10$

Escriba de nuevo las expresiones de los Ejercicios 27 a 30 sin usar los símbolos de valor absoluto.

27. $|5 - x|$ si $x > 5$

28. $|x^2 + 1|$

29. $|-4 - x^2|$

30. $|a - b|$ si $a < b$

En los Ejercicios 31 a 40 reemplace el símbolo $\square$ por $=$ o por $\neq$ para todos los números reales a, b y c, para los que las expresiones están definidas. Justifique sus respuestas.

31. $\dfrac{ab + ac}{a} \square b + ac$

32. $\dfrac{ab + ac}{a} \square b + c$

33. $\dfrac{b + c}{a} \square \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}$

34. $\dfrac{a}{b + c} \square \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c}$

35. $(a \div b) \div c \square a \div (b \div c)$

36. $(a - b) - c \square a - (b - c)$

37. $(ab)^{-1} \square a^{-1}b^{-1}$

38. $(a - b)^{-1} \square a^{-1} - b^{-1}$

39. $\dfrac{a - b}{b - a} \square -1$

40. $-(a + b) \square -a + b$

Demuestre las reglas en los Ejercicios 41 a 46.

41. $a = -a$ si y sólo si $a = 0$.

42. $a \cdot 0 = 0$. (*Sugerencia:* Escríbase $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ y luego súmese $-(a \cdot 0)$ a ambos miembros.)

43. Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o bien $b = 0$.

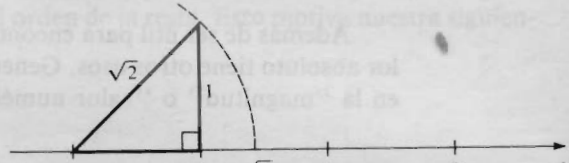
44. Si $a + b = 0$, entonces $b = -a$.

45. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$

46. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a + c}{b}$. (*Sugerencia:* Escríbase $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = ab^{-1} + cb^{-1}$ y empléense las propiedades distributivas.)

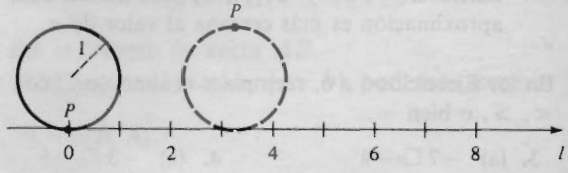
47. El punto que corresponde a $\sqrt{2}$ en un eje o recta coordenada se puede ubicar construyendo un triángulo rectángulo con lados de longitud 1, como se muestra en la figura. Localice los puntos que correspondan a $\sqrt{3}$ y a $\sqrt{5}$, respectivamente. (*Sugerencia:* Use el Teorema de Pitágoras.)

FIGURA PARA EL EJERCICIO 47



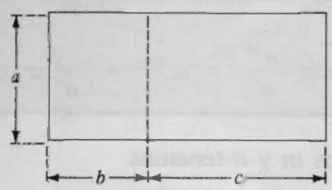
48. Una circunferencia de radio 1 rueda sobre un eje o recta coordenada en el sentido positivo (Vea figura). Si el punto P está inicialmente en el origen, ¿cuál es la coordenada de P después de una vuelta completa?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 48



49. Los antiguos griegos fueron los primeros en demostrar geométricamente las propiedades de los números reales. Calcule el área del rectángulo que se muestra en la figura de dos maneras, a fin de establecer la Propiedad Distributiva $a(b + c) =$

FIGURA PARA EL EJERCICIO 49



$ab + ac$ para los números reales positivos, a, b y c.

50. Usando una fórmula descubierta por los antiguos babilonios, se pueden encontrar aproximaciones racionales para raíces cuadradas. Sea x_1 la primera aproximación burda para $\sqrt{n}$ y

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{n}{x_1}\right).$$

Entonces x_2 será una mejor aproximación y podemos repetir el cálculo reemplazando a x_1 por x_2. Empezando con $x_1 = \frac{17}{10}$, halle dos aproximaciones racionales más para $\sqrt{3}$.

1.3 Exponentes y radicales

El símbolo a^2 denota al número real $a \cdot a$ y a^3 se usa en lugar de $a \cdot a \cdot a$. En general, si n es un entero positivo cualquiera,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

cuando n factores, todos iguales a a, aparecen al lado derecho del signo de igualdad. El entero positivo n se llama **exponente** de a en la expresión a^n, y a^n se lee "a a la enésima potencia", simplemente "a a la n". Nótese que $a^1 = a$. Algunos ejemplos numéricos de exponentes son:

$$(\tfrac{1}{2})^5 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{32}$$

$$(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$$

$$(\sqrt{2})^4 = \sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2(\sqrt{2})^2 = (2)(2) = 4$$

Es importante recordar que si n es un entero positivo, entonces una expresión tal como $3a^n$ significa $3\,(a^n)$, pero no $(3a)^n$. Al número real 3 se le llama **coeficiente** de a^n en la expresión $3a^n$. Análogamente, $-3a^n$ significa $(-3)a^n$, pero no $(-3a)^n$. Por ejemplo,

$$5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40 \quad \text{y} \quad -5 \cdot 2^3 = -5 \cdot 8 = -40.$$

Si $a \neq 0$, la extensión a exponentes no positivos se realiza definiendo

$$a^0 = 1 \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Las siguientes leyes son indispensables cuando se trabaja con exponentes:

LEYES DE LOS EXPONENTES

Si a y b son números reales y m y n son enteros positivos, entonces

(i) $a^m a^n = a^{m+n}$; (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$;

(iii) $(ab)^n = a^n b^n$;

(iv) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ si $b \neq 0$;

(v) Si $a \neq 0$, entonces $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$.

Para probar la Ley (i) para enteros positivos m y n tenemos

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}.$$

Puesto que el número total de factores a a la derecha, es $m + n$, esta expresión es igual a a^{m+n}

Análogamente, podríamos escribir para (ii)

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \cdots \cdot a^m}_{n \text{ factores } a^m}$$

y contar el número de veces que aparece a como factor del lado derecho. Dado que $a^m = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$, donde a aparece como un factor m veces, y dado que el número de tales grupos de m factores es n, el número total de factores es $m \cdot n$. Las demostraciones para los casos $m \leq 0$ y $n \leq 0$ se le dejan al lector.

Las leyes (iii) y (iv) pueden demostrarse de manera similar. La ley (v) es clara si $m = n$. Para el caso $m > n$, el entero $m - n$ es positivo y podemos escribir

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n a^{m-n}}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} \cdot a^{m-n} = 1 \cdot a^{m-n} = a^{m-n}.$$

Un razonamiento análogo se puede utilizar si $n > m$.

Claro que podemos utilizar símbolos distintos de a y b para los números reales, cuando se apliquen las leyes de los exponentes, tal como se muestra a continuación.

$$x^5 x^6 = x^{5+6} = x^{11} \qquad (y^5)^7 = y^{5 \cdot 7} = y^{35}$$

$$(rs)^7 = r^7 s^7 \qquad \left(\frac{p}{q}\right)^{10} = \frac{p^{10}}{q^{10}}$$

$$\frac{c^8}{c^3} = c^{8-3} = c^5 \qquad \frac{u^3}{u^8} = u^{3-8} = u^{-5} = \frac{1}{u^5}$$

Las leyes de los exponentes pueden generalizarse, por ejemplo, $(abc)^n = a^n b^n c^n$ y $a^m a^n a^p = a^{m+n+p}$. Para simplificar los enunciados en todos los problemas que involucren exponentes, supondremos que los símbolos que aparecen en los denominadores representan números reales *diferentes de cero*.

EJEMPLO 1 Simplificar cada una de las siguientes expresiones:

(a) $(3x^3y^4)(4xy^5)$ (b) $(2a^2b^3c)^4$ (c) $\left(\frac{2r^3}{s}\right)^2\left(\frac{s}{r^3}\right)^3$ (d) $(u^{-2}v^3)^{-3}$

SOLUCIÓN Podemos proceder del siguiente modo (justifique cada paso).

(a) $$(3x^3y^4)(4xy^5) = (3)(4)x^3xy^4y^5 = 12x^4y^9$$

(b) $$(2a^2b^3c)^4 = 2^4(a^2)^4(b^3)^4c^4 = 16a^8b^{12}c^4$$

(c) $$\left(\frac{2r^3}{s}\right)^2\left(\frac{s}{r^3}\right)^3 = \left(\frac{2^2r^6}{s^2}\right)\left(\frac{s^3}{r^9}\right) = 2^2\left(\frac{r^6}{r^9}\right)\left(\frac{s^3}{s^2}\right) = 4\left(\frac{1}{r^3}\right)(s) = \frac{4s}{r^3}$$

(d) $$(u^{-2}v^3)^{-3} = u^6v^{-9} = \frac{u^6}{v^9}$$ ■

Las siguientes reglas son útiles a menudo para problemas en que intervengan exponentes negativos, con $m > 0$, $n > 0$ y $xy \neq 0$:

$$\frac{x^{-m}}{y^{-n}} = \frac{y^n}{x^m} \quad \text{y} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n.$$

Las demostraciones se siguen directamente de la definición de exponentes negativos y de las propiedades de los cocientes. Así,

$$\frac{x^{-m}}{y^{-n}} = \frac{1/x^m}{1/y^n} = \frac{1}{x^m}\cdot\frac{y^n}{1} = \frac{y^n}{x^m} \quad \text{y} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \frac{x^{-n}}{y^{-n}} = \frac{y^n}{x^n}.$$

EJEMPLO 2 Eliminar los exponentes negativos y simplificar:

(a) $\dfrac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2}$ (b) $\left(\dfrac{u^2}{2v}\right)^{-3}$

SOLUCIÓN

(a) $$\frac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2} = \frac{8x^3}{4y^2}\cdot\frac{y^{-5}}{x^{-1}} = \frac{8x^3}{4y^2}\cdot\frac{x}{y^5} = \frac{2x^4}{y^7}$$

(b) $$\left(\frac{u^2}{2v}\right)^{-3} = \left(\frac{2v}{u^2}\right)^3 = \frac{8v^3}{u^6}$$ ■

Las *raíces* de los números reales se definen de la siguiente manera:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si y sólo si} \quad b^n = a,$$

siempre y cuando ambos a y b sean números reales no negativos y n sea un entero positivo; o bien que ambos a y b sean negativos y n sea un entero positivo impar. El número $\sqrt[n]{a}$ se llama **raíz n-ésima principal** de a. Si $n = 2$, se acostumbra escribir $\sqrt{a}$ en lugar de $\sqrt[2]{a}$, y llamar a $\sqrt{a}$ la **raíz cuadrada** (principal) de a. El número $\sqrt[3]{a}$ se conoce como la **raíz cúbica** de a. Algunos ejemplos de raíces son

$$\sqrt[5]{\tfrac{1}{32}} = \tfrac{1}{2} \quad \text{puesto que} \quad (\tfrac{1}{2})^5 = \tfrac{1}{32}$$
$$\sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{puesto que} \quad (-2)^3 = -8$$
$$\sqrt{16} = 4 \quad \text{puesto que} \quad 4^2 = 16$$
$$\sqrt[4]{81} = 3 \quad \text{puesto que} \quad 3^4 = 81.$$

Para definir $\sqrt[n]{a}$, si $a < 0$ y n es un entero positivo par, es necesario utilizar los números complejos (ver Sección 2.4), ya que para todos los números reales b, $b^n \geq 0$ siempre que n sea par.

Es importante observar que si $\sqrt[n]{a}$ existe, es un número real *único*. De manera más general, si $b^n = a$ para un entero positivo n, entonces b es una *raíz n-ésima* de a. Por ejemplo, tanto 4 como -4 son raíces cuadradas de 16, puesto que $4^2 = 16$ y también $(-4)^2 = 16$. Sin embargo, la raíz cuadrada *principal* de 16 es 4, lo que escribimos como $\sqrt{16} = 4$.

Para completar esta terminología, diremos que la expresión $\sqrt[n]{a}$ se llama **radical**, el número a se llama **radicando**, y n es el **índice** del radical. Al símbolo $\sqrt{\ }$ se le llama **signo radical**.

Si $\sqrt{a} = b$, entonces $b^2 = a$; esto es, $(\sqrt{a})^2 = a$. Análogamente, si $\sqrt[3]{a} = b$, entonces $b^3 = b$; esto es: $(\sqrt[3]{a})^3 = a$. En general, si n es cualquier entero positivo, entonces

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

También se tiene que si $a > 0$ o si $a < 0$ y n es un entero positivo impar, entonces

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

Por ejemplo

$$\sqrt{5^2} = 5, \qquad \sqrt[3]{(-2)^3} = -2, \qquad \sqrt[4]{3^4} = 3.$$

Un error algebraico común consiste en reemplazar $\sqrt{x^2}$ por x para "toda" x; sin embargo esto no es cierto si x es negativo. Por ejemplo,

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|.$$

En general, podemos escribir

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \text{para todo número real } x.$$

Aún más, si n es cualquier entero positivo par, entonces $\sqrt[n]{x^n} = |x|$. Nótese que $\sqrt{x^2} = x$ si y sólo si $x \geq 0$.

Para los enteros positivos m y n se pueden demostrar las siguientes reglas, suponiendo que las raíces indicadas existen.

LEYES DE LOS RADICALES

(i) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$; (ii) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

(iii) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

EJEMPLO 3 Demostrar que cada aseveración es cierta.

(a) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ (b) $\sqrt[3]{-108} = -3\sqrt[3]{4}$ (c) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = 2$

SOLUCIÓN

(a) $$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

(b) $$\sqrt[3]{-108} = \sqrt[3]{(-27)(4)} = \sqrt[3]{-27}\sqrt[3]{4} = -3\sqrt[3]{4}$$

(c) Aplicando la ley (iii) de los radicales con $m = 3$ y $n = 2$,

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Podemos comprobar que $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$. ■

Si c es un número real y c^n aparece como factor en un radical de índice n, entonces n puede escribirse fuera del radicando siempre y cuando se considere el signo de c. Por ejemplo, si $c > 0$, o bien si $c < 0$ y n es impar, entonces

$$\sqrt[n]{c^n d} = \sqrt[n]{c^n}\sqrt[n]{d} = c\sqrt[n]{d}.$$

Si $c < 0$ y n es *par*, entonces

$$\sqrt[n]{c^n d} = \sqrt[n]{c^n}\sqrt[n]{d} = |c|\sqrt[n]{d}.$$

Para no tener que considerar los valores positivos y negativos separadamente en los ejemplos y ejercicios que siguen, *supondremos que a, b, c, d,* etc., *representan números reales positivos.*

El término "simplificar" al referirnos a un radical, significa proceder del modo indicado hasta que el radicando contenga únicamente factores con exponentes menores que el índice del radical. Más aún, no deben aparecer fracciones dentro del radical final; esto se logra mediante la racionalización de los denominadores, como se ilustra en el Ejemplo 5. El índice n también debe ser lo más pequeño posible.

EJEMPLO 4 Simplificar las siguientes expresiones, en las que todas las letras denotan números reales positivos.

(a) $\sqrt[3]{320}$ (b) $\sqrt[3]{16x^3y^8z^4}$ (c) $\sqrt{3a^2b^3}\sqrt{6a^5b}$

SOLUCIÓN

(a) $$\sqrt[3]{320} = \sqrt[3]{64 \cdot 5} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{4^3}\sqrt[3]{5} = 4\sqrt[3]{5}$$

(b) $$\begin{aligned}\sqrt[3]{16x^3y^8z^4} &= \sqrt[3]{(2^3x^3y^6z^3)(2y^2z)} \\ &= \sqrt[3]{(2xy^2z)^3(2y^2z)} \\ &= \sqrt[3]{(2xy^2z)^3}\sqrt[3]{2y^2z} \\ &= 2xy^2z\sqrt[3]{2y^2z}\end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned}\sqrt{3a^2b^3}\sqrt{6a^5b} &= \sqrt{18a^7b^4} \\ &= \sqrt{(9a^6b^4)(2a)} \\ &= \sqrt{(3a^3b^2)^2(2a)} \\ &= \sqrt{(3a^3b^2)^2}\sqrt{2a} \\ &= 3a^3b^2\sqrt{2a}\end{aligned}$$ ■

Un modo importante de simplificar expresiones que incluyen radicales, es el que se conoce como **racionalización del denominador**. La expresión inicial es un cociente que contiene un radical en el denominador; se trata de hacer desaparecer el radical multiplicando numerador y denominador por alguna expresión, de modo que en el denominador obtenido no aparezcan radicales. El siguiente ejemplo explica este proceso.

EJEMPLO 5 Racionalizar el denominador en cada una de las siguientes expresiones.

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (c) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}$

SOLUCIÓN Puede procederse del siguiente modo (justifíquese cada paso):

(a) $$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

(b) $$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3}} = \sqrt{\frac{6}{3^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(c) $$\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \sqrt[3]{\frac{x}{y} \cdot \frac{y^2}{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[3]{y^3}} = \frac{\sqrt[3]{xy^2}}{y}$$ ■

Si se utiliza una calculadora para encontrar aproximaciones decimales de radicales, no hay ninguna ventaja en escribir $1/\sqrt{5} = \sqrt{5}/5$, o bien $\sqrt{2/3} = \sqrt{6}/3$, como lo hicimos en el ejemplo anterior. Sin embargo, para simplificaciones *algebraicas*, es a menudo deseable cambiar las expresiones a esas formas.

Los radicales pueden usarse para definir *exponentes racionales*. Primero, si n es un entero positivo y a es un número real, definimos

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a},$$

siempre que $\sqrt[n]{a}$ sea un número real. Ahora procedemos de la siguiente manera.

DEFINICIÓN DE LOS EXPONENTES RACIONALES

Si m/n es un número racional, donde n es un entero positivo, y si a es un número real tal que existe, entonces

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Nótese que también se puede escribir

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}.$$

Se puede demostrar que las leyes de los exponentes son ciertas para todos los exponentes racionales.

EJEMPLO 6 Simplificar:

(a) $(-27)^{2/3}(4)^{-5/2}$ (b) $(4\sqrt[3]{a})(2\sqrt{a})$

(c) $(r^2s^6)^{1/3}$ (d) $\left(\dfrac{2x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)^2\left(\dfrac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right)$

SOLUCIÓN

(a) $$(-27)^{2/3}(4)^{-5/2} = (\sqrt[3]{-27})^2(\sqrt{4})^{-5} = (-3)^2(2)^{-5} = \frac{9}{32}$$

(b) $$(4\sqrt[3]{a})(2\sqrt{a}) = (4a^{1/3})(2a^{1/2}) = 8a^{1/3+1/2} = 8a^{5/6} = 8\sqrt[6]{a^5}$$

(c) $$(r^2s^6)^{1/3} = (r^2)^{1/3}(s^6)^{1/3} = r^{2/3}s^2$$

(d) $$\left(\frac{2x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)^2\left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right) = \left(\frac{4x^{4/3}}{y}\right)\left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right) = \frac{12x^{1/2}}{y^{4/3}}$$ ■

En el Capítulo 5, se consideran potencias con exponentes irracionales como $3^{\sqrt{2}}$, 5^{π}, etc.

En las áreas científicas, es muy común trabajar con números muy grandes o muy pequeños, que se simplifican escribiéndolos en la forma $a \cdot 10^n$, en donde a es un decimal tal que $1 \le a < 10$ y n es un entero. Esto se conoce como la **forma científica** de expresar números reales. En la práctica, se acostumbra utilizar $\times$ como símbolo de multiplicación y escribir $a \times 10^n$ en lugar de $a \cdot 10^n$. La forma científica permite al lector determinar rápidamente (sin contar ceros) las magnitudes relativas de números grandes o pequeños.

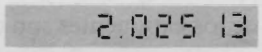
Por ejemplo, la distancia que recorre un rayo de luz en un año es aproximadamente 5 900 000 000 000 millas. Esto se puede escribir en forma científica como 5.9×10^{12}.

El exponente positivo 12 indica que el punto decimal debe desplazarse 12 lugares hacia la *derecha*. Esta notación también funciona para números muy pequeños. Por ejemplo: En estudios realizados se ha estimado que el peso de una molécula de oxígeno es de 0.00000000000000000000053 gramos (g) o, en forma científica, 5.3×10^{-23} g. El exponente negativo indica que el punto decimal debe desplazarse 23 lugares hacia la *izquierda*. Otros ejemplos de números escritos en forma científica son:

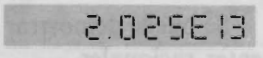
$$513 = 5.13 \times 10^2, \qquad 20{,}700 = 2.07 \times 10^4, \qquad 92{,}000{,}000 = 9.2 \times 10^7$$

$$0.000648 = 6.48 \times 10^{-4}, \qquad 0.00000000043 = 4.3 \times 10^{-10}$$

Las calculadoras dan frecuentemente los resultados en notación científica. En este caso, el número 10 utilizado en la notación científica $a \times 10^n$ se omite y únicamente aparece el exponente. Por ejemplo, para evaluar $(4\ 500\ 000)^2$ con una calculadora común se marca el número 4 500 000 y se pulsa la tecla x^2. Aparece el resultado



o bien



que significa 2.025×10^{13}. Se tiene pues:

$$(4\ 500\ 000)^2 = 20\ 250\ 000\ 000\ 000.$$

En muchas calculadoras se pueden utilizar los números en forma científica. Si quiere más detalles, el usuario debe consultar el manual de su calculadora.

Como un comentario final, los problemas de aplicación incluyen a menudo números que se obtienen mediante diferentes tipos de mediciones y, por lo tanto, son aproximaciones de los valores exactos. En esos casos las respuestas deben redondearse ya que el resultado final de un cálculo no puede ser más preciso que los datos que se han utilizado. Por ejemplo, si se miden la longitud y el ancho de un rectángulo con una precisión de dos cifras decimales, no podemos esperar una exactitud mayor que dos cifras decimales en el valor calculado del área del rectángulo. Si un número x se escribe en la forma científica como $x = a \times 10^k$, en la que $1 \leq a \leq 10$, y si a se redondea a n cifras decimales, decimos que x se ha aproximado (o ha sido redondeado) a $n + 1$ **cifras significativas**. Por ejemplo, dado $x = 37.2638$, tenemos lo siguiente:

Número de cifras significativas	5	4	3	2	1
Aproximación de x	37.264	37.26	37.3	37	40

En los Ejercicios 1.3, siempre que el índice del radical sea par (o si se emplea un exponente racional m/n, con n par), supondremos que las letras que aparecen bajo el signo radical correspondiente denotan números reales positivos.

Ejercicios 1.3

Expresar los números de los Ejercicios 1 a 10 en la forma a/b, en donde a y b son enteros.

1. $(-\frac{2}{3})^4$
2. $(-3)^3$
3. $\dfrac{2^{-3}}{3^{-2}}$
4. $\dfrac{2^0 + 0^2}{2 + 0}$
5. $(-2)^3 + 3^{-2}$
6. $(-\frac{3}{2})^4 - 2^{-4}$

7. $16^{-3/4}$
8. $9^{5/2}$
9. $(-0.008)^{2/3}$
10. $(0.008)^{-2/3}$

En los Ejercicios 11 a 46 elimine los exponentes negativos y simplifique.

11. $(\frac{1}{2}x^4)(16x^5)$
12. $(-3x^{-2})(4x^4)$
13. $\dfrac{(2x^3)(3x^2)}{(x^2)^3}$
14. $\dfrac{(2x^2)^3}{4x^4}$
15. $(\frac{1}{6}a^5)(-3a^2)(4a^7)$
16. $(-4b^3)(\frac{1}{6}b^2)(-9b^4)$
17. $\dfrac{(6x^3)^2}{(2x^2)^3}$
18. $\dfrac{(3y^3)(2y^2)^2}{(y^4)^3}$
19. $(3u^7v^3)(4u^4v^{-5})$
20. $(x^2yz^3)(-2xz^2)(x^3y^{-2})$
21. $(8x^4y^{-3})(\frac{1}{2}x^{-5}y^2)$
22. $\left(\dfrac{4a^2b}{a^3b^2}\right)\left(\dfrac{5a^2b}{2b^4}\right)$
23. $(\frac{1}{3}x^4y^{-3})^{-2}$
24. $(-2xy^2)^5\left(\dfrac{x^7}{8y^3}\right)$
25. $(3y^3)^4(4y^2)^{-3}$
26. $(-3a^2b^{-5})^3$
27. $(-2r^4s^{-3})^{-2}$
28. $(2x^2y^{-5})(6x^{-3}y)(\frac{1}{3}x^{-1}y^3)$
29. $(5x^2y^{-3})(4x^{-5}y^4)$
30. $(-2r^2s)^5(3r^{-1}s^3)^2$
31. $\left(\dfrac{3x^5y^4}{x^0y^{-3}}\right)^2$
32. $(4a^2b)^4\left(\dfrac{-a^3}{2b}\right)^2$
33. $(4a^{3/2})(2a^{1/2})$
34. $(-6x^{7/5})(2x^{8/5})$
35. $(3x^{5/6})(8x^{2/3})$
36. $(8r)^{1/3}(2r^{1/2})$
37. $(27a^6)^{-2/3}$
38. $(25z^4)^{-3/2}$
39. $(8x^{-2/3})x^{1/6}$
40. $(3x^{1/2})(-2x^{5/2})$
41. $\left(\dfrac{-8x^3}{y^{-6}}\right)^{2/3}$
42. $\left(\dfrac{-y^{3/2}}{y^{-1/3}}\right)^3$
43. $\left(\dfrac{x^6}{9y^{-4}}\right)^{-1/2}$
44. $\left(\dfrac{c^{-4}}{16d^8}\right)^{3/4}$
45. $\dfrac{(x^6y^3)^{-1/3}}{(x^4y^2)^{-1/2}}$
46. $a^{4/3}a^{-3/2}a^{1/6}$

Escriba de nuevo las expresiones de los Ejercicios 47 a 52 en términos de exponentes racionales.

47. $\sqrt[4]{x^3}$
48. $\sqrt[3]{x^5}$
49. $\sqrt[3]{(a+b)^2}$
50. $\sqrt{a+\sqrt{b}}$
51. $\sqrt{x^2+y^2}$
52. $\sqrt[3]{r^3-s^3}$

Escriba de nuevo las expresiones de los Ejercicios 53 a 56 en términos de radicales.

53. (a) $4x^{3/2}$ (b) $(4x)^{3/2}$
54. (a) $4+x^{3/2}$ (b) $(4+x)^{3/2}$
55. (a) $8-y^{1/3}$ (b) $(8-y)^{1/3}$
56. (a) $8y^{1/3}$ (b) $(8y)^{1/3}$

57. Demuestre que para cualesquiera números reales a y b, $|ab| = |a||b|$. (*Sugerencia:* Escriba $|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2}$ y aplique el hecho de que $\sqrt{x^2} = |x|$.

58. Demuestre que $|a/b| = |a|/|b|$ si $b \neq 0$.

Simplifique las expresiones de los Ejercicios 59 a 78.

59. $\sqrt{81}$
60. $\sqrt[3]{-125}$
61. $\sqrt[5]{-64}$
62. $\sqrt[4]{256}$
63. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$
64. $\sqrt{\dfrac{1}{7}}$
65. $\sqrt{9x^{-4}y^6}$
66. $\sqrt{16a^8b^{-2}}$
67. $\sqrt[3]{8a^6b^{-3}}$
68. $\sqrt[4]{81r^5s^8}$
69. $\sqrt[3]{\dfrac{54a^7}{b^2}}$
70. $\sqrt[5]{\dfrac{-96x^7}{y^3}}$
71. $\sqrt{\dfrac{1}{3u^3v}}$
72. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{4x^5y^2}}$
73. $\sqrt[4]{(3x^5y^{-2})^4}$
74. $\sqrt[6]{(2u^{-3}v^4)^6}$
75. $\sqrt[5]{\dfrac{8x^3}{y^4}}\sqrt[5]{\dfrac{4x^4}{y^2}}$
76. $\sqrt{5xy^7}\sqrt{10x^3y^3}$
77. $\sqrt[3]{3t^4v^2}\sqrt[3]{-9t^{-1}v^4}$
78. $\sqrt[3]{(2r-s)^3}$

En los Ejercicios 79 a 84 reemplace el símbolo □ por $=$ o bien $\neq$ y justifique sus respuestas.

79. $(a^r)^2 \square a^{(r^2)}$
80. $(a^2+1)^{1/2} \square a+1$
81. $a^xb^y \square (ab)^{xy}$
82. $\sqrt{a^r} \square (\sqrt{a})^r$
83. $\sqrt[n]{\dfrac{1}{c}} \square \dfrac{1}{\sqrt[n]{c}}$
84. $a^{1/k} \square \dfrac{1}{a^k}$

85. La masa de un átomo de hidrógeno es aproximadamente 0.000000000000000000[illegible]. Exprese este número en forma [illegible]

86. La masa de un electrón es aproximadamente 9.1×10^{-31} kg. Exprese este número en forma decimal.

Exprese en forma científica los números indicados en los Ejercicios 87 y 88.

87. (a) 427 000
(b) 0.000000098
(c) 810 000 000

88. (a) 85 200
(b) 0.0000055
(c) 24 900 000

Exprese en forma decimal los números de los Ejercicios 89 y 90.

89. (a) 8.3×10^{5}
(b) 2.9×10^{-12}
(c) 5.63×10^{8}

90. (a) 2.3×10^{7}
(b) 7.01×10^{-9}
(c) 1.23×10^{10}

91. En astronomía, la distancia a las estrellas se mide en años luz, en donde 1 año luz es la distancia que recorre un rayo de luz en un año. Si la velocidad de la luz es de 186 000 millas por segundo, ¿cuál es el valor aproximado de un año luz?

92. (a) Se estima que la Vía Láctea contiene 100 mil millones de estrellas. Exprese este número en forma científica.
(b) El diámetro d de la Vía Láctea se estima en 100 000 años luz. Exprese d en millas (Vea el Ejercicio 91).

93. El número de átomos de hidrógeno en un mol es el número de Avogadro, 6.02×10^{23}. Si un mol de gas pesa 1.01 g, estime la masa de un átomo de hidrógeno.

94. La dinámica de la población de muchos peces se caracteriza por tener tasas de fertilidad extremadamente altas entre los adultos y tasas muy bajas de sobrevivencia entre los jóvenes. Un hipogloso maduro puede poner hasta 2.5 millones de huevos, pero sólo el 0.00035% de los recién nacidos sobrevive hasta la edad de 3 años. Use la forma científica para calcular cuántos viven hasta la edad de 3 años.

95. La película más larga (y sin duda, la más aburrida) que se ha hecho fue una película británica de 1970 que dura 48 horas. Suponiendo que la velocidad de la película es de 24 cuadros por segundo, calcule aproximadamente el número total de cuadros de la película. Exprese su respuesta en la forma científica.

96. Uno de los números primos más grandes conocidos es $2^{44497} - 1$. Verificar que este número era primo le llevó a una de las computadoras más rápidas del mundo alrededor de 60 días. La máquina es capaz de realizar 2×10^{11} cálculos por segundo. Use la forma científica para estimar el número de cálculos requeridos para realizar esta hazaña.

Ejercicios para Calculadora 1.3

1. Simplifique $[(x^2)^2]^2$. Aplique este resultado para explicar cómo puede calcularse una octava potencia usando solamente la tecla para elevar al cuadrado que se tiene en una calculadora. ¿Cómo se puede evaluar una decimosexta potencia?

2. Use la ley de los exponentes para explicar cómo calcular cada una de las siguientes potencias utilizando únicamente las teclas del recíproco y del cuadrado:

(a) x^{-2} (b) x^{32} (c) x^{-16}

3. ¿Qué sucede cuando se oprime la tecla del recíproco tres veces seguidas después de haber introducido un valor? Explique usando una de las leyes de los exponentes.

4. Simplifique $(x^{1/2})^{1/2}$. Use el resultado para explicar cómo se pueden calcular raíces cuartas usando sólo la tecla de la raíz cuadrada. ¿Cómo podría calcular una raíz octava, $\sqrt[8]{x}$?

5. Uno de los bancos más antiguos de Estados Unidos es el Bank of America, fundado en 1812. Si en esa época se depositaron $200.00 (dólares) en una cuenta que pagaba un interés simple anual del 4%, entonces 170 años más tarde la cantidad había crecido a $200(1.04)^{170}$ dólares. Determine esta enorme cantidad.

6. La distancia d (en millas) que se puede ver desde lo alto de un edificio de altura h pies, puede aproximarse mediante $d = 1.2\sqrt{h}$. Aproxime la distancia que puede verse desde lo más alto de la Torre Sears de Chicago, que mide 1454 pies de altura

7. La relación longitud-peso para el pez llamado hipogloso del Pacífico, está dada por la fórmula

$L = 0.46\sqrt[3]{W}$, en la que W está dado en kg y L en metros. El hipogloso más grande que se ha pescado y que se documentó, pesó 230 kg. Estime su longitud.

8. La relación longitud-peso de una especie de ballenas (*sei*) está dada por la fórmula $W = 0.0016L^{2.43}$, en donde W está en toneladas, y L, en pies. Desde un barco se vio una ballena de esa especie que medía alrededor de 25 pies de longitud. Estime su peso.

9. La fórmula de O'Carroll's se emplea para igualar a los levantadores de pesas de diferentes categorías, según su peso. Si b es el peso corporal en kg, y w es el peso levantado, entonces el peso de igualación h está dado por

$$h = \frac{w}{\sqrt[3]{b - 35}}.$$

Un pesista que pesa 75 kg acaba de levantar 180 kg, mientras que uno de super-peso completo de 120 kg, ha levantado 250 kg. ¿Quién sería considerado el mejor pesista en una competición global?

10. El área superficial S del cuerpo humano (en pies cuadrados) se puede estimar a partir de la estatura h (en pulgadas) y el peso w (en libras) usando la expresión

$$S = (0.1091)w^{0.425}h^{0.725}.$$

Esta fórmula se usa para estimar el contenido total de grasa del cuerpo.

(a) Calcule el área superficial de un individuo de 6 pies de estatura, que pesa 175 libras.
(b) Si usted mide 5 pies 6 pulgadas de alto, ¿cuál es el efecto de un 10% de aumento en su peso sobre el área superficial de su cuerpo?

1.4 Expresiones algebraicas

Algunas veces es conveniente utilizar la notación y la terminología de los conjuntos. Podemos pensar que un **conjunto** es una colección de objetos de algún tipo. Los objetos se llaman **elementos** del conjunto. Para denotar los conjuntos se usan normalmente letras mayúsculas, como A, B, C, R, S, ... Las letras minúsculas, como a, b, x, y, ..., representan normalmente elementos de los conjuntos. En todo este libro $\mathbb{R}$ denotará al conjunto de los números reales y $\mathbb{Z}$ al conjunto de los enteros. Si S es un conjunto, entonces $a \in S$ significa que a es un elemento de S, mientras que $a \notin S$ quiere decir que a no es un elemento de S. Si todo elemento de S es también un elemento de un conjunto T, entonces se dice que S es un **subconjunto** de T. Por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Dos conjuntos S y T son **iguales**, y se escribe $S = T$, si S y T contienen exactamente los mismos elementos. La notación $S \neq T$ significa que S y T no son iguales.

Con frecuencia hacemos uso de símbolos para representar elementos arbitrarios de un conjunto. Por ejemplo, podemos usar x para expresar un número real aunque no especifiquemos ningún número real *en particular*. Una letra que se utilice para representar cualquier elemento de un conjunto dado se llama **variable**. Un símbolo que representa a un elemento *específico* se llama **constante**. En la mayor parte de nuestro trabajo las letras finales del alfabeto, como x, y y z, se usarán para las variables, mientras que las letras como a, b y c, denotarán constantes. En este libro, a menos que se especifique otra cosa, las variables representan números reales. El **dominio de una variable** es el conjunto de números reales representados por la variable. Para ilustrar esto, $\sqrt{x}$ es un número real si y sólo si $x \geq 0$; se deduce que en este caso, el dominio de x es el conjunto de los números reales no negativos. Análogamente, cuando consideramos la expresión $1/(x - 2)$ se debe excluir $x = 2$ para evitar la división entre cero; por lo tanto el dominio es el conjunto de todos los números reales diferentes de 2.

Si los elementos de un conjunto s tienen cierta propiedad, escribimos que $S = \{x: \ \}$, en donde la propiedad que describe a la variable x se escribe en el espacio que sigue a los dos puntos. Por ejemplo, $\{x: x > 3\}$ representa el conjunto de los números reales mayores que 3.

Una forma en que podemos identificar conjuntos finitos es enumerando todos los elementos y escribiéndolos entre las llaves. Así, si el conjunto T consiste en los cinco primeros enteros positivos, puede escribirse $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Cuando describimos conjuntos de esta manera, el orden usado al enlistar los elementos se considera irrelevante, por lo que podemos escribir $T = \{1, 3, 2, 4, 5\}$, $T = \{4, 3, 2, 5, 1\}$, etcétera.

Empezando con cualquier colección de variables y números reales, y aplicando sumas, restas, multiplicaciones, divisiones o extracción de raíces, se obtiene una **expresión algebraica**. A continuación se dan ejemplos de expresiones algebraicas:

$$x^3 - 2x + \frac{3^{1/9}}{\sqrt{2x}}, \qquad \frac{2xy + 3x}{y - 1}, \qquad \frac{4yz^{-2} + \left(\dfrac{-7}{x + w}\right)^5}{\sqrt[3]{y^2 + 5z}},$$

en donde x, y, z y w son variables. Si se sustituyen las variables por números específicos en una expresión algebraica, al número real que resulte se le llama **valor** de la expresión para esos números. Por ejemplo, el valor de la segunda expresión anterior, cuando $x = -2$ y $y = 3$ es

$$\frac{2(-2)(3) + 3(-2)}{3 - 1} = \frac{-12 - 6}{2} = -9.$$

Al trabajar con expresiones algebraicas se supondrá que los dominios están elegidos de modo que las variables no representen números que hagan que las expresiones no tengan sentido. Se supone por tanto que los denominadores no deben ser cero, que las raíces siempre existen, y así sucesivamente.

Ciertas expresiones algebraicas tienen nombres especiales. Si x es una variable, entonces un **monomio** en x es una expresión de la forma ax^n, en donde el coeficiente a es un número real y n es un entero no negativo. Un *polinomio en x* es cualquier suma finita de monomios en x. Otro modo de decirlo es el siguiente:

DEFINICIÓN

Un **polinomio en** x es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

en donde n es un entero no negativo y los a_i son números reales.

En la definición anterior, cada una de las expresiones $a_k x^k$ de la suma, es un **término** del polinomio. Si el coeficiente a_k es cero, el término $a_k x^k$ será omitido. El coeficiente a_n de la potencia más alta de x es el **coeficiente principal** del polinomio y si $a_n \neq 0$, se dice que el polinomio tiene **grado** n. Por definición, dos polinomios son **iguales** si y sólo si son del mismo grado y los coeficientes correspondientes son iguales. Si *todos*

los coeficientes del polinomio son cero, se obtiene el llamado **polinomio cero** que se denota por 0. Por costumbre, al polinomio cero no se le asigna grado.

A continuación se dan algunos ejemplos de polinomios.

$$3x^4 + 5x^3 + (-7)x + 4 \quad \text{(grado 4)}$$
$$x^8 + 9x^2 + (-2)x \quad \text{(grado 8)}$$
$$5x^2 + 1 \quad \text{(grado 2)}$$
$$7x + 2 \quad \text{(grado 1)}$$
$$5 \quad \text{(grado 0)}$$

Si algunos de los coeficientes de un polinomio son negativos, entonces por conveniencia usaremos signos menos entre los términos adecuados. Por ejemplo, en lugar de $3x^2 + (-5)x + (-7)$, escribimos $3x^2 - 5x - 7$. Se pueden considerar también polinomios con otras variables. Por ejemplo $\frac{2}{5}z^2 - 3z^7 + 8 - \sqrt{5}z^4$ es un polinomio en z de grado 7. Generalmente colocamos los términos con las potencias de la variable en orden decreciente y escribimos $-3z^7 - \sqrt{5}z^4 + \frac{2}{5}z^2 + 8$.

De acuerdo con la definición de grado, si c es un número real diferente de cero, entonces c es un polinomio de grado 0. Tales polinomios (incluyendo al polinomio cero) se conocen como **polinomios constantes**.

Un polinomio en x puede ser considerado como una expresión algebraica obtenida empleando únicamente sumas, restas y multiplicaciones que incluyan a x. En particular, las expresiones

$$\frac{1}{x} + 3x, \qquad \frac{x-5}{x^2+2}, \qquad 3x^2 + \sqrt{x} - 2$$

no son polinomios pues existen divisiones entre variables, o raíces en las que existen variables.

Los coeficientes de los polinomios se pueden elegir de algún sistema matemático distinto del de los números reales. Sin embargo, en este texto, a menos que se especifique otra cosa, *el término "polinomio" se referirá siempre a un polinomio con coeficiente real.*

Puesto que los polinomios, y los monomios que constituyen los polinomios, son símbolos que representan números reales, todas las propiedades dadas en la Sección 1.2 pueden aplicarse. Si se llevan a cabo sumas, restas y multiplicaciones con polinomios, se puede simplificar entonces el resultado haciendo uso de las propiedades de los números reales.

EJEMPLO 1 Hallar la suma de los polinomios $x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ y $4x^3 - 5x^2 + 3$.

SOLUCIÓN Reordenando los términos y aplicando las propiedades de los números reales tenemos

$$\begin{aligned}(x^3 + 2x^2 - 5x + 7) + (4x^3 - 5x^2 + 3) &= x^3 + 4x^3 + 2x^2 - 5x^2 - 5x + 7 + 3 \\ &= (1+4)x^3 + (2-5)x^2 + (-5)x + (7+3) \\ &= 5x^3 - 3x^2 - 5x + 10\end{aligned}$$

■

El Ejemplo 1 ilustra el hecho de que la suma de dos polinomios cualesquiera en x se puede obtener sumando coeficientes de las mismas potencias de x.

La diferencia de dos polinomios se puede encontrar si restamos coeficientes de potencias iguales, como se indica en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Restar $4x^3 - 5x^2 + 3$ de $x^3 + 2x^2 - 5x + 7$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}(x^3 + 2x^2 - 5x + 7) - (4x^3 - 5x^2 + 3) &= x^3 + 2x^2 - 5x + 7 - 4x^3 + 5x^2 - 3 \\ &= x^3 - 4x^3 + 2x^2 + 5x^2 - 5x + 7 - 3 \\ &= (1 - 4)x^3 + (2 + 5)x^2 - 5x + (7 - 3) \\ &= -3x^3 + 7x^2 - 5x + 4\end{aligned}$$

■

Los pasos intermedios en la solución anterior se escribieron para aclarar el proceso; se podrán suprimir cuando se tenga práctica con ese tipo de operaciones. Para multiplicar dos polinomios se usan las leyes distributivas junto con las leyes de los exponentes y se agrupan los términos semejantes, como se ve en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Obtener el producto de $x^2 + 5x - 4$ y $2x^3 + 3x - 1$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}(x^2 + 5x - 4)(2x^3 + 3x - 1) &= x^2(2x^3 + 3x - 1) + 5x(2x^3 + 3x - 1) - 4(2x^3 + 3x - 1) \\ &= 2x^5 + 3x^3 - x^2 + 10x^4 + 15x^2 - 5x - 8x^3 - 12x + 4 \\ &= 2x^5 + 10x^4 + (3 - 8)x^3 + (-1 + 15)x^2 + (-5 - 12)x + 4 \\ &= 2x^5 + 10x^4 - 5x^3 + 14x^2 - 17x + 4\end{aligned}$$

Por conveniencia, este procedimiento puede ordenarse del siguiente modo:

$$\begin{array}{rrrrrr} 2x^3 + & 3x & - 1 & & & \\ x^2 + & 5x & - 4 & & & \\ \hline 2x^5 & & + 3x^3 - & x^2 & & \\ & 10x^4 & & + 15x^2 - & 5x & \\ & & - 8x^3 & & - 12x + 4 & \\ \hline 2x^5 + & 10x^4 - & 5x^3 + & 14x^2 - & 17x + 4 & \end{array}$$

■

También se pueden considerar polinomios en más de una variable. Por ejemplo, un polinomio en *dos* variables x y y es una suma de términos, cada uno de la forma $ax^m y^k$ para un número real a y enteros no negativos m y k. Un ejemplo es

$$3x^4y + 2x^3y^5 + 7x^2 - 4xy + 8y - 5.$$

De la misma manera podemos considerar polinomios en tres variables x, y, z, o bien en cualquier número de variables. La adición, sustracción y multiplicación se efectúan haciendo uso de las propiedades de los números reales. El ejemplo siguiente lo ilustra con sencillez:

EJEMPLO 4 Hallar el producto de $x^2 + xy + y^2$ y $x - y$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}(x^2 + xy + y^2)(x - y) &= (x^2 + xy + y^2)x - (x^2 + xy + y^2)y \\ &= x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3 \\ &= x^3 - y^3\end{aligned}$$

■

La división entre un monomio se puede ver en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Dividir $6x^2y^3 + 4x^3y^2 - 10xy$ entre $2xy$.

SOLUCIÓN Usando las propiedades de los cocientes y las leyes de los exponentes,

$$\begin{aligned}\frac{6x^2y^3 + 4x^3y^2 - 10xy}{2xy} &= \frac{6x^2y^3}{2xy} + \frac{4x^3y^2}{2xy} - \frac{10xy}{2xy} \\ &= 3xy^2 + 2x^2y - 5.\end{aligned}$$

■

Ciertos productos ocurren con tal frecuencia en álgebra que merecen atención especial. A continuación aparece la lista de algunos, en ella, las letras representan números reales. El lector debe verificar la validez de cada fórmula efectuando la correspondiente multiplicación.

PRODUCTOS NOTABLES

(i) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

(ii) $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

(iii) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

(iv) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

(v) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

(vi) $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

Ya que los símbolos x y y usados en estas fórmulas representan números reales, pueden sustituirse por expresiones algebraicas, como veremos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Obtener los productos:

(a) $(2r^2 - \sqrt{s})(2r^2 + \sqrt{s})$ (b) $\left(\sqrt{c} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$ (c) $(2a - 5b)^3$

SOLUCIÓN

(a) Si se usa la fórmula (i) con $x = 2r^2$ y $y = \sqrt{s}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}(2r^2 - \sqrt{s})(2r^2 + \sqrt{s}) &= (2r^2)^2 - (\sqrt{s})^2 \\ &= 4r^4 - s.\end{aligned}$$

(b) Si se aplica la fórmula (iii) de los productos notables con $x = \sqrt{c}$, $y = 1/\sqrt{c}$,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{c} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 &= (\sqrt{c})^2 + 2\sqrt{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \\ &= c + 2 + \frac{1}{c}.\end{aligned}$$

(c) Si se aplica la fórmula (vi) de los productos notables con $x = 2a$, $y = 5b$, se obtiene

$$\begin{aligned}(2a - 5b)^3 &= (2a)^3 - 3(2a)^2(5b) + 3(2a)(5b)^2 - (5b)^3 \\ &= 8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3.\end{aligned}$$

■

Si un polinomio se escribe como producto de otros polinomios, cada polinomio del producto es un **factor** del polinomio original. Al proceso de expresar un polinomio como un producto se le da el nombre de **factorización**. Por ejemplo, puesto que $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$, vemos que $x + 3$ y $x - 3$ son factores de $x^2 - 9$.

La factorización desempeña un rol importante en numerosas aplicaciones matemáticas, ya que permite reducir el estudio de expresiones complicadas al estudio de varias expresiones simples. Por ejemplo, se pueden determinar propiedades importantes del polinomio $x^2 - 9$ haciendo un análisis de los factores $x + 3$ y $x - 3$.

Interesan principalmente los **factores no triviales** de los polinomios, esto es, factores que contienen polinomios de grado mayor que cero, excepto si los coeficientes son *enteros*, en cuyo caso separa el factor común entero de los términos del polinomio. Esto se hace aplicando la ley distributiva, como en la factorización

$$4x^2y + 8z^3 = 4(x^2y + 2z^3).$$

Un entero $a > 1$ es primo si no puede escribirse como producto de dos enteros positivos mayores que 1. De la misma manera, si S denota un conjunto de números, entonces un polinomio con coeficientes en S se dice que es **primo**, o irreducible sobre S, si no puede escribirse como producto de dos polinomios de grado positivo con coeficientes en S. Un polinomio puede ser irreducible sobre un conjunto S pero no sobre otro. Por ejemplo, $x^2 - 2$ es irreducible sobre los números racionales puesto que no se puede expresar como producto de dos polinomios que tengan coeficientes *raciona-*

les. Si los factores pueden tener coeficientes *reales*, entonces $x^2 - 2$ no sería primo, y se tendría:

$$x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}).$$

Análogamente, $x^2 + 1$ es irreducible sobre los números reales, pero, como veremos en la Sección 2.4, no sobre los números complejos. Puede demostrarse que todo polinomio $ax + b$ de grado 1 es irreducible.

Antes de efectuar factorizaciones de polinomios es necesario especificar el sistema del cual han de elegirse los coeficientes de los factores. En este capítulo usaremos la regla de que *si un polinomio tiene coeficientes enteros, entonces los factores deben ser polinomios con coeficientes enteros*. Por ejemplo,

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

$$4x^2 - 9y^2 = (2x - 3y)(2x + 3y).$$

Generalmente es difícil factorizar polinomios de grado mayor que 2. En casos simples las siguientes fórmulas pueden ser útiles. Cada una se puede verificar mediante multiplicación.

FÓRMULAS DE FACTORIZACIÓN

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
(Diferencia de dos cuadrados)

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
(Diferencia de dos cubos)

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
(Suma de dos cubos)

EJEMPLO 7 Factorizar cada una de las siguientes expresiones.

(a) $25r^2 - 49s^2$ (b) $81x^4 - y^4$ (c) $16x^4 - (y - 2z)^2$

SOLUCIÓN

(a) Si se aplica la fórmula para la diferencia de dos cuadrados con $a = 5r$ y $b = 7s$, se obtiene

$$25r^2 - 49s^2 = (5r)^2 - (7s)^2 = (5r + 7s)(5r - 7s).$$

(b) Si se aplica dos veces la fórmula,

$$\begin{aligned} 81x^4 - y^4 &= (9x^2)^2 - (y^2)^2 \\ &= (9x^2 + y^2)(9x^2 - y^2) \\ &= (9x^2 + y^2)(3x + y)(3x - y). \end{aligned}$$

(c) Si se escribe $16x^4 = (4x^2)^2$, entonces se puede usar la fórmula con $a = 4x^2$ y $b = y - 2z$:

$$\begin{aligned} 16x^4 - (y - 2z)^2 &= (4x^2)^2 - (y - 2z)^2 \\ &= [(4x^2) + (y - 2z)][(4x^2) - (y - 2z)] \\ &= (4x^2 + y - 2z)(4x^2 - y + 2z). \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 8 Factorizar las siguientes expresiones:

(a) $a^3 + 64b^3$ (b) $8x^6 - 27y^9$

SOLUCIÓN

(a) Si se usa la fórmula para la suma de dos cubos, con $x = a$ y $y = 4b$, se tiene

$$\begin{aligned} a^3 + 64b^3 &= a^3 + (4b)^3 \\ &= (a + 4b)[a^2 - a(4b) + (4b)^2] \\ &= (a + 4b)(a^2 - 4ab + 16b^2). \end{aligned}$$

(b) Si se usa la fórmula para la diferencia de dos cubos, se tiene

$$\begin{aligned} 8x^6 - 27y^9 &= (2x^2)^3 - (3y^3)^3 \\ &= (2x^2 - 3y^3)[(2x^2)^2 + (2x^2)(3y^3) + (3y^3)^2] \\ &= (2x^2 - 3y^3)(4x^4 + 6x^2y^3 + 9y^6). \end{aligned}$$

■

La factorización del polinomio $px^2 + qx + r$, en donde p, q y r son enteros, debe ser de la forma $(ax + b)(cx + d)$, en donde a, b, c y d son enteros. Se deduce que $ac = p$, $bd = r$ y $ad + bc = q$. Evidentemente, existe un número limitado de posibilidades para valores de a, b, c y d que satisfagan esas condiciones. Si no existen valores que las satisfagan, entonces $px^2 + qx + r$ es primo. Este método también se aplica a polinomios de la forma $px^2 + qxy + ry^2$.

EJEMPLO 9 Factorizar las siguientes expresiones

(a) $6x^2 - 7x - 3$ (b) $12x^2 - 36xy + 27y^2$

(c) $4x^4y - 11x^3y^2 + 6x^2y^3$

SOLUCIÓN

(a) Si escribimos

$$6x^2 - 7x - 3 = (ax + b)(cx + d),$$

entonces $ac = 6$, $bd = -3$ y $ad + bc = -7$. Haciendo varios ensayos, se llega a la siguiente factorización:

$$6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1).$$

(b) Como cada término tiene 3 como factor, se empieza con

$$12x^2 - 36xy + 27y^2 = 3(4x^2 - 12xy + 9y^2).$$

Si existe una factorización de $4x^2 - 12xy + 9y^2$ que sea producto de dos polinomios de primer grado, entonces debe ser de la forma

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (ax + by)(cx + dy).$$

Experimentando se encuentra:

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)(2x - 3y) = (2x - 3y)^2.$$

Por lo tanto,

$$12x^2 - 36xy + 27y^2 = 3(4x^2 - 12xy + 9y^2) = 3(2x - 3y)^2.$$

(c) Ya que cada término tiene el factor x^2y, empezamos por escribir

$$4x^4y - 11x^3y^2 + 6x^2y^3 = x^2y(4x^2 - 11xy + 6y^2).$$

Haciendo ensayos se obtiene la siguiente factorización:

$$4x^4y - 11x^3y^2 + 6x^2y^3 = x^2y(4x - 3y)(x - 2y)$$ ■

En algunos casos, se puede encontrar una factorización aplicando las propiedades distributivas siempre que los términos de la suma se agrupen de manera adecuada. Se ilustra este método con el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 10 Factorizar las siguientes expresiones:

(a) $4ac + 2bc - 2ad - bd$ (b) $3x^3 + 2x^2 - 12x - 8$

SOLUCIÓN

(a) Agrupamos los dos primeros términos y los dos últimos, y aplicamos las propiedades distributivas del siguiente modo:

$$\begin{aligned} 4ac + 2bc - 2ad - bd &= (4ac + 2bc) - (2ad + bd) \\ &= 2c(2a + b) - d(2a + b). \end{aligned}$$

El segundo miembro tiene la forma

$$2ck - dk, \text{ en la que } k = 2a + b.$$

Puesto que $2ck - dk = (2c - d)k$, obtenemos

$$4ac + 2bc - 2ad - bd = (2c - d)(2a + b).$$

Es importante notar que si la expresión original hubiera sido

$$4ac - bd + 2bc - 2ad,$$

habría sido necesario reordenar los términos antes de agruparlos.

(b) Nuevamente comenzamos por agrupar los dos primeros y los dos últimos términos de la expresión:

$$\begin{aligned} 3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 &= (3x^3 + 2x^2) - (12x + 8) \\ &= x^2(3x + 2) - 4(3x + 2). \end{aligned}$$

El segundo miembro tiene la forma $x^2c - 4k$, donde $k = 3x + 2$. Puesto que $x^2k - 4k = (x^2 - 4)k$, tenemos

$$3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 = (x^2 - 4)(3x + 2).$$

Finalmente, aplicando la fórmula para la diferencia de dos cuadrados, obtenemos la factorización

$$3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 = (x + 2)(x - 2)(3x + 2). \quad \blacksquare$$

Ejercicios 1.4

En los Ejercicios 1 a 22, efectúe las operaciones indicadas y exprese el resultado en forma de polinomio.

1. $(4x^3 + 2x^2 - x + 5) + (x^3 - 3x^2 - 5x + 1)$
2. $(x^4 - 3x^2 + 7x + 4) + (x^3 + 3x^2 - 4x - 3)$
3. $(5x^4 - 6x^2 + 9x) - (2x^3 + 3x^2 - 8x + 4)$
4. $(2x^2 - 11x + 13) - (3x^4 + 9x^2 - 10)$
5. $(5y^3 - 6y^2 + y - 7) - (5y^3 + 6y^2 + y + 2)$
6. $(4z^2 - 4z + 1) - (2z + 1)^2$
7. $(2a^4 - 3a^2 + 5) + a(a^3 + 3a - 4)$
8. $(3u + 1)(2u - 3) + 6u(u + 5)$
9. $(3x - 4)(2x^2 + x - 5)$
10. $(4x^3 - x^2 - 7)(3x + 2)$
11. $(r^2 + 2r + 3)(3r^2 - 2r + 4)$
12. $(s + t)(s^2 - st + t^2)$
13. $(6x^3 - 3x^2 - x + 7)(2x^2 + 4x + 5)$
14. $(2x^2 - xy + y^2)(3x - y)$
15. $(r - t)(r^2 + rt + t^2)$
16. $(x + y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)$
17. $(3x + 1)(2x^2 - x + 2)(x^2 + 4)$
18. $(3c + 1)(2c^2 + 5)(c^3 + 4)$
19. $\dfrac{8x^2y^3 - 10x^3y}{2x^2y}$
20. $\dfrac{6a^3b^3 - 9a^2b^2 + 3ab^4}{3ab^2}$
21. $\dfrac{3u^3v^4 - 2u^5v^2 + (u^2v^2)^2}{u^3v^2}$
22. $\dfrac{6x^2yz^3 - xy^2z}{xyz}$

Exprese los productos de los Ejercicios 23 a 50 en forma de polinomios.

23. $(x - 3)(2x + 1)$
24. $(3x + 2)(3x - 5)$
25. $(2s - 7t)(4s - 5t)$
26. $(8n - 6p)(7n - 10p)$
27. $(5x^2 + 2y)(3x^2 - 7y)$
28. $(x + 9y^2)(3x - 4y^2)$
29. $(6t - 5v)(6t + 5v)$
30. $(8u + 3)^2$
31. $(3r + 10s)^2$
32. $(4v - 3w)(4v + 3w)$
33. $(4x^2 - 5y^2)^2$
34. $(10p^2 + 7q^2)^2$
35. $(2x - x)^2$
36. $b^6(b^3 - b^{-3})^2$
37. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$
38. $(x^{1/3} - y^{1/3})(x^{2/3} + x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})$
39. $(x - 2y)^3$
40. $(4x - y)^3$
41. $(3r + 4s)^3$
42. $(2a + 5b)^3$
43. $(x^2 + y^2)^3$
44. $(u^2 - 3v)^3$
45. $(a^{1/3} - b^{1/3})^3$
46. $(a + b)^2(a - b)^2$
47. $(x + y + z)(x + y - z)$
48. $(2a - b + 3c)(2a - b - 3c)$
49. $(3x + 2y + z)^2$
50. $(x^2 + y^2 + z^2)^2$

Factorice cada una de las expresiones de los Ejercicios 51 a 110.

51. $rs + 4st$
52. $4u^2 - 2uv$
53. $3a^2b^2 - 6a^2b$
54. $10xy + 15xy^2$
55. $9x^2y^2 + 15xy^4$
56. $-8p^4qr^2 - 4p^3q^3r^2$
57. $4x^2 + 5x - 6$
58. $21x^2 + 29x - 10$
59. $4x^2 - 4x - 15$
60. $6x^2 + x - 5$

61. $16y^2 - 14y - 15$ **62.** $12m^2 - 17m - 14$

63. $9z^2 - 12z + 4$ **64.** $4x^2 + 12x + 9$

65. $12c^2 + 50c + 48$ **66.** $40y^2 - 82y + 40$

67. $4r^2 - 25t^2$ **68.** $36a^2 - 49b^2$

69. $50x^2 + 45xy - 18y^2$ **70.** $45x^2 + 38xy + 8y^2$

71. $64w^4 - 36s^2$ **72.** $75p^2 - 48v^4$

73. $36z^2 + 60z + 25$ **74.** $64y^2 + 112y + 49$

75. $27x^3 - y^3$ **76.** $x^3 + 8y^3$

77. $27a^3 + 64b^3$ **78.** $8r^3 - 27s^3$

79. $8x^6 - 125$ **80.** $216 - y^6$

81. $6ax - 3ay + 2bx - by$

82. $5ru + 10vr + 2ut + 4vt$

83. $40zw + 8x^2w - 35z - 7x^2$

84. $18ck + 4dk + 9cj + 2dj$

85. $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$ **86.** $6w^8 + 17w^4 + 12$

87. $a^6 - b^6$ **88.** $x^8 - 16$

89. $x^4 + 25$ **90.** $a^2 + a + 1$

91. $6x^2 + 42x + 60$ **92.** $16x^2 + 40x - 24$

93. $4x^2 - 24x + 36$ **94.** $60x^2 - 85x + 30$

95. $75x^2 + 120x + 48$ **96.** $64x^2 - 16$

97. $36 - 9x^2$ **98.** $18x^2 - 50$

99. $2x^2y + xy - 2xz - z$

100. $3ac - 6bd + 3ad - 6bc$

101. $12x^2z + 8y^2z - 15x^2w - 10y^2w$

102. $4x^3 + 6x^2y - 4y^2x - 6y^3$

103. $y^6 + 7y^3 - 8$ **104.** $8c^6 + 19c^3 - 27$

105. $(x + y)^3 - 27$ **106.** $(a + b)^4 - 1$

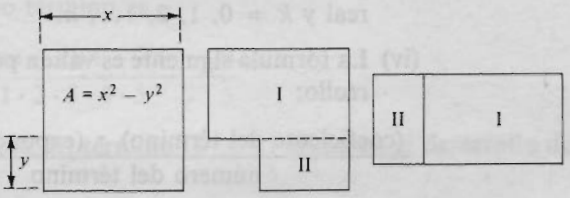
107. $x^2 + 2x + 5$ **108.** $4x^3 + 4x^2 + x$

109. $x^{16} - 1$ **110.** $x^{16} + 1$

Los antiguos griegos proporcionaron demostraciones geométricas para las fórmulas de factorización de la diferencia de dos cuadrados y la diferencia de dos cubos. En los Ejercicios 111 y 112 establezca las fórmulas para los casos especiales dados.

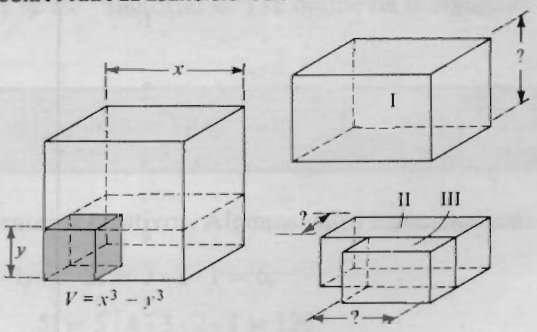
111. Calcule el área de las regiones I y II que se muestran en la figura para establecer la fórmula de la diferencia de dos cuadrados para el caso especial $x > y$.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 111



112. Calcule el volumen de los cuerpos I, II y III que se muestran en la figura para establecer la fórmula de la diferencia de dos cubos para el uso especial $x > y$.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 112



1.5 Teorema del binomio

Una suma $a + b$ se denomina **binomio**. Algunas veces es necesario considerar $(a + b)^n$, en la que n es un entero positivo grande. El **Teorema del Binomio** nos proporciona una fórmula general para *desarrollar* $(a + b)^n$ como una suma. Comence-

mos considerando algunos casos especiales. Si se efectúan realmente las multiplicaciones obtenemos

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Estos desarrollos de $(a + b)^n$, para $n = 2, 3, 4$ y 5, tienen las propiedades siguientes:

(i) Hay $n + 1$ términos, siendo el primero a^n y el último b^n.

(ii) Al pasar de cualquier término al siguiente, la potencia de a decrece en 1, la potencia de b aumenta en 1. Entonces, la suma de los exponentes de a y de b es siempre n.

(iii) Cada término es de la forma $(c)a^{n-k}b^k$, en la que el coeficiente c es un número real y $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

(iv) La fórmula siguiente es válida para cada uno de los primeros n términos del desarrollo:

$$\frac{(\text{coeficiente del término}) \cdot (\text{exponente de } a)}{\text{número del término}} = \text{coeficiente del siguiente término.}$$

La siguiente tabla ilustra la propiedad (iv) para el desarrollo de $(a + b)^5$.

Número de orden del término	Coeficiente del término	Exponente de a	Coeficiente del siguiente término
1	1	5	$\frac{1 \cdot 5}{1} = 5$
2	5	4	$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$
3	10	3	$\frac{10 \cdot 3}{3} = 10$
4	10	2	$\frac{10 \cdot 2}{4} = 5$
5	5	1	$\frac{5 \cdot 1}{5} = 1$

Así, como antes, obtenemos

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Ahora consideremos $(a + b)^n$, para un entero positivo arbitrario n. El primer término es a^n, que tiene coeficiente 1. Si suponemos cierta la propiedad (iv) obtenemos los coeficientes sucesivos que se listan en la siguiente tabla.

Número de orden del término	Coeficiente del término	Exponente de a	Coeficiente del siguiente término
1	1	n	$\frac{1 \cdot n}{1} = \frac{n}{1}$
2	$\frac{n}{1}$	$n-1$	$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$
3	$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$	$n-2$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
4	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	$n-3$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

El último coeficiente que hemos calculado es el perteneciente al quinto término. De manera análoga, el coeficiente del sexto término es

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Ahora puede verse como el coeficiente del término $(k+1)$-ésimo en el desarrollo de $(a+b)^n$ es el siguiente

COEFICIENTE $(k+1)$-ÉSIMO DE $(a+b)^n$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k}$$

Esta fracción puede escribirse de manera compacta usando la **notación factorial**. Si n es un entero positivo, el símbolo $n!$ (que se lee "factorial n") se define de la siguiente manera:

DEFINICIÓN DE $n!$ $(n > 0)$

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$$

Así, $n!$ es el producto de los primeros n enteros positivos. Algunos casos especiales son:

$$1! = 1, \quad 2! = 2 \cdot 1, \quad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6,$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, \quad 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Para asegurar que ciertas fórmulas se verifican para todos los enteros *no negativos* se define 0! de la siguiente manera:

DEFINICIÓN DE 0!

$$0! = 1$$

Nótese que para $n \geq 1$,

$$n! = n[(n-1)!] = n(n-1)!$$

Para valores mayores de n podemos escribir

$$n! = n(n-1)(n-2)! = n(n-1)(n-2)(n-3)!$$

y así sucesivamente. La fórmula para el coeficiente $(k+1)$-ésimo en el desarrollo de $(a+b)^n$ se puede escribir como sigue:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} = \frac{\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!}}{k!}$$

$$= \frac{\dfrac{n!}{(n-k)!}}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Estos números se llaman **coeficientes binomiales** y a menudo se representan con la siguiente notación

DEFINICIÓN

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

El símbolo $\binom{n}{k}$, que denota al coeficiente $(k+1)$-ésimo del desarrollo de $(a+b)^n$, se lee algunas veces como "n sobre k".

EJEMPLO 1

Hallar $\binom{5}{0}, \binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{5}{4}$ y $\binom{5}{5}$.

SOLUCIÓN Estos seis números son los coeficientes del desarrollo de $(a+b)^5$, los cuales ya han sido tabulados anteriormente en esta sección. Por definición:

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!(5-0)!} = \frac{5!}{1\cdot 5!} = 1$$

$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{5!}{1\cdot 4!} = \frac{5\cdot 4!}{4!} = 5$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2!3!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5!}{4!1!} = \frac{5 \cdot 4!}{4!} = 5$$

$$\binom{5}{5} = \frac{5!}{5!(5-5)!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$

■

El Teorema del Binomio puede enunciarse de la siguiente manera. (En la primera sección del capítulo referente a Sucesiones, Series y Probabilidad, se da una demostración.)

TEOREMA DEL BINOMIO

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

El Teorema del Binomio se puede enunciar sin utilizar símbolos para los coeficientes binomiales como sigue:

TEOREMA DEL BINOMIO (Forma Alternativa)

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

Los siguientes ejemplos se pueden resolver usando las fórmulas generales para el teorema del binomio, o haciendo uso de la propiedad (iv) que se mencionó al principio de esta sección.

EJEMPLO 2 Determinar el desarrollo binomial de $(2x + 3y^2)^4$.

SOLUCIÓN Utilizando el teorema del binomio con $a = 2x$, $b = 3y^2$ y $n = 4$,

$$(2x+3y^2)^4 = (2x)^4 + \binom{4}{1}(2x)^3(3y^2) + \binom{4}{2}(2x)^2(3y^2)^2 + \binom{4}{3}(2x)(3y^2)^3 + (3y^2)^4.$$

Lo anterior se simplifica a

$$\begin{aligned}(2x+3y^2)^4 &= 16x^4 + 4(8x^3)(3y^2) + 6(4x^2)(9y^4) + 4(2x)(27y^6) + 81y^8 \\ &= 16x^4 + 96x^3y^2 + 216x^2y^4 + 216xy^6 + 81y^8.\end{aligned}$$

■

El siguiente ejemplo ilustra el hecho de que si a o b es negativo, entonces los términos del desarrollo son alternadamente positivo o negativo.

EJEMPLO 3

Desarrollar $\left(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right)^5$.

SOLUCIÓN Los coeficientes binomiales para $(a + b)^5$ se calcularon en el Ejemplo 1. Por lo tanto, si sustituimos $a = 1/x$, $b = -2\sqrt{x}$ y $n = 5$ en el teorema, entonces

$$\left(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right)^5 = \left(\frac{1}{x}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{x}\right)^4(-2\sqrt{x}) + 10\left(\frac{1}{x}\right)^3(-2\sqrt{x})^2$$
$$+ 10\left(\frac{1}{x}\right)^2(-2\sqrt{x})^3 + 5\left(\frac{1}{x}\right)(-2\sqrt{x})^4 + (-2\sqrt{x})^5.$$

Lo anterior se simplifica a

$$\left(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right)^5 = \frac{1}{x^5} - \frac{10}{x^{7/2}} + \frac{40}{x^2} - \frac{80}{x^{1/2}} + 80x - 32x^{5/2}. \quad \blacksquare$$

Algunos problemas sólo requieren encontrar un término específico del desarrollo de $(a + b)^n$. Para resolver tales problemas es conveniente encontrar primero el exponente k que ha de asignarse a b. Nótese que, por el teorema del binomio, *el exponente de b es siempre menor en una unidad que el número de orden del término*. Una vez que se encuentra k, el exponente de a es $n - k$ y el coeficiente es $\binom{n}{k}$.

EJEMPLO 4 Hallar el quinto término del desarrollo de $(x^3 + \sqrt{y})^{13}$.

SOLUCIÓN Sean $a = x^3$ y $b = \sqrt{y}$. El exponente de b en el quinto término es 4 y así el exponente de a es 9. Por lo visto en el párrafo anterior resulta

$$\binom{13}{4}(x^3)^9(\sqrt{y})^4 = \frac{13!}{4!(13-4)!}x^{27}y^2 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4!}x^{27}y^2 = 715x^{27}y^2. \quad \blacksquare$$

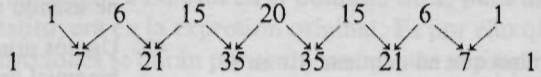
Por último, hay una interesante disposición triangular de números que se llama **triángulo de Pascal**, que sirve para obtener los coeficientes binomiales. Es como sigue:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
. . . . . .
. . . . . .

Los números del segundo renglón son los coeficientes del desarrollo de $(a + b)^1$; los del tercero son los que corresponden al de $(a + b)^2$; los del cuarto corresponden al desarrollo de $(a + b)^3$, y así sucesivamente. Cada número del triángulo que no es 1 se obtiene sumando los dos números del renglón inmediatamente arriba de él y que están a su izquierda y a su derecha.

EJEMPLO 5 Encontrar el octavo renglón del triángulo de Pascal y usarlo para desarrollar $(a + b)^7$.

SOLUCIÓN Reescribamos el séptimo renglón para usarlo después en el proceso descrito anteriormente. En el siguiente esquema las flechas indican los dos números del séptimo renglón que se suman para obtener los números del octavo.



El octavo renglón nos proporciona los coeficientes de la expresión de $(a + b)^7$. Así

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$ ■

El triángulo de Pascal sirve para desarrollar pequeñas potencias de $a + b$; sin embargo, para el desarrollo de potencias grandes o para encontrar un término específico, como en el Ejemplo 4, es mejor referirse a la fórmula general dada por el teorema del binomio.

Ejercicios 1.5

En los Ejercicios 1 a 12 determinar los números.

1. 6!
2. 5!
3. 3!2!
4. 2!0!
5. $\frac{8!}{5!}$
6. $\frac{7!}{3!}$
7. $\binom{7}{3}$
8. $\binom{6}{2}$
9. $\binom{8}{5}$
10. $\binom{4}{4}$
11. $\binom{9}{4}$
12. $\binom{3}{2}$

Desarrollar y simplificar las expresiones de los Ejercicios 13 a 24.

13. $(a + b)^6$
14. $(a - b)^7$
15. $(a - b)^8$
16. $(a + b)^9$
17. $(3x - 5y)^4$
18. $(2t - s)^5$
19. $(u^2 + 4v)^5$
20. $(\frac{1}{2}c + d^3)^4$
21. $(r^{-2} - 2r)^6$
22. $(x^{1/2} - y^{-1/2})^6$
23. $(1 + x)^{10}$
24. $(1 - x)^{10}$
25. Halle los primeros cuatro términos en el desarrollo binomial de $(3c^{2/5} + c^{4/5})^{25}$.
26. Halle los primeros tres términos y los últimos tres en el desarrollo binomial de $(x^3 + 5x^{-2})^{20}$.
27. Obtenga los últimos dos términos del desarrollo de $(4b^{-1} - 3b)^{15}$.
28. Encuentre los últimos tres términos del desarrollo de $(s - 2t^3)^{12}$.

Resuelva los Ejercicios 29 a 40 sin desarrollarlos completamente.

29. Realice la obtención del quinto término del desarrollo de $(3a^2 + \sqrt{b})^9$.

30. Encuentre el sexto término del desarrollo de $\left(\frac{2}{c} + \frac{c^2}{3}\right)$.

31. Obtenga el séptimo término del desarrollo de $(\frac{1}{2}u - 2v)^{10}$.

32. Determine el cuarto término del desarrollo de $(2x^3 - y^2)^6$.

33. Determine el término medio del desarrollo de $(x^{1/3} + y^{1/3})^{12}$.

34. Encuentre los dos términos medios del desarrollo de $(rs + t)^7$.

35. Encuentre el término que no contiene a x en el desarrollo de $\left(6x - \frac{1}{2x}\right)^{10}$.

36. Obtenga el término que incluye a x^8 en el desarrollo de $(y + 3x^2)^6$.

37. Encuentre el término que contiene a y^6 en el desarrollo de $(x - 2y^3)^4$.

38. Halle el término que contiene a b^9 en el desarrollo de $(5a + 2b^3)^4$.

39. Encuentre el término que contiene a c^3 en el desarrollo de $(\sqrt{c} + \sqrt{d})^{10}$.

40. En el desarrollo de $(xy - 2y^{-3})^8$ halle el término que no contiene a y.

41. Use los primeros cuatro términos del desarrollo binomial de $(1 + 0.02)^{10}$ para aproximar $(1.02)^{10}$. Compare con la respuesta que se obtiene usando calculadora.

42. Use los primeros cuatro términos del desarrollo binomial de $(1 - 0.001)^4$ para aproximar $(0.99)^4$. Compare con la respuesta que se obtiene usando la calculadora.

1.6 Expresiones fraccionarias

A los cocientes de las expresiones algebraicas se les llama **expresiones fraccionarias**. Como caso especial, el cociente de dos polinomios se denomina **expresión racional**. Algunos ejemplos son

$$\frac{x^2 - 5x + 1}{x^3 + 7}, \quad \frac{z^2x^4 - 3yz}{5z}, \quad \text{y} \quad \frac{1}{4xy}.$$

Muchos problemas en matemáticas incluyen combinaciones de expresiones racionales y luego se trata de simplificar el resultado. Puesto que las expresiones racionales son cocientes que contienen símbolos que representan números reales, pueden aplicarse las propiedades de los cocientes que se describieron en la Sección 1.2. Por supuesto, las letras a, b, c y d se reemplazan aquí por expresiones algebraicas. En problemas de simplificación es de particular importancia la siguiente fórmula

$$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}; \quad \text{esto es,} \quad \frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}.$$

Esta regla se enuncia a veces de la siguiente manera: "un factor común en el numerador y en el denominador puede ser *cancelado* del cociente". El modo de usar esta técnica en problemas en que intervienen expresiones racionales es factorizando el numerador y el denominador de la expresión racional dada en factores primos, y cancelando los factores comunes que aparezcan tanto en el numerador como en el denominador. La expresión resultante se dice que ha sido *simplificada*, que es ya *irreducible*.

EJEMPLO 1 Simplificar

$$\frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4}$$

SOLUCIÓN Si factorizamos el numerador y el denominador y se cancelan los factores comunes queda

$$\frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4} = \frac{(3x + 1)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{3x + 1}{x + 2}.$$

■

En el ejemplo anterior se canceló el factor común $x - 2$; esto es, dividimos numerador y denominador entre $x - 2$. Esta simplificación es válida únicamente si $x - 2 \neq 0$, es decir, si $x \neq 2$. Sin embargo, 2 no está en el dominio de x, pues daría un denominador nulo cuando se sustituyera en la expresión original. Es por ello que el procedimiento es válido. Estas restricciones se darán por sentadas cuando se simplifiquen expresiones racionales.

EJEMPLO 2 Simplificar

$$\frac{2 - x - 3x^2}{6x^2 - x - 2}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{2 - x - 3x^2}{6x^2 - x - 2} = \frac{(1 + x)(2 - 3x)}{(2x + 1)(3x - 2)} = \frac{-(1 + x)}{2x + 1}$$

El signo menos que aparece al final en la respuesta se debe a que $(2 - 3x) = -(3x - 2)$, ya que $(2 - 3x)/(3x - 2) = (3x - 2)/(3x - 2) = -1$. Otra manera de obtener el resultado es cambiando la forma del numerador del siguiente modo:

$$\frac{2 - x - 3x^2}{6x^2 - x - 2} = \frac{-(3x^2 + x - 2)}{6x^2 - x - 2}$$

$$= -\frac{(3x - 2)(x + 1)}{(3x - 2)(2x + 1)} = -\frac{x + 1}{2x + 1}$$

■

La multiplicación y la división de expresiones racionales se efectúan haciendo uso de las reglas de los cocientes y luego simplificando, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

(a) $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 1} \cdot \dfrac{2x - 2}{x - 3}$ (b) $\dfrac{x + 2}{2x - 3} \div \dfrac{x^2 - 4}{2x^2 - 3x}$

SOLUCIÓN

(a) $$\frac{x^2-6x+9}{x^2-1}\cdot\frac{2x-2}{x-3}=\frac{(x-3)^2}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{2(x-1)}{x-3}$$

$$=\frac{2(x-3)^2(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-3)}=\frac{2(x-3)}{x+1}$$

(b) $$\frac{x+2}{2x-3}\div\frac{x^2-4}{2x^2-3x}=\frac{x+2}{2x-3}\cdot\frac{2x^2-3x}{x^2-4}$$

$$=\frac{(x+2)x(2x-3)}{(2x-3)(x+2)(x-2)}=\frac{x}{x-2}$$

■

Para sumar o restar dos expresiones racionales, se encuentra un denominador común y se aplican las reglas siguientes de los números reales:

$$\frac{a}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{d};\qquad \frac{a}{d}-\frac{c}{d}=\frac{a-c}{d}.$$

Si los denominadores son diferentes, se puede obtener un denominador común multiplicando por polinomios apropiados el numerador y el denominador de cada una de las fracciones dadas. Es recomendable usar el **mínimo común denominador (MCDn)** de las dos fracciones. El MCDn se puede encontrar mediante la factorización en primos de cada denominador, y multiplicando luego los factores primos distintos usando el *mayor* exponente que aparezca en cada factor primo. Veamos este método con un ejemplo numérico.

EJEMPLO 4 Expresar como número racional en términos irreducibles a:

$$\tfrac{7}{24}+\tfrac{5}{18}$$

SOLUCIÓN Las factorizaciones en primos de los denominadores son $24 = (2^3)(3)$ y $18 = (2)(3^2)$. Para encontrar el MCDn se forma el producto de los diferentes factores primos, usando el mayor exponente asociado a cada factor. Esto da $(2^3)(3^2)$ o sea 72. Ahora se cambia cada fracción por otra análoga con denominador 72 y se suma del siguiente modo:

$$\tfrac{7}{24}+\tfrac{5}{18}=\tfrac{7}{24}\cdot\tfrac{3}{3}+\tfrac{5}{18}\cdot\tfrac{4}{4}$$

$$=\tfrac{21}{72}+\tfrac{20}{72}=\tfrac{41}{72}.$$

Si usamos la fórmula de suma para cocientes dada en la Sección 1.2, obtendremos

$$\frac{7}{24}+\frac{5}{18}=\frac{(7)(18)+(24)(5)}{(24)(18)}$$

$$=\frac{126+120}{432}=\frac{246}{432}=\frac{41}{72}.$$

■

El método para encontrar el mod para expresiones racionales es análogo al ilustrado en el Ejemplo 4. La única diferencia es que factorizamos polinomios en lugar de enteros.

EJEMPLO 5 Transformar la siguiente expresión racional a una con términos irreducibles.

$$\frac{6}{x(3x-2)}+\frac{5}{3x-2}-\frac{2}{x^2}$$

SOLUCIÓN Los denominadores ya están factorizados. Evidentemente, el MCDn es $x^2(3x-2)$. Para obtener tres fracciones que tengan ese denominador necesitamos multiplicar el numerador y el denominador de la primera fracción por x, los de la segunda por x^2, y los de la tercera por $3x-2$. Esto da

$$\frac{6}{x(3x-2)}+\frac{5}{3x-2}-\frac{2}{x^2}=\frac{6x}{x^2(3x-2)}+\frac{5x^2}{x^2(3x-2)}-\frac{2(3x-2)}{x^2(3x-2)}$$

$$=\frac{6x+5x^2-(6x-4)}{x^2(3x-2)}=\frac{5x^2+4}{x^2(3x-2)}.$$ ■

EJEMPLO 6 Simplificar

$$\frac{2x+5}{x^2+6x+9}+\frac{x}{x^2-9}+\frac{1}{x-3}$$

SOLUCIÓN Se comienza por factorizar los denominadores:

$$\frac{2x+5}{x^2+6x+9}+\frac{x}{x^2-9}+\frac{1}{x-3}=\frac{2x+5}{(x+3)^2}+\frac{x}{(x+3)(x-3)}+\frac{1}{x-3}$$

Ya que el MCDn es $(x+3)^2(x-3)$, se multiplica el numerador y el denominador de la primera fracción por $x-3$, los de la segunda por $x+3$ y los de la tercera por $(x+3)^2$, se suma y se obtiene así

$$\frac{(2x+5)(x-3)}{(x+3)^2(x-3)}+\frac{x(x+3)}{(x+3)^2(x-3)}+\frac{(x+3)^2}{(x+3)^2(x-3)}$$

$$=\frac{(2x^2-x-15)+(x^2+3x)+(x^2+6x+9)}{(x+3)^2(x-3)}$$

$$=\frac{4x^2+8x-6}{(x+3)^2(x-3)}=\frac{2(2x^2+4x-3)}{(x+3)^2(x-3)}$$ ■

A veces es necesario simplificar cocientes en los cuales el numerador y el denominador no son polinomios; esto se ilustra con el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7 Simplificar

$$\frac{1-\dfrac{2}{x+1}}{x-\dfrac{1}{x}}.$$

SOLUCIÓN

$$\frac{1-\dfrac{2}{x+1}}{x-\dfrac{1}{x}} = \frac{\dfrac{(x+1)-2}{x+1}}{\dfrac{x^2-1}{x}} = \frac{\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)}{\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)}$$

$$= \frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x}{x^2-1} = \frac{(x-1)x}{(x+1)(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x}{(x+1)^2}$$

Los denominadores de ciertas fracciones racionales contienen sumas o diferencias que comprenden radicales. Tales denominadores se pueden racionalizar como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Racionalizar el denominador de la fracción

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

SOLUCIÓN Multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{(\sqrt{x})^2+\sqrt{y}\sqrt{x}-\sqrt{x}\sqrt{y}-(\sqrt{y})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$$

Algunos problemas de cálculo requieren racionalizar un *numerador*, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9 Racionalizar el numerador de la fracción

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}, \quad \text{en la que } x>0 \text{ y } h>0.$$

SOLUCIÓN Se multiplica el numerador y el denominador por la expresión $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ y se procede luego como sigue:

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{(\sqrt{x+h})^2-\sqrt{x}\sqrt{x+h}+\sqrt{x+h}\sqrt{x}-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

■

Para algunos problemas de cálculo es necesario simplificar expresiones del tipo de las que se muestran en los siguientes dos ejemplos. (Véase también los Ejercicios 35 a 52.)

EJEMPLO 10 Simplificar la fracción

$$\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}.$$

SOLUCIÓN

$$\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}=\frac{\dfrac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2}}{h}$$

$$=\frac{x^2-(x^2+2xh+h^2)}{(x+h)^2x^2h}$$

$$=\frac{x^2-x^2-2xh-h^2}{(x+h)^2x^2h}$$

$$=\frac{-h(2x+h)}{(x+h)^2x^2h}$$

$$=-\frac{2x+h}{(x+h)^2x^2}$$

■

EJEMPLO 11 Simplificar la fracción

$$\frac{3x^2(2x+5)^{1/2}-x^3(\frac{1}{2})(2x+5)^{-1/2}(2)}{[(2x+5)^{1/2}]^2}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - x^3(\frac{1}{2})(2x+5)^{-1/2}(2)}{[(2x+5)^{1/2}]^2} = \frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - \dfrac{x^3}{(2x+5)^{1/2}}}{2x+5}$$

$$= \frac{\dfrac{3x^2(2x+5) - x^3}{(2x+5)^{1/2}}}{2x+5}$$

$$= \frac{6x^3 + 15x^2 - x^3}{(2x+5)^{1/2}(2x+5)}$$

$$= \frac{5x^3 + 15x^2}{(2x+5)^{3/2}} = \frac{5x^2(x+3)}{(2x+5)^{3/2}}$$

Una solución alternativa consiste en eliminar primero la potencia negativa $(2x + 5)^{-1/2}$ en la expresión dada multiplicando el numerador y el denominador por $(2x + 5)^{1/2}$ de la siguiente manera:

$$\frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - x^3(\frac{1}{2})(2x+5)^{-1/2}(2)}{[(2x+5)^{1/2}]^2} \cdot \frac{(2x+5)^{1/2}}{(2x+5)^{1/2}}$$

$$= \frac{3x^2(2x+5) - x^3(\frac{1}{2})(2)}{(2x+5)(2x+5)^{1/2}}$$

$$= \frac{6x^3 + 15x^2 - x^3}{(2x+5)^{3/2}}$$

El resto de la simplificación es igual. ∎

Ejercicios 1.6

Simplifique las expresiones de los Ejercicios 1 a 52.

1. $\dfrac{6x^2 + 7x - 10}{6x^2 + 13x - 15}$

2. $\dfrac{10x^2 + 29x - 21}{5x^2 - 23x + 12}$

3. $\dfrac{12y^2 + 3y}{20y^2 + 9y + 1}$

4. $\dfrac{4z^2 + 12z + 9}{2z^2 + 3z}$

5. $\dfrac{6 - 7a - 5a^2}{10a^2 - a - 3}$

6. $\dfrac{6y - 5y^2}{25y^2 - 36}$

7. $\dfrac{4x^3 - 9x}{10x^4 + 11x^3 - 6x^2}$

8. $\dfrac{16x^4 + 8x^3 + x^2}{4x^3 + 25x^2 + 6x}$

9. $\dfrac{6r}{3r - 1} - \dfrac{4r}{2r + 5}$

10. $\dfrac{3s}{s^2 + 1} - \dfrac{6}{2s - 1}$

11. $\dfrac{2x + 1}{2x - 1} - \dfrac{x - 1}{x + 1}$

12. $\dfrac{3u + 2}{u - 4} + \dfrac{4u + 1}{5u + 2}$

13. $\dfrac{9t - 6}{8t^3 - 27} \cdot \dfrac{4t^2 - 9}{12t^2 + 10t - 12}$

14. $\dfrac{a^2 + 4a + 3}{3a^2 + a - 2} \cdot \dfrac{3a^2 - 2a}{2a^2 + 13a + 21}$

15. $\dfrac{5a^2 + 12a + 4}{a^4 - 16} \div \dfrac{25a^2 + 20a + 4}{a^2 - 2a}$

16. $\dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4} \div \dfrac{x}{x^3 + 8}$

17. $\dfrac{2}{3x + 1} - \dfrac{9}{(3x + 1)^2}$

18. $\dfrac{4}{(5x - 2)^2} + \dfrac{x}{5x - 2}$

19. $\dfrac{1}{c} - \dfrac{c + 2}{c^2} + \dfrac{3}{c^3}$

20. $\dfrac{6}{3t} + \dfrac{t + 5}{t^3} + \dfrac{1 - 2t^2}{t^4}$

21. $\dfrac{5}{x - 1} + \dfrac{8}{(x - 1)^2} - \dfrac{3}{(x - 1)^3}$

22. $\dfrac{8}{x}+\dfrac{3}{2x-4}+\dfrac{7x}{x^2-4}$

23. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{5}{2x-3}+\dfrac{1}{(2x-3)^2}$

24. $\dfrac{4}{x}+\dfrac{3x^2+5}{x^3}-\dfrac{6}{2x+1}$

25. $\dfrac{p^4+3p^3-8p-24}{p^3-2p^2-9p+18}$

26. $\dfrac{2ac+bc-6ad-3bd}{6ac+2ad+3bc+bd}$

27. $\dfrac{5}{7x-3}-\dfrac{2}{2x+1}+\dfrac{4x}{14x^2+x-3}$

28. $2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{7x}{3x+10}$

29. $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

30. $\dfrac{\frac{1}{x+1}-5}{\frac{1}{x}-x}$

31. $\dfrac{\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}}{\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}}$

32. $\dfrac{\frac{r}{s}+\frac{s}{r}}{\frac{r^2}{s^2}-\frac{s^2}{r^2}}$

33. $\dfrac{\frac{5}{x+1}+\frac{2x}{x+3}}{\frac{x}{x+1}+\frac{7}{x+3}}$

34. $\dfrac{\frac{3}{w}-\frac{6}{2w+1}}{\frac{5}{w}+\frac{8}{2w+1}}$

35. $\dfrac{(x+h)^2-7(x+h)-(x^2-7x)}{h}$

36. $\dfrac{(x+h)^3+4(x+h)-(x^3+4x)}{h}$

37. $\dfrac{\frac{1}{(x+h)^3}-\frac{1}{x^3}}{h}$

38. $\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$

39. $\dfrac{\frac{1}{2x+2h+3}-\frac{1}{2x+3}}{h}$

40. $\dfrac{\frac{7}{5x+5h-2}-\frac{7}{5x-2}}{h}$

41. $(2x^2-3x+1)(4)(3x+2)^3(3)+(3x+2)^4(4x-3)$

42. $(6x-5)^3(2)(x^2+4)(2x)+(x^2+4)^2(3)(6x-5)^2(6)$

43. $(x^2-4)^{1/2}(3)(2x+1)^2(2)+(2x+1)^3(\frac{1}{2})(x^2-4)^{-1/2}(2x)$

44. $(3x+2)^{1/3}(2)(4x-5)(4)+(4x-5)^2(\frac{1}{3})(3x+2)^{-2/3}(3)$

45. $(3x+1)^6(\frac{1}{2})(2x-5)^{-1/2}(2)+(2x-5)^{1/2}(6)(3x+1)^5(3)$

46. $(x^2+9)^4(-\frac{1}{3})(x+6)^{-4/3}+(x+6)^{-1/3}(4)(x^2+9)^3(2x)$

47. $\dfrac{(6x+1)^3(27x^2+2)-(9x^3+2x)(3)(6x+1)^2(6)}{(6x+1)^6}$

48. $\dfrac{(x^2-1)^4(2x)-x^2(4)(x^2-1)^3(2x)}{(x^2-1)^8}$

49. $\dfrac{(x^2+4)^{1/3}(3)-(3x)(\frac{1}{3})(x^2+4)^{-2/3}(2x)}{[(x^2+4)^{1/3}]^2}$

50. $\dfrac{(1-x^2)^{1/2}(2x)-x^2(\frac{1}{2})(1-x^2)^{-1/2}(-2x)}{[(1-x^2)^{1/2}]^2}$

51. $\dfrac{(4x^2+9)^{1/2}(2)-(2x+3)(\frac{1}{2})(4x^2+9)^{-1/2}(8x)}{[(4x^2+9)^{1/2}]^2}$

52. $\dfrac{(3x+2)^{1/2}(\frac{1}{3})(2x+3)^{-2/3}(2)}{[(3x+2)^{1/2}]^2}-\dfrac{(2x+3)^{1/3}(\frac{1}{2})(3x+2)^{-1/2}(3)}{[(3x+2)^{1/2}]^2}$

En los Ejercicios 53 a 58 racionalice los denominadores.

53. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

54. $\dfrac{1}{\sqrt{c}+d}$

55. $\dfrac{\sqrt{t}-4}{\sqrt{t}+4}$

56. $\dfrac{4}{3-\sqrt{w}}$

57. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ (*Sugerencia:* Multiplique el numerador y el denominador por $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}$.)

58. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

En los Ejercicios 59 a 64 racionalice los numeradores.

59. $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{c}$

60. $\dfrac{b-\sqrt{c}}{d}$

61. $\dfrac{\sqrt{2(x+h)+1}-\sqrt{2x+1}}{h}$

62. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$

63. $\dfrac{\sqrt{1-x-h}-\sqrt{1-x}}{h}$

64. $\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$ (*Sugerencia:* Haga la comparación con el Ejercicio 57.)

1.7 Repaso

Defina o explique lo que se señala en cada inciso.

1. Las propiedades conmutativas de los números reales.
2. Las propiedades asociativas.
3. Las propiedades distributivas.
4. Enteros.
5. Número primo.
6. Números racionales e irracionales.
7. Recta coordenada.
8. Un número a es mayor que un número b.
9. Un número a es menor que un número b.
10. El valor absoluto de un número real.
11. La distancia entre dos puntos de una recta coordenada.
12. Exponente.
13. Las leyes de los exponentes.
14. Raíz n-ésima principal.
15. La notación de radical.
16. Racionalización de un denominador.
17. Exponentes racionales.
18. Forma científica para los números reales.
19. Variable.
20. Dominio de una variable.
21. Expresión algebraica.
22. Polinomio.
23. Grado de un polinomio.
24. Polinomio primo.
25. Polinomio irreducible.
26. Notación factorial.
27. El teorema del binomio.
28. Los coeficientes binomiales.
29. El triángulo de Pascal.
30. Expresión racional.

Ejercicios 1.7

1. Formule cada una de las siguientes expresiones como un número racional con el numerador positivo más pequeño posible.

   (a) $(\frac{2}{3})(-\frac{5}{8})$ (b) $\frac{3}{4}+\frac{6}{5}$

   (c) $\frac{5}{8}-\frac{6}{7}$ (d) $\frac{3}{4}\div\frac{6}{5}$

2. Sustituya $\square$ por $<$, $>$, $=$.

   (a) $-0.1 \square -0.01$ (b) $\sqrt{9} \square -3$

   (c) $\frac{1}{6} \square 0.166$

3. Exprese en términos de desigualdades
   (a) x es negativo.
   (b) a está entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.
   (c) El valor absoluto de x no es mayor que 4.

4. Escriba sin hacer uso del símbolo de valor absoluto:

   (a) $|-7|$ (b) $\dfrac{|-5|}{-5}$ (c) $|3^{-1}-2^{-1}|$

5. Si en una recta coordenada los puntos A, B y C

tienen coordenadas -8, 4 y -3, respectivamente, calcule las siguientes distancias:

(a) $d(A, C)$ (b) $d(C, A)$ (c) $d(B, C)$

6. Demuestre si las siguientes expresiones son identidades.

(a) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{x+y}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{c} - \sqrt{d}} = \dfrac{\sqrt{c} + \sqrt{d}}{c - d}$

En los Ejercicios 7 a 32 simplifique las expresiones dadas.

7. $(3a^2b)^2(2ab^3)$

8. $\dfrac{6r^3y^2}{2r^5y}$

9. $\dfrac{(3x^2y^{-3})^{-2}}{x^{-5}y}$

10. $\left(\dfrac{a^{2/3}b^{3/2}}{a^2b}\right)^6$

11. $(-2p^2q)^3(p/4q^2)^2$

12. $c^{-4/3}c^{3/2}c^{1/6}$

13. $\left(\dfrac{xy^{-1}}{\sqrt{z}}\right)^4 \div \left(\dfrac{x^{1/3}y^2}{z}\right)^3$

14. $\left(\dfrac{-64x^3}{z^6y^9}\right)^{2/3}$

15. $((a^{2/3}b^{-2})^3)^{-1}$

16. $\dfrac{(3u^2v^5w^{-4})^3}{(2uv^{-3}w^2)^4}$

17. $\dfrac{r^{-1} + s^{-1}}{(rs)^{-1}}$

18. $(u + v)^3(u + v)^{-2}$

19. $\sqrt[3]{(x^4y^{-1})^6}$

20. $\sqrt[3]{8x^5y^3z^4}$

21. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

22. $\sqrt{\dfrac{a^2b^3}{c}}$

23. $\sqrt[3]{4x^2y}\sqrt[3]{2x^5y^2}$

24. $\sqrt[4]{(-4a^3b^2c)^2}$

25. $\dfrac{1}{\sqrt{t}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}} - 1\right)$

26. $\sqrt{\sqrt[3]{(c^3d^6)^4}}$

27. $\dfrac{\sqrt{12x^4y}}{\sqrt{3x^2y^5}}$

28. $\sqrt[3]{(a + 2b)^3}$

En los Ejercicios 29 y 30 racionalice el denominador.

29. $\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

30. $\dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a - 2}}$

31. Exprese en forma científica:

(a) 93 700 000 000 (b) 0.00000402

32. Exprese en forma decimal:

(a) 6.8×10^7 (b) 7.3×10^{-4}

33. El cuerpo de una persona promedio contiene 5.5 litros de sangre y alrededor de 5 millones de glóbulos rojos por milímetro cúbico de sangre. Recordando que 1 litro = 10^6 mm^3, estime el número de glóbulos rojos en el sistema circulatorio de una persona promedio. Exprese su respuesta en la forma científica.

34. Un corazón saludable late de 70 a 90 veces por minuto. Si un individuo vive hasta una edad de 80 años, estime el número de latidos en toda su vida. Exprese su respuesta en la forma científica.

En los Ejercicios 35 a 42, efectúe las operaciones indicadas.

35. $(3x^3 - 4x^2 + x - 7) + (x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5)$

36. $(4z^4 - 3z^2 + 1) - z(z^3 + 4z^2 - 4)$

37. $(x + 4)(x + 3) - (2x - 1)(x - 5)$

38. $(4x - 5)(2x^2 + 3x - 7)$

39. $(3y^3 - 2y^2 + y + 4)(y^2 - 3)$

40. $(3x + 2)(x - 5)(5x + 4)$

41. $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

42. $\dfrac{9p^4q^3 - 6p^2q^4 + 5p^3q^2}{3p^2q^2}$

En los Ejercicios 43 a 50, determine los productos.

43. $(3a - 5b)(2a + 7b)$

44. $(4r^2 - 3s)^2$

45. $(13a^2 + 4b)(13a^2 - 4b)$

46. $(a^3 - a^{-3})^2$

47. $(2a + b)^3$

48. $(c^2 - d^2)^3$

49. $(3x + 2y)^2(3x - 2y)^2$

50. $(a + b + c + d)^2$

En los Ejercicios 51 a 62, factorice las expresiones dadas.

51. $60xw + 70w$

52. $2r^4s^3 - 8r^2s^5$

53. $28x^2 + 4x - 9$

54. $16a^4 + 24a^2b^2 + 9b^4$

55. $2wy + 3yx - 8wz - 12zx$

56. $2c^3 - 12c^2 + 3c - 18$

57. $8x^3 + 64y^3$

58. $u^3v^4 - u^6v$

59. $p^8 - q^8$

60. $x^4 - 8x^3 + 16x^2$

61. $w^6 + 1$ **62.** $3x + 6$

63. Desarrolle y simplifique $(x^2 - 3y)^6$.

64. Encuentre los primeros cuatro términos del desarrollo binomial de $(a^{2/5} + 2a^{-3/5})^{20}$.

65. Encuentre el sexto término del desarrollo de $(b^3 - \frac{1}{2}c^2)^9$.

66. En el desarrollo de $(2c^3 + 5c^{-2})^{10}$ halle el término que no contiene a c.

En los Ejercicios 67 a 76, simplifique las expresiones dadas.

67. $\dfrac{6x^2 - 7x - 5}{4x^2 + 4x + 1}$

68. $\dfrac{r^3 - t^3}{r^2 - t^2}$

69. $\dfrac{6x^2 - 5x - 6}{x^2 - 4} \div \dfrac{2x^2 - 3x}{x + 2}$

70. $\dfrac{2}{4x - 5} - \dfrac{5}{10x + 1}$

71. $\dfrac{7}{x + 2} + \dfrac{3x}{(x + 2)^2} - \dfrac{5}{x}$

72. $\dfrac{x + x^{-2}}{1 + x^{-2}}$

73. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2 + x} - \dfrac{3}{x + 3}$

74. $(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$

75. $(x^2 + 1)^{3/2}(4)(x + 5)^3 + (x + 5)^4(\frac{3}{2})(x^2 + 1)^{1/2}(2x)$

76. $\dfrac{(4 - x^2)(\frac{1}{3})(6x + 1)^{-2/3}(6) - (6x + 1)^{1/3}(-2x)}{(4 - x^2)^2}$

CAPÍTULO 2

Ecuaciones y desigualdades

Durante cientos de años el álgebra se ha ocupado principalmente de la solución de ecuaciones. ■ Recientemente, el estudio de las desigualdades ha alcanzado el mismo nivel de importancia. ■ Estos dos temas se usan ampliamente en las aplicaciones de las matemáticas. ■ En este capítulo trataremos lo esencial de la resolución de ecuaciones y desigualdades.

2.1 Ecuaciones lineales

Si x es una variable, expresiones como

$$x + 3 = 0, \quad x^2 - 5 = 4x, \quad \text{o bien} \quad (x^2 - 9)\sqrt[3]{x + 1} = 0$$

se denominan **ecuaciones** en x. Dada cualquier ecuación en x, si al sustituir a x con un número a se obtiene un enunciado verdadero, entonces a se denomina **solución** o **raíz** de la ecuación. También decimos que a **satisface** la ecuación. Por ejemplo, 5 es una solución de la ecuación $x^2 - 5 = 4x$ ya que al sustituirlo obtenemos

$$(5)^2 - 5 = 4(5), \quad \text{o sea} \quad 20 = 20,$$

que es una proposición verdadera. Resolver una ecuación significa hallar todas sus soluciones.

Si todo número del dominio de la variable es una solución de una ecuación, a la ecuación se le llama **identidad**. Por ejemplo,

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x + 2)(x - 2)},$$

es una identidad porque es verdadera para todos los números del dominio de x. Si existen números en el dominio de x que *no* son soluciones, a la ecuación se le llama **ecuación condicional**.

Las soluciones de una ecuación dependen del sistema de números que se considere. Por ejemplo, si pedimos que las soluciones sean números racionales, entonces la ecuación $x^2 = 2$ no tiene soluciones, ya que no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2. Sin embargo, si aceptamos números *reales*, entonces las soluciones son $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$. De igual manera, la ecuación $x^2 = -1$ no tiene soluciones reales pero, como veremos posteriormente, tiene soluciones si se aceptan números *complejos*.

Se dice que dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones. Por ejemplo, las ecuaciones

$$x = 3, \quad x - 1 = 2, \quad 5x = 15, \quad \text{y} \quad 2x + 1 = 7$$

son equivalentes.

Un método para resolver una ecuación es remplazarla por una serie de ecuaciones equivalentes, cada una de algún modo más sencilla que la que la precede y terminar en una ecuación para la cual las soluciones son obvias. A menudo esto se logra usando diversas propiedades de los números reales. Por ejemplo, podemos sumar la misma expresión a ambos lados de una ecuación sin cambiar las soluciones. De manera similar, podemos restar la misma expresión de ambos lados de una ecuación. Podemos también multiplicar o dividir ambos lados de una ecuación por una expresión que represente un número real diferente de cero. El siguiente ejemplo ilustra lo anterior.

EJEMPLO 1 Resolver la ecuación $6x - 7 = 2x + 5$.

SOLUCIÓN Las ecuaciones de la siguiente lista son equivalentes.

$$6x - 7 = 2x + 5$$
$$(6x - 7) + 7 = (2x + 5) + 7$$
$$6x = 2x + 12$$
$$6x - 2x = (2x + 12) - 2x$$
$$4x = 12$$
$$\tfrac{1}{4}(4x) = \tfrac{1}{4}(12)$$
$$x = 3$$

Como la última tiene exactamente una solución, 3, entonces 3 es la única solución de la ecuación original $6x - 7 = 2x + 5$. ■

En el proceso de búsqueda de soluciones de ecuaciones se pueden introducir errores debidos a manipulaciones incorrectas o a equivocaciones en la aritmética. Por ello es conveniente revisar los resultados por sustitución en la ecuación original. Para verificar el resultado del Ejemplo 1, se sustituye x por 3 en la ecuación $6x - 7 = 2x + 5$ y así

$$6(3) - 7 = 2(3) + 5$$
$$18 - 7 = 6 + 5$$
$$11 = 11,$$

que es una proposición verdadera.

Algunas veces decimos que una ecuación como la que se da en el Ejemplo 1 *tiene la solución* $x = 3$, en el sentido de que la sustitución de x por 3 produce un enunciado verdadero. Como otra ilustración, decimos que la ecuación $x^2 = 4$ tiene las soluciones $x = 2$ y $x = -2$.

Si, por descuido, multiplicamos ambos lados de una ecuación por una expresión que es igual a cero para algún valor de x, entonces no siempre se obtiene una ecuación equivalente. El siguiente ejemplo ilustra cómo puede suceder esto.

EJEMPLO 2 Resolver la ecuación

$$\frac{3x}{x-2} = 1 + \frac{6}{x-2}.$$

SOLUCIÓN La multiplicación de ambos lados por $x - 2$ y la simplificación conducen a

$$\left(\frac{3x}{x-2}\right)(x-2) = (1)(x-2) + \left(\frac{6}{x-2}\right)(x-2)$$
$$3x = (x-2) + 6$$
$$3x = x + 4$$
$$2x = 4$$
$$x = 2.$$

Verifiquemos para ver si 2 es una solución de la ecuación dada. Al sustituir x por 2 obtenemos

$$\frac{3(2)}{2-2} = 1 + \frac{6}{2-2}, \quad \text{o bien} \quad \frac{6}{0} = 1 + \frac{6}{0}.$$

Como la división entre 0 no es permisible, 2 no es una solución. En realidad, la ecuación dada no tiene soluciones, porque se ha mostrado que si la ecuación es verdadera para algún valor de x, ese valor debe ser 2. Sin embargo, como hemos visto, 2 no es una solución. ■

El ejemplo anterior indica que *es esencial verificar las respuestas obtenidas cuando se multiplican ambos lados de una ecuación por una expresión que contiene variables.*

En esta sección limitaremos nuestros esfuerzos a ecuaciones que son equivalentes a ecuaciones de la forma

$$ax + b = 0$$

en donde a y b son números reales y $a \neq 0$. A una ecuación de este tipo se le llama **ecuación lineal** en x. Para resolver la ecuación primero sumamos $-b$ a ambos lados y después se multiplica por $1/a$ como sigue:

$$ax + b = 0$$
$$ax = -b$$
$$x = \frac{-b}{a}$$

Esto demuestra que si la ecuación lineal $ax + b = 0$ tiene solución, ésta debe ser $-b/a$.

En la Sección 2.3 consideraremos algunas ecuaciones que tienen más de una solución.

EJEMPLO 3 Resolver $(8x - 2)(3x + 4) = (4x + 3)(6x - 1)$.

SOLUCIÓN Las ecuaciones siguientes son equivalentes:

$$(8x - 2)(3x + 4) = (4x + 3)(6x - 1)$$
$$24x^2 + 26x - 8 = 24x^2 + 14x - 3$$
$$26x - 8 = 14x - 3$$
$$26x - 14x = -3 + 8$$
$$12x = 5$$
$$x = \frac{5}{12}$$

Entonces la solución de la ecuación dada es $\frac{5}{12}$. ■

EJEMPLO 4 Resolver

$$\frac{3}{2x-4} - \frac{5}{x+3} = \frac{2}{x-2}.$$

SOLUCIÓN Si escribimos la ecuación como

$$\frac{3}{2(x-2)} - \frac{5}{x+3} = \frac{2}{x-2},$$

vemos que el MCDn de las tres fracciones es $2(x-2)(x+3)$. Al multiplicar ambos lados por este valor llegamos a

$$\frac{3}{2(x-2)}2(x-2)(x+3) - \frac{5}{x+3}2(x-2)(x+3) = \frac{2}{x-2}2(x-2)(x+3),$$

que se reduce a

$$3(x+3) - 10(x-2) = 4(x+3).$$

Al simplificar obtenemos

$$3x + 9 - 10x + 20 = 4x + 12$$
$$3x - 10x - 4x = 12 - 9 - 20$$
$$-11x = -17$$
$$x = \tfrac{17}{11}.$$

Debido a que hemos multiplicado por una expresión que contiene x, debemos verificar el resultado en la ecuación dada. Al sustituir por x tenemos

$$\frac{3}{2(\frac{17}{11}) - 4} - \frac{5}{\frac{17}{11} + 3} = \frac{2}{\frac{17}{11} - 2}.$$

Puede demostrarse que esto se reduce a $-\frac{22}{5} = -\frac{22}{5}$. Por lo anterior, la ecuación dada tiene la solución $\frac{17}{11}$. ■

A veces hay dificultades para determinar si una ecuación es condicional o es una identidad. A menudo se indica que hay una identidad cuando se obtiene una ecuación de la forma $p = p$, en donde p es alguna expresión. Para ilustrar esto, si multiplicamos ambos lados de la ecuación

$$\frac{x}{x^2 - 4} = \frac{x}{(x+2)(x-2)}$$

por $x^2 - 4$, obtenemos $x = x$. Esto indica que puede tratarse de una identidad; sin embargo, no hemos demostrado nada. Un método estándar, para verificar que una ecuación es una identidad, es utilizar las propiedades de los números reales para demostrar que la expresión que aparece en un lado de la ecuación dada, puede transformarse en la expresión que aparece en el otro lado de la ecuación. Esto se hace fácilmente en la ilustración anterior, ya que sabemos que $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$. Por supuesto, para demostrar que una ecuación no es una identidad sólo necesitamos encontrar un número real, en el dominio de la variable, que no satisface la ecuación original.

Ejercicios 2.1

Resuelva las ecuaciones de los Ejercicios 1 a 38.

1. $4x + 7 = 0$

2. $3x + 16 = 0$

3. $\sqrt{2}x - 5 = 0$

4. $\sqrt{3}x - 2 = 0$

5. $5x + 3 = 7x - 2$

6. $8x - 5 = 6x + 4$

7. $3(7y - 2) = 2(4y + 1)$

8. $2(9z + 2) - 5(z - 8) = 0$

9. $\frac{2}{3}t + 4 = 2 - \frac{5}{2}t$

10. $\frac{3}{4}u - 1 = 2 + \frac{1}{5}u$

11. $0.2(4 - 3x) + 0.3x = 2.6$

12. $0.7x - 1.2 = 0.3(2x - 1)$

13. $\dfrac{12 - 7w}{6} = \dfrac{2w + 1}{9}$

14. $\dfrac{3r + 2}{8} = 1 - \dfrac{r}{12}$

15. $\dfrac{18 - 5p}{3p + 2} = \dfrac{7}{3}$

16. $\dfrac{6}{5v - 2} = \dfrac{9}{7v + 3}$

17. $4 - \dfrac{3}{x} = 6 - \dfrac{5}{x}$

18. $\dfrac{5}{q} + \dfrac{2}{q} - \dfrac{10}{q} = 12$

19. $(6x - 5)^2 = (4x + 3)(9x - 2)$

20. $(x - 7)^2 - 4 = (x + 1)^2$

21. $(4x - 3)(2x + 3) - 8x(x - 4) = 0$

22. $(2x + 3)(3x - 2) = 6x^2 + 1$

23. $\dfrac{6s + 7}{4s - 1} = \dfrac{3s + 8}{2s - 4}$

24. $\dfrac{8t + 5}{10t - 7} = \dfrac{4t - 3}{5t + 7}$

25. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{6x + 3} = \dfrac{3}{2x + 1}$

26. $\dfrac{-3}{4x - 2} + \dfrac{2}{2x - 1} = \dfrac{7}{2}$

27. $\dfrac{5}{4a - 2} - \dfrac{1}{6a - 3} = \dfrac{4}{5}$

28. $\dfrac{8}{3b + 6} - \dfrac{1}{2b + 4} = \dfrac{3}{4}$

29. $\dfrac{1}{2x - 1} = \dfrac{3}{4x - 2}$

30. $\dfrac{6}{2x + 11} + 5 = 5$

31. $2 - \dfrac{5}{3x - 7} = 2$

32. $\dfrac{4}{5x + 2} - \dfrac{7}{15x + 6} = 0$

33. $\dfrac{7}{y^2 - 4} - \dfrac{4}{y + 2} = \dfrac{5}{y - 2}$

34. $\dfrac{4}{2u - 3} + \dfrac{10}{4u^2 - 9} = \dfrac{1}{2u + 3}$

35. $(x + 3)^3 - (3x - 1)^2 = x^3 + 4$

36. $(x - 1)^3 = (x + 1)^3 - 6x^2$

37. $\dfrac{9x}{3x - 1} = 2 + \dfrac{3}{3x - 1}$

38. $\dfrac{2x}{2x + 3} + \dfrac{6}{4x + 6} = 5$

Demuestre que las ecuaciones de los Ejercicios 39 a 44 son identidades.

39. $(3x + 1)^2 - 9x^2 = 6x + 1$

40. $(4x - 5)(3x + 2) + 7x = 12x^2 - 10$

41. $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$

42. $\dfrac{3x - 2}{x} = 3 - \dfrac{2}{x}$

43. $\dfrac{5x^2 + 2}{x} = \dfrac{2}{x} + 5x$

44. $\dfrac{9x^2 - 16}{3x + 4} = 3x - 4$

45. ¿Cuál debe ser el valor de c para que una solución de la ecuación $3x + 1 - 5c = 2c + x - 10$ sea -3?

46. ¿Cuál debe ser el valor de b para que una solución de la ecuación $4x + 3b = 7$ sea 8?

47. Encuentre valores para a y b tales que $\frac{5}{3}$ es una solución de la ecuación $ax + b = 0$. ¿Son éstos los únicos valores posibles de a y b? Explique.

48. Determine si las ecuaciones dadas en cada inciso son equivalentes.

(a) $x^2 = 4,\ x = 2$ (b) $x = \sqrt{4},\ x =$

(c) $2x = 4,\ x = 2$

49. (a) Encuentre una ecuación en la siguiente lista que no es equivalente a la ecuación que le precede.

$x^2 - x - 2 = x^2 - 4$

$$(x + 1)(x - 2) = (x + 2)(x - 2)$$
$$x + 1 = x + 2$$
$$1 = 2$$

(b) Encuentre las soluciones de la primera ecuación del inciso (a).

50. Halle una ecuación en la siguiente serie que no es equivalente a la ecuación que la precede.

$$x + 3 = 0$$
$$5x - 4x = -3$$
$$5x + 6 = 4x + 3$$
$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 4x + 3$$
$$(x + 3)(x + 1) = (x + 2)(x + 3)$$
$$x + 1 = x + 2$$
$$0 = 1$$

2.2 Aplicaciones

En todos los campos que tienen que ver con números, se usan fórmulas o ecuaciones con variables. En ciertas aplicaciones es necesario encontrar la solución para una variable particular, en términos de las variables restantes que aparecen en la fórmula, como se ilustra en los siguientes tres ejemplos.

EJEMPLO 1 Si se invierte una cantidad de dinero P a una tasa de interés simple de r por ciento anual, el interés I al final de t años está dado por $I = Prt$. Resolver la ecuación despejando r en términos de las otras variables.

SOLUCIÓN Empezamos por escribir

$$Prt = I.$$

Para despejar r, multiplicamos ambos lados por $1/Pt$ y obtenemos

$$\left(\frac{1}{Pt}\right)Prt = \left(\frac{1}{Pt}\right)I.$$

De donde $$r = \frac{I}{Pt}.$$ ■

EJEMPLO 2 La relación entre la temperatura F en la escala Fahrenheit y la temperatura C en la escala Celsius está dada por

$$C = \tfrac{5}{9}(F - 32).$$

Despejar F en términos de C.

SOLUCIÓN Podemos proceder como se ve a continuación:

$$C = \tfrac{5}{9}(F - 32)$$

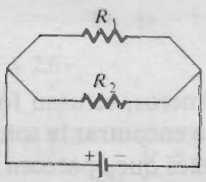
$$\tfrac{9}{5}C = F - 32$$

$$\tfrac{9}{5}C + 32 = F$$

$$F = \tfrac{9}{5}C + 32$$ ■

EJEMPLO 3 La fórmula $R = R_1R_2/(R_1 + R_2)$ se usa en la teoría de la electricidad para encontrar la resistencia total R, cuando dos resistencias R_1 y R_2 están conectadas en paralelo, como se ilustra en la Figura 2.1. Despejar R_1 en términos de R y R_2.

FIGURA 2.1



SOLUCIÓN Las ecuaciones siguientes son equivalentes a la ecuación dada.

$$R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

$$(R_1 + R_2)R = (R_1 + R_2)\left(\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}\right)$$

$$R_1R + R_2R = R_1R_2$$

$$R_1R = R_1R_2 - R_2R$$

$$R_1R - R_1R_2 = -R_2R$$

$$R_1(R - R_2) = -R_2R$$

$$R_1 = \frac{-R_2R}{R - R_2}$$

Una forma alternativa es $$R_1 = \frac{R_2R}{R_2 - R}.$$ ■

En la vida diaria, a menudo ocurren problemas que se pueden resolver mediante ecuaciones u otros medios matemáticos. Algunos problemas se plantean verbalmente, de una persona a otra. Otros se enuncian por escrito, como en libros de texto. Por esa razón, los estudiantes y profesores de matemáticas los llaman a menudo "problemas verbales". También se refieren a ellos como "problemas prácticos". Usaremos el término "problema aplicado" para cualquier problema que se refiera a una aplicación de matemáticas en algún otro campo.

Debido a la ilimitada variedad de problemas aplicados, es difícil establecer reglas específicas para encontrar soluciones. Sin embargo, es posible desarrollar una estrategia general para resolver dichos problemas. A continuación se dan algunas guías que pueden ser útiles cuando se puede formular el problema en términos de una ecuación en una variable.

Pasos a seguir para resolver problemas aplicados

1. Si el problema se enuncia por escrito, léalo cuidadosamente varias veces y piense en los datos que se dan, junto con la cantidad desconocida que se debe encontrar.
2. Denote la cantidad desconocida mediante una letra. ¡Éste es uno de los pasos cruciales en la solución! Las frases que contienen palabras como "qué", "encuentre", "cuánto", "a qué distancia" o "cuándo", nos indican la cantidad desconocida.
3. Si es posible, trace un croquis con las anotaciones apropiadas.
4. Haga una lista de los datos conocidos, junto con todas las relaciones que contienen la cantidad desconocida. A veces se pueden describir relaciones por medio de una ecuación en la que aparecen enunciados escritos, en vez de letras o números, en uno o en ambos lados del signo igual.
5. Después de analizar la lista del paso 4 y tal vez leyendo el problema varias veces, formule una ecuación que describa precisamente lo enunciado en palabras.
6. Resuelva la ecuación formulada en el paso 5.
7. Verifique las soluciones obtenidas en el paso 6 refiriéndolas al enunciado original del problema. Observe cuidadosamente si la solución concuerda con las condiciones dadas.
8. No se desanime si no puede resolver un problema dado. Se requiere mucho esfuerzo y práctica para adquirir habilidad para resolver problemas aplicados. ¡Siga intentando! ■ ■ ■

EJEMPLO 4 Las calificaciones de un estudiante son 64 y 78. ¿Cuánto debe obtener en un tercer examen para tener un promedio de 80?

SOLUCIÓN Sigamos los pasos anteriores a este ejemplo. Si leemos el problema con cuidado, como sugiere el paso 1, notamos que la cantidad desconocida es la calificación del tercer examen. De acuerdo con el paso 2, utilizamos una letra y escribimos:

$$x = \text{calificación del tercer examen.}$$

En este problema no es apropiado trazar un croquis como se menciona en el paso 3, así que pasamos al punto 4 y buscamos una relación que contenga x. Como el promedio se obtiene al sumar los tres valores y dividiendo por 3, podemos escribir

$$\frac{64 + 78 + x}{3} = \text{promedio de las tres calificaciones 64, 78 y } x.$$

Del enunciado del problema tenemos que

$$80 = \text{promedio deseado.}$$

En consecuencia, x debe satisfacer la ecuación

$$\frac{64 + 78 + x}{3} = 80.$$

A esta última ecuación es a la que se refiere el paso 5. A continuación, resolvemos la ecuación (paso 6) como sigue:

$$64 + 78 + x = 240$$
$$142 + x = 240$$
$$x = 240 - 142$$
$$x = 98.$$

El paso 7 nos lleva a la verificación, volviendo al enunciado original. Si las calificaciones de tres exámenes son 64, 78 y 98, el promedio es

$$\frac{64 + 78 + 98}{3} = \frac{240}{3} = 80.$$

Entonces, una calificación de 98 en el tercer examen dará al estudiante un promedio de 80. Felizmente, podemos ignorar el paso 8. ■

En el resto de los ejemplos no señalaremos explícitamente los pasos utilizados para la solución. El lector debe poder determinarlas por sí solo.

EJEMPLO 5 Una tienda que está liquidando su mercancía anuncia que todos los precios fueron rebajados 20%. Si el precio de un artículo es \$28, ¿cuál era su precio antes de la liquidación?

SOLUCIÓN Empezamos por observar que la cantidad que se desconoce es el precio anterior. Es conveniente organizar nuestro trabajo de la manera siguiente y notar que las cantidades se expresan en dólares.

$$x = \text{precio anterior}$$
$$0.20x = \text{descuento}$$
$$28 = \text{precio actual de venta}$$

El precio actual de venta se determina como sigue:

$$(\text{precio anterior}) - (\text{descuento}) = (\text{precio actual de venta}).$$

Esto nos lleva a la ecuación

$$x - 0.20x = 28,$$

que resolvemos a continuación:

$$0.8x = 28$$
$$x = \frac{28}{0.8} = 35.$$

Por lo tanto, el precio anterior a la liquidación era de $35.

Para comprobar esta respuesta anotamos que si un artículo de $35 tiene un descuento de 20%, entonces el descuento (en dólares) es (0.20)(35) = 7, y el precio de venta es de 35 − 7, o $28. ■

EJEMPLO 6 Una persona desea invertir $15 000. Piensa depositar una parte en una cuenta de ahorros que produce 5% de interés simple y el resto en un fondo de inversión que produce el 8% de interés simple. ¿De qué cantidad debe ser cada inversión para obtener una ganancia del 7% después de un año?

SOLUCIÓN En el Ejemplo 1 se dio la fórmula de interés simple $I = Prt$. En el ejemplo presente $t = 1$ y por tanto el interés se obtiene mediante $I = Pr$. Si x denota la cantidad depositada en la cuenta de ahorros, entonces la cantidad restante $15\,000 - x$ se pondrá en el fondo de inversión. Esto lleva a las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} x &= \text{cantidad invertida al 5\%} \\ 15\,000 - x &= \text{cantidad invertida al 8\%} \\ 0.05x &= \text{interés de } x \text{ dólares al 5\%} \\ 0.08(15\,000 - x) &= \text{interés de } 15\,000 - x \text{ dólares al 8\%} \\ 0.07(15\,000) &= \text{interés total deseado.} \end{aligned}$$

Como el interés total debe ser igual al interés combinado de las dos inversiones, vemos que

$$\begin{aligned} 0.05x + 0.08(15\,000 - x) &= 0.07(15\,000) \\ 0.05x + 1\,200 - 0.08x &= 1\,050 \\ -0.03x &= -150 \\ x &= \frac{-150}{-0.03} = 5000. \end{aligned}$$

En consecuencia, deben depositarse $5 000 en la cuenta de ahorros y $10 000 en el fondo de inversión.

Al verificar, vemos que si se colocan $5 000 en la cuenta de ahorros, el interés que se obtiene es (0.05)($5 000) = $250. Si se depositan $10 000 en el fondo de inversión, entonces el interés es de (0.08)($10 000) = $800. Por lo tanto, el interés total es $1 050, que es el 7% de $15 000. ■

Un tipo importante de problema que se puede resolver usando ecuaciones lineales es el de la mezcla de dos sustancias para obtener una solución dada. En esos problemas un croquis puede facilitar la resolución, como se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

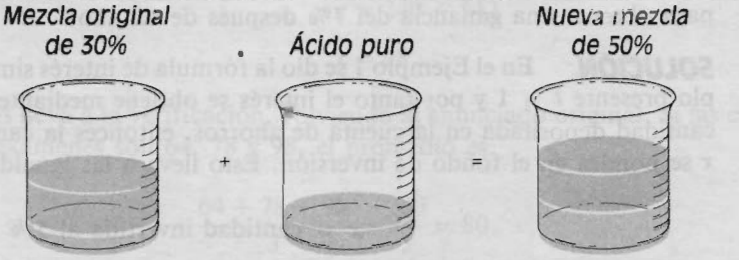
EJEMPLO 7 Un químico tiene 10 ml de una solución que contiene 30% de concentración de ácido. ¿Cuántos mililitros de ácido puro deben agregarse para aumentar la concentración a 50%?

SOLUCIÓN Como deseamos determinar la cantidad de ácido puro que vamos a añadir, hacemos

x = cantidad de ml de ácido que se van a añadir.

La Figura 2.2 se explica por sí sola.

FIGURA 2.2



Esto lleva a la ecuación

$$3 + x = 0.5(10 + x)$$

o en forma equivalente

$$3 + x = 5 + 0.5x$$

$$0.5x = 2$$

$$x = \frac{2}{0.5} = 4.$$

Entonces, deben añadirse 4 ml de ácido a la solución original.

Para verificar, observamos que si se agregan 4 ml de ácido a la solución dada, la nueva solución tendrá 14 ml, 7 de los cuales son de ácido. Esto da la concentración deseada de 50%. ■

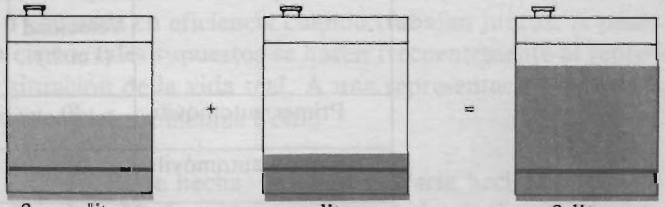
EJEMPLO 8 Un radiador contiene 8 litros de una mezcla de agua y anticongelante. Si 40% de la mezcla es anticongelante, ¿qué cantidad de mezcla debe eliminarse y remplazarse por anticongelante puro para que la mezcla resultante contenga 60% de anticongelante?

SOLUCIÓN Sea

x = número de litros de mezcla que se van a eliminar.

La mezcla original de 40% es de 8 litros, entonces podemos representar el problema como se muestra en la Figura 2.3.

FIGURA 2.3



Cantidad total:	$8 - x$ litros	x litros	8 litros
Cantidad de anticongelante:	$0.4\,(8 - x)$ litros	x litros	$0.6\,(8)$ litros

Esto lleva a la ecuación

$$0.4(8 - x) + x = 0.6(8)$$

o en forma equivalente

$$3.2 - 0.4x + x = 4.8$$

$$-0.4x + x = 4.8 - 3.2$$

$$0.6x = 1.6$$

$$x = \frac{1.6}{0.6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$$

Entonces, se deben eliminar $\frac{8}{3}$ de litro de la mezcla original.

Para verificar, observamos que la cantidad de anticongelante en la mezcla original de 8 litros era 0.4(8), o sea 3.2 litros. Al eliminar $\frac{8}{3}$ litros de la mezcla original de 40%, perdemos $0.4(\frac{8}{3})$ litros de anticongelante y por lo tanto quedan $(3.2) - 0.4(\frac{8}{3})$ litros de anticongelante. Si luego se añade $\frac{8}{3}$ litros de anticongelante puro, la cantidad de anticongelante en la mezcla final es $(3.2) - 0.4(\frac{8}{3}) + \frac{8}{3}$ litros. Esto es 4.8, que es el 60% de 8. ■

Muchos problemas aplicados tienen que ver con objetos que se mueven a una velocidad constante o uniforme. Si un objeto viaja a una velocidad uniforme (o promedio) r, entonces la distancia d recorrida en el tiempo t está dada por $d = rt$. Por supuesto, suponemos que se escogen las unidades apropiadas; esto es, si r está en metros por segundo, entonces t son segundos y así sucesivamente.

EJEMPLO 9 Dos ciudades, A y B, están conectadas por medio de una carretera de 150 km (kilómetros). Un automóvil sale de A a la 1:00 P.M. y viaja a una velocidad uniforme de 40 km/h hacia B. Treinta minutos más tarde, otro automóvil sale de A y viaja hacia B a una velocidad uniforme de 55 km/h. ¿A qué hora alcanza el segundo automóvil al primero?

SOLUCIÓN Sea t el número de horas, después de la 1:00 P.M., que le toma al segundo automóvil alcanzar al primero. Como el segundo automóvil parte de A a la 1:30 P.M., ha viajado $\frac{1}{2}$ hora menos que el primero. Esto conduce a elaborar la siguiente tabla:

	Velocidad (km/h)	Tiempo de recorrido (horas)	Recorrido (km)
Primer automóvil:	40	t	$40t$
Segundo automóvil:	55	$t - \frac{1}{2}$	$55(t - \frac{1}{2})$

En el tiempo t el número de kilómetros que los dos automóviles han viajado es igual, es decir,

$$55\left(t - \frac{1}{2}\right) = 40t.$$

Si ahora se despeja t:

$$55t - \frac{55}{2} = 40t$$

$$15t = \frac{55}{2}$$

$$t = \frac{55}{30} = \frac{11}{6}.$$

En consecuencia, $t = 1\frac{5}{6}$ horas, o lo que es igual, 1 hora y 50 minutos. Como esto es el tiempo después de la 1:00 P.M., se deduce que el segundo automóvil alcanza al primero a las 2:50 P.M..

Para verificar la respuesta, notamos que a las 2:50 P.M. el primer automóvil ha viajado durante $1\frac{5}{6}$ horas y su distancia de A es $40(\frac{11}{6}) = \frac{220}{3}$ kilómetros. A las 2:50 P.M., el segundo automóvil ha viajado durante $1\frac{1}{3}$ horas y está a $55(\frac{4}{3}) = \frac{220}{3}$ kilómetros de A. Por lo tanto se encuentran a las 2:50 P.M. ■

EJEMPLO 10 Tomás puede hacer cierto trabajo en 3 horas, mientras que Roberto puede hacer el mismo en 4 horas. Si trabajan juntos, ¿cuánto tiempo les lleva hacer el trabajo?

SOLUCIÓN Sea

t = número de horas para hacer el trabajo juntos.

Es conveniente expresar la *parte* del trabajo realizado en una hora como sigue:

$\frac{1}{3}$ = parte del trabajo hecho por Tomás en una hora

$\frac{1}{4}$ = parte del trabajo efectuado por Roberto en una hora

$\frac{1}{t}$ = parte del trabajo hecho por ambos en una hora.

Suponemos que tanto Tomás como Roberto trabajan a un ritmo constante hasta terminar y que no hay pérdida o ganancia en eficiencia cuando trabajan juntos. A pesar de que probablemente no sea cierto, tales supuestos se hacen frecuentemente al representar matemáticamente una situación de la vida real. A una representación de este tipo se le llama **modelo matemático** del problema. Como

$$\left(\begin{array}{c}\text{Parte hecha}\\ \text{por Tomás en}\\ \text{una hora}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{Parte hecha}\\ \text{por Roberto en}\\ \text{una hora}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{Parte hecha}\\ \text{trabajando juntos}\\ \text{en una hora}\end{array}\right)$$

obtenemos $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{t}$, o bien $\frac{7}{12}=\frac{1}{t}$.

Despejando t,

$$7t = 12, \quad \text{o bien} \quad t = \frac{12}{7}.$$

Entonces, trabajando juntos, Tomás o Roberto pueden hacer el trabajo en 1 hora y $\frac{5}{7}$, o sea aproximadamente 1 hora y 43 minutos. ■

Ejercicios 2.2

Las fórmulas de los Ejercicios 1 a 24 se presentan en la teoría y las aplicaciones de las matemáticas. Resuelva cada fórmula para evaluar la variable indicada, en términos de las variables restantes.

1. $I = Prt$ para P
2. $d = rt$ para t
3. $A = \frac{1}{2}bh$ para h
4. $C = 2\pi r$ para r
5. $P = 2l + 2w$ para w
6. $A = P + Prt$ para r
7. $ax + by + cz = d$ para z
8. $ax + by + c = 0$ para y
9. $R = \frac{E}{I}$ para I
10. $K = \frac{mv^2}{2g}$ para g
11. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ para h
12. $F = g\frac{m_1 m_2}{d^2}$ para m_1
13. $S = \frac{a}{1-r}$ para r
14. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para x_1
15. $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ para R_2
16. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ para y
17. $S = P + Prt$ para P
18. $F = \frac{9}{5}C + 32$ para C
19. $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$ para r

20. $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ para v_0

21. $S = \dfrac{a - rl}{l - r}$ para r

22. $S = a + (n - 1)d$ para n

23. $A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$ para b_1

24. $A = 2\pi r(r + h)$ para h

25. Las calificaciones de un estudiante de un curso de álgebra son 75, 82, 71 y 84. ¿Qué calificación en el siguiente examen aumentará el promedio del estudiante a 80?

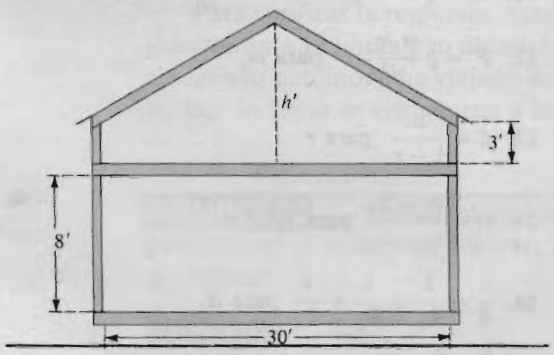
26. Al llegar al examen final, un estudiante tiene calificaciones de 72, 80, 65, 78 y 60. Si el examen final cuenta como $\frac{1}{3}$ de la calificación final, ¿cuánto debe obtener de calificación el estudiante para terminar con un promedio de 76?

27. La relación entre la temperatura F en la escala Fahrenheit y la temperatura C en la escala de Celsius está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

Encuentre la temperatura a la que se lee el mismo valor en ambas escalas.

28. En la figura se muestra la sección transversal de una casa de dos pisos para la que la altura central del segundo piso, h, todavía no ha sido determinada. Encontrar h tal que el área transversal del segundo piso sea la misma que la del primero.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 28



29. El crecimiento prenatal de un feto mayor de 12 semanas se puede aproximar mediante la fórmula $L = 1.53t - 6.7$, en la que L es la longitud en centímetros y t es la edad en semanas. La longitud antes del nacimiento puede encontrarse mediante rayos X. Estime la edad de un feto cuya longitud es de 28 cm.

30. Basándose en los récords olímpicos para el lanzamiento de disco, la distancia ganadora se puede aproximar mediante $d = 175 + 1.75t$, en la que d está en pies y $t = 0$ corresponde al año de 1948.
(a) Estime la distancia ganadora para los Juegos Olímpicos de 1988 que tuvieron lugar en Seúl, Corea.
(b) Estime el año en que el lanzamiento ganador será de aproximadamente 260 pie.

31. Una mujer de negocios desea invertir \$30 000 en dos fondos diferentes que producen ganancias anuales del 13% y $15\frac{1}{2}$%, respectivamente. ¿Cuánto debe invertir en cada fondo para obtener una ganancia de \$4 350 después de un año?

32. Un estudiante universitario tiene \$3 000 en dos cuentas de ahorro diferentes que producen un interés simple del $5\frac{1}{2}$% y 6%, respectivamente. Si el interés total anual es \$174.10, ¿cuánto tiene depositado en cada cuenta?

33. Un joven se encuentra a 224 m de otro cuando ambos empiezan a caminar, uno en dirección del otro. Si caminan a una velocidad de 1.5 y 2 metros por segundo, respectivamente, ¿en cuánto tiempo se encuentran? ¿Qué distancia ha caminado cada uno?

34. Un corredor empieza a correr en cierto lugar, a una velocidad constante de 6 millas por hora. Cinco minutos más tarde, un segundo corredor sale del mismo lugar y hace el mismo recorrido a una velocidad de 8 millas por hora. ¿En cuánto tiempo alcanza el segundo corredor al primero?

35. Después de 100 juegos, un equipo de béisbol de ligas mayores tiene un porcentaje de 0.650 de juegos ganados. Si este equipo gana sólo el 50% de sus juegos en el resto de la temporada, ¿cuándo tendrá un porcentaje de 0.600?

36. Se dispara horizontalmente un proyectil hacia un blanco y el sonido del impacto se escucha 1.5 s (segundos) más tarde. Si la velocidad del proyectil es de 3 300 pie/s y la velocidad del sonido es de 1 100 pie/s, ¿a qué distancia se encuentra el blanco?

37. Un anillo hecho de oro y plata pesa 80 g (gramos). Midiendo el desplazamiento de agua causado por el anillo se ha determinado que tiene

un volumen de 5 cm^3. La densidad del oro es de 19.3 g/cm^3, y la de la plata, de 10.5 g/cm^3. ¿Cuántos gramos de oro contiene el anillo?

38. Un farmacéutico debe preparar 15 ml de unas gotas para los ojos para un paciente con glaucoma. La solución de las gotas debe contener 2% de un ingrediente activo, pero el farmacéutico sólo tiene una solución al 10% y otra al 1%, en su almacén. ¿Qué cantidad de cada tipo de solución debe usar para preparar la receta?

39. En cierta prueba médica, diseñada para medir la resistencia a los carbohidratos, un adulto bebe 7 onzas de una solución de glucosa al 30%. Cuando se le administra la misma prueba a un niño debe disminuirse la concentración de glucosa. ¿Qué cantidad de una solución al 30% de glucosa y qué cantidad de agua deben usarse para preparar 7 onzas de una solución al 20% de glucosa?

40. Para preparar la Theophilina, que es un medicamento contra el asma, se usa un elíxir con una concentración de fármaco de 5 mg/ml, y un jarabe con sabor a cereza que se agrega para disimular el sabor de la medicina. ¿Qué cantidad de ambos debe usarse para preparar 100 ml de solución con una concentración del medicamento de 2 mg/ml?

41. La plata británica Sterling es una aleación que contiene 7.5% de cobre en peso. ¿Cuántos gramos de cobre puro y cuántos gramos de plata Sterling deben emplearse para preparar 200 gramos de una aleación cobre-plata que contenga 10% de cobre en peso?

42. A la presentación de una película de horror asistieron seiscientas personas. El costo de los boletos para adulto fue de 5 dólares, mientras que los niños pagaron solamente 2 dólares. Si la taquilla del cine recibió 2 400 dólares, ¿cuántos niños asistieron a la *première*?

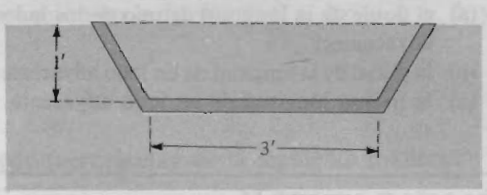
43. Se desea construir un silo grande para grano que contenga la forma de un cilindro circular con una semiesfera unida a la parte superior (véase la figura). El diámetro del almacén debe ser de 30 pie, pero la altura no se ha determinado aún. Encuentre la altura total que debe tener el silo para que su capacidad sea de $11\,250\pi$ pie^3.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 43



44. La sección transversal de un canal de desagüe es un trapecio isósceles, cuya base menor es de 3 pie, y cuya altura, de 1 pie (véase la figura). Determine el ancho que debe tener la base mayor para que el área transversal del canal sea de 5 pie^2.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 44



45. A las 6:00 A.M. una máquina barre nieve, que viaja con una velocidad constante, empieza a despejar una carretera que conduce a las afueras de la ciudad. A las 8:00 A.M. un automóvil toma esa misma carretera con una velocidad de 30 mi/h y alcanza a la máquina 30 min después. ¿Cuán rápido viaja la máquina?

46. Un automóvil que mide 20 pie de largo alcanza a un camión de 40 pie de largo, que viaja a 50 millas por hora. ¿A qué velocidad constante debe moverse el automóvil para rebasar al camión en 5 segundos?

47. A un muchacho le toma 90 min podar el jardín de su padre, pero su hermana puede hacerlo en 60 min. ¿Cuánto tiempo les tomará podar el jardín si trabajan juntos, usando dos cortadoras?

48. Una manguera puede llenar una piscina en 8 horas. Otra manguera mayor que la primera, puede llenar la piscina en 5 horas. ¿Cuánto

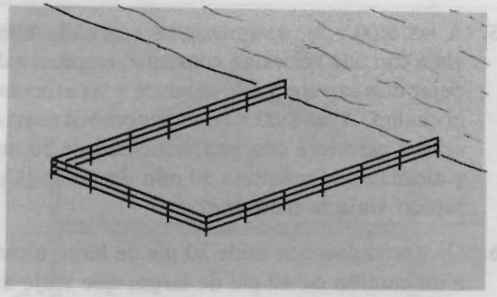
tiempo tomará llenarla si se utilizan las dos mangueras simultáneamente?

49. Un agente de ventas compró un automóvil que según la publicidad promediaba 25 millas por galón en la ciudad y 40 millas por galón en carretera. En un viaje de negocios utilizó 51 galones de gasolina para recorrer 1800 millas. Si suponemos que el anuncio del rendimiento era correcto, ¿cuántas millas recorrió en la ciudad?

50. Dos niños tienen radios transmisores y receptores con un alcance máximo de dos millas. Uno de los niños empieza a caminar de cierto lugar hacia el norte, a la 1:00 P.M., a una velocidad de 4 mi/h. El otro niño sale del mismo lugar a la 1:15 P.M. y camina hacia el sur a 6 mi/h. ¿A qué hora ya no podrán comunicarse uno con el otro?

51. Un granjero desea cercar un terreno rectangular y planea usar 180 pie de material y parte de la orilla de un río en vez de cercar en uno de los lados del rectángulo. Encuentre el área del terreno si la longitud del lado paralelo a la orilla del río es
(a) el doble de la longitud de uno de los lados adyacentes;
(b) la mitad de la longitud de un lado adyacente;
(c) la misma longitud de un lado adyacente.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 51



52. Un ingeniero consultor cobra \$60 por hora y su ayudante recibe \$20 por hora. Por cierto trabajo, un cliente recibió una cuenta de \$580. Si el ayudante trabajó 5 horas menos que el ingeniero, ¿cuánto tiempo trabajó cada uno?

53. A un repartidor de periódicos le toma 45 min entregar los periódicos que le corresponden; sin embargo, si su hermana le ayuda, le toma solamente 20 min. ¿Cuánto tiempo le tomaría a su hermana entregar ella sola los periódicos?

54. Un tanque de agua puede vaciarse con una bomba en 5 horas. Otra bomba, más pequeña puede vaciar el tanque en 8 horas. Si se echa a andar la bomba grande a la 1:00 P.M., ¿a qué hora debe echarse a andar la pequeña para que el tanque quede vacío a las 5:00 P.M.?

55. Un muchacho puede remar en bote a una velocidad de 5 mi/h en agua tranquila. Si rema contra la corriente durante 15 min y luego rema corriente abajo y regresa al punto de partida en 12 min, encuentre
(a) la velocidad de la corriente;
(b) la distancia total que recorrió.

56. Una corredora sale a las 3:00 P.M. y se dirige hacia el norte a una velocidad de 6 min por milla. Más tarde cambia de dirección y corre hacia el sur a un paso de 7 min por milla. Si regresa al punto de partida a las 3:45 P.M., calcule el número total de millas que corrió.

57. El Cociente de Inteligencia (CI) se determina multiplicando el cociente de la edad mental y la edad cronológica de una persona, por 100.
(a) Calcule el CI de un niño de 12 años con edad mental de 15 años.
(b) Encuentre la edad mental de una persona de 15 años de edad que tiene un CI de 140.

58. La Ley de Ohm en teoría de electricidad establece que $I = E/R$, donde I es la corriente (en amperes), E es la tensión o voltaje (en volts) y R es la resistencia (en ohms). En un circuito dado $E = 100$ y $R = 50$. Si se cambian E y R en la misma proporción, ¿qué cambio en E y R hará que I se duplique?

59. El costo de la instalación de aislantes en una casa particular de dos recámaras es de \$1080 (dólares). Los costos actuales de calefacción son en promedio de \$60.00 mensuales, pero se espera que el aislante reduzca los costos de calefacción en un 10%. ¿Cuántos meses se necesitarán para recuperar el costo del aislante?

60. El salario básico por hora de un trabajador es de \$10.00 (dólares), pero recibe "tiempo y medio" por las horas extras que trabaja; es decir, las que exceden las 40 horas a la semana. Si su cheque de esta semana es de \$600.00, ¿cuántas horas extras trabajó?

2.3 Ecuaciones cuadráticas

DEFINICIÓN

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en donde a, b y c son numeros reales y $a \neq 0$.

Una técnica importante para resolver ecuaciones cuadráticas se basa en el hecho de que si p y q son dos números reales tales que $pq = 0$, entonces $p = 0$ o bien $q = 0$. De ahí que si $ax^2 + bx + c$ puede expresarse como un producto de dos polinomios de primer grado, es posible encontrar soluciones igualando cada factor a cero, como lo ilustra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 Resolver la ecuación $3x^2 + x - 10 = 0$.

SOLUCIÓN Primero escribimos la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, y obtenemos

$$3x^2 + x - 10 = 0.$$

El lado izquierdo de esta ecuación puede factorizarse de la siguiente manera:

$$(3x - 5)(x + 2) = 0$$

Haciendo cada uno de los factores igual a 0 resulta

$$3x - 5 = 0, \qquad x + 2 = 0.$$

Las soluciones de estas ecuaciones lineales son

$$x = \tfrac{5}{3}, \qquad x = -2.$$

El hecho de que $\frac{5}{3}$ y -2 sean las raíces de $3x^2 = 10 - x$ puede verificarse por sustitución. ■

El método utilizado para resolver la ecuación del Ejemplo 1 se le llama **método de factorización**.

EJEMPLO 2 Resolver $x^2 + 16 = 8x$.

SOLUCIÓN Empezamos de nuevo con una ecuación equivalente que tiene todos los términos diferentes de cero en un lado:

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

Al factorizar vemos que la ecuación es equivalente a

$$(x-4)^2 = 0 \quad \text{o bien} \quad (x-4)(x-4) = 0.$$

Al igualar cada factor a cero, obtenemos $x - 4 = 0$ y $x - 4 = 0$. Por lo tanto, la ecuación dada tiene una solución, $x = 4$. ■

Como $x - 4$ aparece como factor dos veces en la solución anterior, al número real 4 se le llama **raíz doble** o **raíz de multiplicidad 2**, de la ecuación $x^2 + 16 = 8x$.

Dada una ecuación cuadrática de la forma $x^2 = d$, en donde $d > 0$, podemos escribir $x^2 - d = 0$, o lo que es equivalente

$$(x + \sqrt{d})(x - \sqrt{d}) = 0.$$

El hacer cada factor igual a cero da las soluciones $-\sqrt{d}$ y $\sqrt{d}$. A menudo usamos la abreviatura $\pm\sqrt{d}$ para soluciones de este tipo. Entonces, para $d > 0$, hemos probado el siguiente:

TEOREMA Si $x^2 = d$, entonces $x = \pm\sqrt{d}$.

El proceso de resolver $x^2 = d$ como se indica en el cuadro anterior puede describirse con la frase "tomar la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación". Nótese que al hacerlo, introducimos una raíz cuadrada positiva y una negativa, y no solamente la raíz cuadrada principal, definida en la Sección 1.3.

EJEMPLO 3 Resolver la ecuación $x^2 = 5$.

SOLUCIÓN Al tomar la raíz cuadrada en ambos lados obtenemos $x = \pm\sqrt{5}$. Entonces las soluciones son $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$. ■

En el trabajo siguiente será necesario cambiar una expresión de la forma $x^2 + kx$ a otra como $(x + d)^2$, en las que k y d son números reales. A este procedimiento se le conoce como **completar el cuadrado** para $x^2 + kx$ y se puede llevar a cabo sumando $(k/2)^2$ de la siguiente manera:

$$x^2 + kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2.$$

Verbalmente, decimos que *se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x* a $x^2 + kx$. Enunciemos de nuevo este hecho para tenerlo como referencia.

COMPLETAR EL CUADRADO Para completar el cuadrado para $x^2 + kx$, se suma $\left(\frac{k}{2}\right)^2$.

EJEMPLO 4 Completar el cuadrado para $x^2 + 5x$.

SOLUCIÓN El cuadrado de la mitad del coeficiente de x es $(\frac{5}{2})^2$. Entonces,

$$x^2 + 5x + (\tfrac{5}{2})^2 = (x + \tfrac{5}{2})^2.$$

■

Considérese ahora una ecuación cuadrática cualquiera

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Empezamos por dividir ambos lados entre a y obtenemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

o su equivalente

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

En seguida se completa el cuadrado para $x^2 + (b/a)x$ sumando el cuadrado de la mitad del coeficiente de x. Por supuesto que *para mantener la igualdad debemos sumarlo a los dos miembros o lados de la ecuación* como sigue:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}.$$

Podemos entonces escribir

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Si $b^2 - 4ac \geq 0$, entonces

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

o bien

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Podemos cambiar el radical del lado derecho de la última ecuación como se ve a continuación:

$$\pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{(2a)^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|}.$$

Si $a > 0$, entonces $|2a| = 2a$, si $a < 0$, entonces $|2a| = -2a$, de modo que

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como consecuencia, sea a positiva o negativa.

Hemos demostrado que si la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tiene raíces, éstas estarán dadas por los dos números en la última fórmula. Más aún, mediante sustitución directa se puede demostrar que los dos números sí satisfacen la ecuación. Esto da el siguiente hecho muy importante.

FÓRMULA CUADRÁTICA

Si $a \neq 0$, entonces las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

El número $b^2 - 4ac$, que aparece bajo el radical en la fórmula cuadrática, se denomina **discriminante** de la ecuación cuadrática. Puede utilizarse para determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación como se explica a continuación:

(i) Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales diferentes.
(ii) Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una raíz de multiplicidad 2.
(iii) Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene raíces reales.

EJEMPLO 5 Resolver $4x^2 + x - 3 = 0$.

SOLUCIÓN Al tomar $a = 4$, $b = 1$ y $c = -3$ en la fórmula cuadrática obtenemos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(4)(-3)}}{2(4)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{8}$$

$$= \frac{-1 \pm 7}{8}.$$

Entonces, las soluciones son

$$x = \frac{-1 + 7}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad x = \frac{-1 - 7}{8} = -1. \qquad \blacksquare$$

El Ejemplo 5 pudo haberse resuelto también por factorización. Si escribimos $(4x - 3)(x + 1) = 0$ y hacemos cada factor igual a cero, resultan las soluciones $x = \frac{3}{4}$ y $x = -1$.

EJEMPLO 6 Resolver $2x(3 - x) = 3$.

SOLUCIÓN Para usar la fórmula cuadrática es necesario escribir la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Las siguientes ecuaciones son equivalentes:

$$2x(3 - x) = 3$$
$$6x - 2x^2 = 3$$
$$-2x^2 + 6x - 3 = 0$$
$$2x^2 - 6x + 3 = 0$$

Al tomar $a = 2$, $b = -6$ y $c = 3$ en la fórmula cuadrática obtenemos

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)}$$
$$= \frac{6 \pm \sqrt{12}}{4}$$
$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4}$$
$$= \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Entonces, las soluciones son $x = (3 \pm \sqrt{3})/2$. ■

El ejemplo siguiente ilustra el caso de una raíz doble.

EJEMPLO 7 Resolver la ecuación $9x^2 - 30x + 25 = 0$.

SOLUCIÓN El tomar $a = 9$, $b = -30$, $c = 25$ en la fórmula cuadrática da

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(9)(25)}}{2(9)}$$
$$= \frac{30 \pm \sqrt{900 - 900}}{18}$$
$$= \frac{30 \pm 0}{18} = \frac{5}{3}.$$

En consecuencia, existe sólo una solución, $\frac{5}{3}$. ■

Hay muchos problemas prácticos que conducen a ecuaciones cuadráticas. El siguiente ejemplo ilustra uno de ellos.

EJEMPLO 8 Se va a fabricar una caja de base cuadrada y sin tapa, con una hoja cuadrada de estaño, cortando cuadrados de 3 pulgadas de cada esquina y doblando los

Hemos demostrado que si la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tiene raíces, éstas estarán dadas por los dos números en la última fórmula. Más aún, mediante sustitución directa se puede demostrar que los dos números sí satisfacen la ecuación. Esto da el siguiente hecho muy importante.

FÓRMULA CUADRÁTICA

Si $a \neq 0$, entonces las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

El número $b^2 - 4ac$, que aparece bajo el radical en la fórmula cuadrática, se denomina **discriminante** de la ecuación cuadrática. Puede utilizarse para determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación como se explica a continuación:

(i) Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales diferentes.
(ii) Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una raíz de multiplicidad 2.
(iii) Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene raíces reales.

EJEMPLO 5 Resolver $4x^2 + x - 3 = 0$.

SOLUCIÓN Al tomar $a = 4$, $b = 1$ y $c = -3$ en la fórmula cuadrática obtenemos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(4)(-3)}}{2(4)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{8}$$

$$= \frac{-1 \pm 7}{8}.$$

Entonces, las soluciones son

$$x = \frac{-1 + 7}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad x = \frac{-1 - 7}{8} = -1. \qquad \blacksquare$$

El Ejemplo 5 pudo haberse resuelto también por factorización. Si escribimos $(4x - 3)(x + 1) = 0$ y hacemos cada factor igual a cero, resultan las soluciones $x = \frac{3}{4}$ y $x = -1$.

EJEMPLO 6 Resolver $2x(3 - x) = 3$.

SOLUCIÓN Para usar la fórmula cuadrática es necesario escribir la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Las siguientes ecuaciones son equivalentes:

$$2x(3 - x) = 3$$
$$6x - 2x^2 = 3$$
$$-2x^2 + 6x - 3 = 0$$
$$2x^2 - 6x + 3 = 0$$

Al tomar $a = 2$, $b = -6$ y $c = 3$ en la fórmula cuadrática obtenemos

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)}$$
$$= \frac{6 \pm \sqrt{12}}{4}$$
$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4}$$
$$= \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Entonces, las soluciones son $x = (3 \pm \sqrt{3})/2$. ■

El ejemplo siguiente ilustra el caso de una raíz doble.

EJEMPLO 7 Resolver la ecuación $9x^2 - 30x + 25 = 0$.

SOLUCIÓN El tomar $a = 9$, $b = -30$, $c = 25$ en la fórmula cuadrática da

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(9)(25)}}{2(9)}$$
$$= \frac{30 \pm \sqrt{900 - 900}}{18}$$
$$= \frac{30 \pm 0}{18} = \frac{5}{3}.$$

En consecuencia, existe sólo una solución, $\frac{5}{3}$. ■

Hay muchos problemas prácticos que conducen a ecuaciones cuadráticas. El siguiente ejemplo ilustra uno de ellos.

EJEMPLO 8 Se va a fabricar una caja de base cuadrada y sin tapa, con una hoja cuadrada de estaño, cortando cuadrados de 3 pulgadas de cada esquina y doblando los

lados. Si la caja debe tener 48 pulgadas cúbicas, ¿qué tamaño debe tener la hoja que se debe usar?

SOLUCIÓN Si hacemos que x denote la longitud de un lado de la hoja de estaño, entonces la longitud de la base de la caja es $x - 6$ (Figura 2.4). Como el área de la base es $(x - 6)^2$ y la altura es 3, el volumen de la caja es $3(x - 6)^2$. Más aún, como la caja debe contener 48 pulg^3, se tiene

$$3(x - 6)^2 = 48.$$

Al despejar x resulta

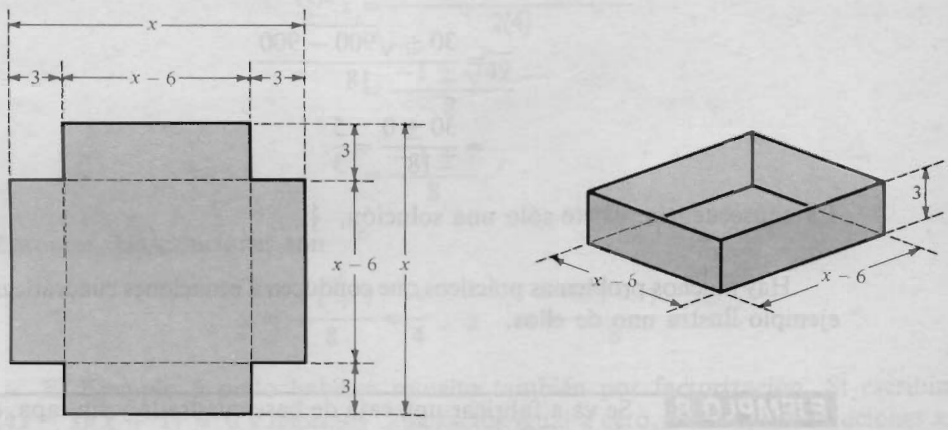
$$(x - 6)^2 = 16$$
$$x - 6 = \pm 4$$
$$x = 6 \pm 4.$$

En consecuencia, se obtiene $x = 10$ o bien $x = 2$.

Verifiquemos ahora cada uno de estos números. Si nos referimos a la Figura 2.4, vemos que 2 es inaceptable ya que no es posible construir la caja en este caso. (¿Por qué?) Sin embargo, si empezamos con una hoja cuadrada de 10 pulg, cortamos esquinas de 3 pulg y doblamos, obtenemos una caja con dimensiones 4 pulg, 4 pulg y 3 pulg. La caja tiene el volumen deseado de 48 pulg^3. De modo que 10 pulg es la respuesta al problema. ■

Como lo ilustra el Ejemplo 8, aun cuando una ecuación sea formulada correctamente, es posible, debido a la naturaleza física del problema dado, llegar a soluciones sin sentido. Estas soluciones deben desecharse. Por ejemplo, no aceptaremos la respuesta -7 años para la edad de una persona, ni $\sqrt{50}$ para el número de automóviles en un estacionamiento.

FIGURA 2.4



Ejercicios 2.3

Resuelva las ecuaciones de los Ejercicios 1 a 10 mediante factorización.

1. $6x^2 + 11x - 10 = 0$
2. $15x^2 + x - 6 = 0$
3. $20x^2 + 7 = 33x$
4. $4x^2 + 16x + 15 = 0$
5. $4y^2 + 29y + 30 = 0$
6. $z(8z + 19) = 27$
7. $4t(t - 6) = -9$
8. $9u^2 = 30u - 25$
9. $54r^2 - 9r - 30 = 0$
10. $60s^2 - 85s - 35 = 0$

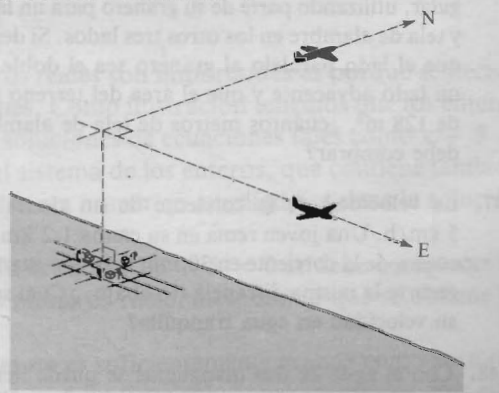
Utilice la fórmula cuadrática para resolver las ecuaciones de los Ejercicios 11 a 24.

11. $2x^2 - x - 3 = 0$
12. $3x^2 = 2(x + 4)$
13. $6 = u(u + 2)$
14. $v^2 + 3v - 5 = 0$
15. $2x^2 - 4x - 5 = 0$
16. $6x - 2 = 3x^2$
17. $4y^2 = 5(4y - 5)$
18. $9t^2 + 6t + 1 = 0$
19. $\frac{5}{3}s^2 + 3s + 1 = 0$
20. $\frac{3}{2}z^2 - 4z - 1 = 0$
21. $\dfrac{x + 1}{3x + 2} = \dfrac{x - 2}{2x - 3}$
22. $\dfrac{5}{w^2} - \dfrac{10}{w} + 2 = 0$
23. $9x^2 = -4x$
24. $16x^2 - 9 = 0$
25. Dada la ecuación $4x^2 - 4xy + 1 - y^2 = 0$, aplique la fórmula cuadrática para hallar
    (a) x en términos de y;
    (b) y en términos de x.
26. Dada la ecuación $2x^2 - xy = 3y^2 + 1$, use la fórmula cuadrática para hallar
    (a) x en términos de y;
    (b) y en términos de x.

Las fórmulas de los Ejercicios 27 a 34 se presentan en la teoría y las aplicaciones de las matemáticas. Resuelva para evaluar la variable que se indica, en términos de las otras variables (todas las letras indican números positivos).

27. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ para r
28. $K = \frac{1}{2}mv^2$ para v
29. $F = g\dfrac{m_1 m_2}{d^2}$ para d
30. $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$ para a
31. $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$ para t
32. $A = 2\pi r(r + h)$ para r
33. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ para y
34. $s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2}$ para r_2
35. El diámetro de un círculo es 10 cm. ¿Qué cambio en el radio disminuirá el área en 16π cm^2?
36. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 5 cm. Halle la medida de los catetos sabiendo que su suma es 6 cm.
37. Se rodea por un camino de ancho uniforme un terreno rectangular de dimensiones 26 m por 30 m. Se sabe que el área del camino es 240 m^2, determine el ancho del camino.
38. Un fabricante de envases de lata desea construir una lata cilíndrica de 20 cm de altura y capacidad de 3000 cm cúbicos. Encuentre el radio de la lata.
39. Un avión vuela hacia el norte a 200 millas por hora y pasa sobre cierto lugar en tierra a las 2:00 P.M. Otro avión, que vuela a la misma altitud a 400 millas por hora hacia el este, pasa sobre el mismo lugar a las 2:00 P.M. (Véase la figura.)
    (a) Si t denota el tiempo (en horas) después de las 2:30 P.M., exprese la distancia d entre los aviones, en términos de t.
    (b) ¿A qué hora la distancia entre los aviones es de 500 millas?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 39



40. Una caja sin tapa se debe construir cortando cuadrados de 3 pulg de una hoja de lata rectangular, cuya longitud es el doble de su ancho. ¿Qué

tamaño de hoja producirá una caja con un volumen de 60 pulg^3? (Revise el Ejemplo 8.)

41. Un trozo de alambre de 100 pulg de largo, se corta en dos y cada pedazo se dobla para que tome la forma de un cuadrado. Si la suma de las áreas formadas es 397 pulg^2, encuentre la longitud de cada pedazo de alambre.

42. Un hombre desea usar 6 m^3 de concreto para construir el piso de un patio rectangular. Si la longitud del patio debe ser el doble del ancho y el grosor del piso debe ser 8 cm, encuentre las dimensiones del patio.

43. Se quiere construir un barril de petróleo cilíndrico y cerrado con una altura de 4 pie, de manera que el área superficial total sea de 10π pie^2. Determine el diámetro del barril.

44. Cuando el precio de una marca popular de aparatos de video es de \$300 (dólares) por unidad, una tienda vende 15 unidades a la semana. Cada vez que el precio se reduce en \$10, sin embargo, las ventas aumentan en 2 unidades a la semana. ¿Qué precio de venta debe ponerse para obtener ingresos mensuales de \$7000 (dólares)?

45. Dos muchachos con radio-transmisores salen del mismo lugar a las 9:00 A.M., uno de ellos camina hacia el sur a 4 km/h y el otro camina hacia el oeste a 3 km/h. ¿Cuánto tiempo pueden comunicarse entre ellos si cada radio tiene un alcance de 2 km?

46. Un granjero intenta cercar un terreno rectangular, utilizando parte de su granero para un lado y tela de alambre en los otros tres lados. Si desea que el lado paralelo al granero sea el doble de un lado adyacente y que el área del terreno sea de 128 m^2, ¿cuántos metros de tela de alambre debe comprar?

47. La velocidad de la corriente de un río es de 5 km/h. Una joven rema en su canoa 1.2 km en contra de la corriente en 30 min más que cuando recorre la misma distancia río abajo. ¿Cuál será su velocidad en agua tranquila?

48. Con el agua de dos mangueras se puede llenar una piscina en 4 horas. Si se utilizan separadamente, con la manguera menor se llena la piscina en 6 horas más que con la manguera más grande. ¿En qué tiempo se llena la piscina si solamente se usa la manguera menor?

49. En una hoja de papel de 24 × 36 cm se va a imprimir una fotografía, con el lado menor en la parte de abajo. El margen en los lados y en la parte de arriba debe ser del mismo ancho, y el margen de abajo debe ser el doble de los otros. Halle el ancho de los márgenes si el área que se va a imprimir es de 661.5 cm^2.

50. Un fabricante vende su artículo a los comerciantes a \$20 por pieza si el pedido es de menos de 50. Si el pedido es de 50 piezas o más (hasta 600), el precio por pieza se reduce en 2 centavos por el número pedido. ¿Cuántos artículos puede comprar un comerciante con \$4 200?

51. Se lanza una pelota hacia arriba a una velocidad inicial de 64 pie/s. El número de pies s sobre el nivel del suelo, después de t segundos está dado por $s = -16t^2 + 64t$.
    (a) ¿En cuánto tiempo alcanza el proyectil una altura de 48 pie?
    (b) ¿En cuánto tiempo regresa al suelo?
    (c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

52. Se dispara un proyectil hacia arriba, desde un lugar que se encuentra a una altura de s_0 metros sobre el suelo, con una velocidad inicial de v_0 metros por segundo. Entonces la distancia del proyectil al suelo en el tiempo t estará dada por $s = -16t^2 + v_0t + s_0$. Determine t en términos de s, v_0 y s_0. ¿Cuándo llega el proyectil al suelo? Exprese su respuesta en términos de v_0 y s_0.

53. La distancia que viaja un automóvil en el tiempo que transcurre entre el momento en que el conductor decide aplicar el freno y el momento en que el automóvil se detiene, se conoce como la *distancia de frenado*. Si un auto viaja a una velocidad v (en millas por hora), la distancia de frenado d (en pies) está dada aproximadamente por $d = v + (v^2/20)$.
    (a) Calcular la distancia de frenado cuando la velocidad es de 55 millas por hora.
    (b) Una vaca grande está parada tranquilamente a la mitad de un camino. Si se empieza a reaccionar cuando uno se encuentra a 120 pie de la vaca, ¿cuál es la velocidad mayor a la que puede ir y evitar el choque contra la vaca.

54. Un niño deja caer una piedra desde un risco hacia el mar. Si escucha el ruido del agua 4 segundos después, ¿qué tan alto es el risco? (*Sugerencia:* Use el hecho de que la piedra recorre $16t^2$ pie en

t segundos, y que la velocidad del sonido es de 1100 pie/s.)

55. La temperatura T (en °C) a la que hierve el agua está relacionada con la altitud o elevación h (en metros sobre el nivel del mar) mediante la fórmula

$$h = 1000\,(100 - T) + 580\,(100 - T)^2.$$

(a) ¿A qué altitud hierve el agua a una temperatura de 98°C?

(b) El Monte Everest tiene una altura de 29 000 pie (o 8 840 m). ¿A qué temperatura hervirá el agua en la cima de esta montaña? (*Sugerencia:* Sea $x = 100 - T$ y use la fórmula cuadrática.)

56. Se quiere poner una cerca alrededor de una hortaliza cuadrada. Si la reja cuesta \$1 por pie y el costo de cercar es de 50 centavos por pie^2, halle el tamaño del huerto que puede cercarse a un costo de \$120.

57. En un torneo de softbol cada par de equipos se enfrenta una vez. Cada día se pueden jugar cuatro juegos y los organizadores del torneo han alquilado el campo por una semana. ¿Cuántos equipos pueden ser invitados? (*Sugerencia:* El número de parejas que pueden hacerse con n equipos es $n(n - 1)/2$.)

58. La *diagonal* de un polígono es un segmento de recta que une cualesquiera dos vértices no adyacentes. Se puede demostrar que el número de diagonales de un polígono de n lados es $n(n - 3)/2$. ¿Cuántos lados debe tener un polígono si el número de sus diagonales es 35? ¿Podría haber un polígono con 100 diagonales?

59. Si r_1 y r_2 son las dos raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, demuestre que $r_1 + r_2 = -b/a$ y $r_1 r_2 = c/a$.

60. Demuestre que las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ son iguales numéricamente pero de signo contrario a las raíces de $ax^2 - bx + c = 0$.

Ejercicios para Calculadora 2.3

Aproxime hasta milésimos las soluciones de las ecuaciones siguientes.

1. $47x^2 + 183x + 29 = 0$

2. $912x^2 - 3174x - 713 = 0$

3. $2.13x^2 + 6.04x - 5.71 = 0$

4. $6143x^2 + 5417x - 1439 = 0$

2.4 Números complejos

Una de las razones por las que los números reales son importantes es porque se necesitan para encontrar soluciones de ecuaciones. Como ilustración tenemos que los enteros no negativos 0, 1, 2, 3, ... no contienen soluciones de ecuaciones tales como $x + 5 = 0$. Para corregir este defecto se necesita al sistema de los enteros, que contiene también a los negativos $-1, -2, -3, \ldots$ En este sistema numérico ampliado se tiene la solución -5 de la ecuación $x + 5 = 0$.

De la misma manera, para resolver la ecuación $3x + 5 = 0$ se debe enriquecer al conjunto de los números enteros con los números racionales, con lo que se obtiene la solución $x = -\frac{5}{3}$.

El conjunto de los números racionales no es suficientemente grande como para resolver cualquier ecuación; por ejemplo, $x^2 = 5$ no tiene soluciones racionales. Por ello hay que ampliar de nuevo el sistema numérico a fin de incluir los números irracionales, como $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$. Esto conduce al sistema de los números reales $\mathbb{R}$, que contiene a los números racionales y a los irracionales.

Es necesario, además, eliminar otro defecto. Puesto que los cuadrados de los números reales nunca son negativos, $\mathbb{R}$ no contiene soluciones o raíces de ecuaciones de la forma $x^2 = -5$. Para remediar esta situación, es necesario crear un sistema mayor $\mathbb{C}$, llamado **sistema de los números complejos** que contiene a $\mathbb{R}$ y también a los números cuyos cuadrados son negativos.

Se introduce, en primer lugar, la **unidad imaginaria**, denotada por la letra i, que tiene la propiedad siguiente:

$$i = \sqrt{-1}, \quad \text{o bien} \quad i^2 = -1.$$

Obviamente, i no es un número real. Es una nueva entidad matemática que permite obtener el sistema numérico $\mathbb{C}$ que contiene las soluciones de cualquier ecuación algebraica.

Puesto que tanto i como $\mathbb{R}$ deben estar contenidos en $\mathbb{C}$, es necesario considerar productos de la forma bi, en los que b es un número real, así como expresiones de la forma $a + bi$, en las que a y b son ambos números reales. Esto motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN

Un **número complejo** es una expresión de la forma $a + bi$, en donde a y b son números reales e $i^2 = -1$.

La igualdad, la adición y la multiplicación de dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ se definen de la siguiente manera:

$$a + bi = c + di \quad \text{si y sólo si} \quad a = c \quad \text{y} \quad b = d.$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

No es necesario memorizar las definiciones anteriores de la adición y la multiplicación. En efecto, cuando trabajamos con números complejos, *podemos tratar todos los símbolos como si fueran números reales, con exactamente una excepción: donde quiera que aparezca el símbolo i^2, debe ser reemplazado por -1.* Nótese que si usamos esta técnica para multiplicación, obtenemos

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= (a + bi)c + (a + bi)(di) \\ &= ac + (bi)c + a(di) + (bi)(di) \\ &= ac + (bc)i + (ad)i + (bd)(i^2) \\ &= ac + (bc)i + (ad)i + (bd)(-1) \\ &= ac + (bd)(-1) + (ad)i + (bc)i \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Esto concuerda con la definición de multiplicación.

EJEMPLO 1 Expresar cada uno de los siguientes términos en la forma $a + bi$, en donde a y b son números reales.

(a) $(3 + 4i) + (2 + 5i)$ (b) $(3 + 4i)(2 + 5i)$

SOLUCIÓN

(a) $$(3 + 4i) + (2 + 5i) = (3 + 2) + (4 + 5)i = 5 + 9i$$

(b) $$\begin{aligned}(3 + 4i)(2 + 5i) &= (3 + 4i)2 + (3 + 4i)(5i)\\ &= 6 + 8i + 15i + 20i^2\\ &= 6 + 20(-1) + 23i\\ &= -14 + 23i\end{aligned}$$ ■

El conjunto $\mathbb{R}$ de números reales puede ser identificado con números complejos de la forma $a + 0i$. Es también conveniente designar el número complejo $0 + bi$ por bi. Con base en este acuerdo observamos que

$$(a + 0i) + (0 + bi) = (a + 0) + (0 + b)i = a + bi.$$

Así, $a + bi$ puede ser considerado como la suma de dos números complejos a y bi (esto es, $a + 0i$ y $0 + bi$)

El **elemento neutro** (o **identidad**) relativo de la suma es 0 (o, de manera equivalente, $0 + 0i$); esto es

$$(a + bi) + 0 = a + bi$$

para todo número complejo $a + bi$.

Si $(-a) + (-b)i$ se suman a $a + bi$, obtenemos 0. Esto implica que $(-a) + (-b)i$ es el **inverso aditivo** de $a + bi$; es decir,

$$-(a + bi) = (-a) + (-b)i.$$

La **sustracción** de números complejos se define con los inversos aditivos:

$$(a + bi) - (c + di) = (a + bi) + [-(c + di)].$$

Como $-(c + di) = (-c) + (-d)i$, obtenemos

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Si c, d y k son números reales, entonces,

$$k(c + di) = (k + 0i)(c + di) = (kc - 0d) + (kd + 0c)i;$$

esto es,

$$k(c + di) = kc + (kd)i.$$

Una ilustración de esta fórmula es

$$3(5 + 2i) = 15 + 6i.$$

Si, como en el siguiente ejemplo, se pide escribir la expresión en la forma $a + bi$, debemos aceptar la forma $a - di$, como $a - di = a + (-d)i$.

EJEMPLO 2 Escribir cada expresión en la forma $a + bi$.

(a) $4(2 + 5i) - (3 - 4i)$ (b) $(4 - 3i)(2 + i)$

(c) $i(3 - 2i)^2$ (d) i^{51}

SOLUCIÓN

(a) $$4(2 + 5i) - (3 - 4i) = 8 + 20i - 3 + 4i = 5 + 24i$$

(b) $$(4 - 3i)(2 + i) = 8 - 6i + 4i - 3i^2 = 11 - 2i$$

(c) $$i(3 - 2i)^2 = i(9 - 12i + 4i^2) = i(5 - 12i) = 5i - 12i^2 = 12 + 5i$$

(d) Tomando potencias sucesivas de i, obtenemos $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, y luego el círculo comienza de nuevo: $i^5 = i$, $i^6 = i^2 = -1$, etcétera. En particular, $i^{51} = i^{48}i^3 = (i^4)^{12}i^3 = (1)^{12}i^3 = i^3 = -i$. ■

El número complejo $a - bi$ se llama **conjugado** de un número complejo $a + bi$. Como

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a$$

y

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2,$$

podemos ver que *la suma y el producto de un número complejo y su conjugado son números reales.* Los conjugados son útiles para encontrar el inverso multiplicativo $1/(a + bi)$ de $a + bi$, por simplificación del cociente $(a + bi)/(c + di)$ de dos números complejos, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Expresar cada fracción en la forma $a + bi$.

(a) $\dfrac{1}{9 + 2i}$ (b) $\dfrac{7 - i}{3 - 5i}$

SOLUCIÓN Multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, como sigue:

(a) $$\frac{1}{9 + 2i} = \frac{1}{9 + 2i} \cdot \frac{9 - 2i}{9 - 2i} = \frac{9 - 2i}{81 + 4} = \frac{9}{85} - \frac{2}{85}i$$

(b) $$\frac{7 - i}{3 - 5i} = \frac{7 - i}{3 - 5i} \cdot \frac{3 + 5i}{3 + 5i} = \frac{21 - 3i + 35i - 5i^2}{9 - 25i^2}$$

$$= \frac{26 + 32i}{34} = \frac{13}{17} + \frac{16}{17}i$$

■

Es fácil observar que si p es cualquier número real positivo, entonces la ecuación $x^2 = -p$ tiene soluciones en $\mathbb{C}$. De hecho, una solución es $i\sqrt{p}$, pues

$$(i\sqrt{p})^2 = i^2(\sqrt{p})^2 = (-1)p = -p.$$

De manera similar, $-i\sqrt{p}$ es también una solución.

La siguiente definición es motivada por el hecho de que $(i\sqrt{p})^2 = -p$.

DEFINICIÓN

Si p es un número real positivo, entonces la raíz cuadrada principal de $-p$ se denota por $\sqrt{-p}$ y se define por

$$\sqrt{-p} = i\sqrt{p}.$$

También expresamos esto como $\sqrt{-p} = \sqrt{p}i$; sin embargo, debemos tener cuidado de *no* escribir $\sqrt{pi}$ cuando se quiere considerar $\sqrt{p}i$. Otros ejemplos de raíces cuadradas principales son

$$\sqrt{-9} = i\sqrt{9} = i(3) = 3i, \qquad \sqrt{-5} = i\sqrt{5}, \qquad \sqrt{-1} = i\sqrt{1} = i.$$

El símbolo radical debe usarse con precaución cuando el radicando es negativo. Por ejemplo, la fórmula $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, lo cual es válido para los números reales positivos, no es verdad cuando a y b son negativos. Para ilustrar esto sea

$$\sqrt{-3}\sqrt{-3} = (i\sqrt{3})(i\sqrt{3}) = i^2(\sqrt{3})^2 = (-1)3 = -3,$$

mientras que

$$\sqrt{(-3)(-3)} = \sqrt{9} = 3.$$

Por lo tanto

$$\sqrt{-3}\sqrt{-3} \neq \sqrt{(-3)(-3)}.$$

Sin embargo, si solamente *uno* de los números a o bien b es negativo, entonces se puede demostrar que $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. En general, no aplicaremos leyes de los radicales si los radicandos son negativos. En vez de eso, se cambiará la forma de radicales antes de efectuar cualquier operación, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Expresar $(5 - \sqrt{-9})(-1 + \sqrt{-4})$ en la forma $a + bi$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}(5 - \sqrt{-9})(-1 + \sqrt{-4}) &= (5 - i\sqrt{9})(-1 + i\sqrt{4}) \\ &= (5 - 3i)(-1 + 2i) \\ &= -5 + 3i + 10i - 6i^2 \\ &= -5 + 13i + 6 = 1 + 13i\end{aligned}$$

■

En la sección anterior demostramos que si a, b y c son números reales tales que $b^2 - 4ac \geq 0$, y si $a \neq 0$, entonces, las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ahora podemos extender este resultado al caso donde $b^2 - 4ac < 0$. Desde luego, los mismos procedimientos utilizados para obtener la fórmula cuadrática, junto con los resultados de esta sección, muestran que si $b^2 - 4ac < 0$, entonces las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ son los dos números *complejos* dados antes. Nótese que las soluciones son conjugadas entre sí.

EJEMPLO 5 Hallar las soluciones de la ecuación $5x^2 + 2x + 1 = 0$.

SOLUCIÓN Por la fórmula cuadrática tenemos que

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{10} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{10} = \frac{-2 \pm 4i}{10}.$$

Dividiendo numerador y denominador entre 2, vemos que las soluciones de la ecuación son $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ y $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$. ■

EJEMPLO 6 Obtener las soluciones de la ecuación $x^3 - 1 = 0$.

SOLUCIÓN La ecuación $x^3 - 1 = 0$ se puede escribir

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Haciendo cada factor igual a cero y resolviendo las ecuaciones resultantes, obtenemos las soluciones

$$1, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2},$$

lo cual se puede escribir como

$$1, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$ ■

Las tres soluciones de $x^3 - 1 = 0$ se llaman **raíces cúbicas de la unidad**. Se puede demostrar que si n es cualquier entero positivo, la ecuación $x^n - 1 = 0$ tiene n soluciones complejas distintas, llamadas **raíces n-ésimas de la unidad**.

Ejercicios 2.4

En los Ejercicios 1 a 32 escriba la expresión en la forma $a + bi$.

1. $(3 + 2i) + (-5 + 4i)$
2. $(8 - 5i) + (2 - 3i)$
3. $(-4 + 5i) + (2 - i)$
4. $(5 + 7i) + (-8 - 4i)$
5. $(16 + 10i) - (9 + 15i)$
6. $(2 - 6i) - (7 + 2i)$
7. $7 - (3 - 7i)$
8. $-9 + (5 + 9i)$
9. $5i - (6 + 2i)$
10. $(10 + 7i) - 12i$
11. $(4 + 3i)(-1 + 2i)$
12. $(3 - 6i)(2 + i)$
13. $(-7 + i)(-3 + i)$
14. $(5 + 2i)^2$
15. $(2 + 3i)^2$
16. $7i(13 + 8i)$
17. $-9i(4 - 8i)$
18. $(1 + i)^3$
19. $(3 + i)^2(3 - i)^2$
20. $-3(-6 + 12i)$
21. i^{30}
22. i^{25}
23. $\dfrac{1}{3 + 2i}$
24. $\dfrac{1}{5 + 8i}$
25. $\dfrac{7}{5 - 6i}$
26. $\dfrac{-3}{2 - 5i}$
27. $\dfrac{4 - 3i}{2 + 4i}$
28. $\dfrac{4 + 3i}{-1 + 2i}$
29. $\dfrac{6 + 4i}{1 - 5i}$
30. $\dfrac{7 - 6i}{-5 - i}$
31. $\dfrac{21 - 7i}{i}$
32. $\dfrac{10 + 9i}{-3i}$

En los Ejercicios 33 y 34 halle x y y.

33. $(x - y) + 3i = 7 + yi$
34. $8 + (3x + y)i = 2x - 4i$

Encuentre las soluciones de las ecuaciones de los Ejercicios 35 a 48.

35. $x^2 - 3x + 10 = 0$
36. $x^2 - 5x + 20 = 0$
37. $x^2 + 2x + 5 = 0$
38. $x^2 + 3x + 6 = 0$
39. $4x^2 + x + 3 = 0$
40. $-3x^2 + x - 5 = 0$
41. $x^3 - 125 = 0$
42. $x^3 + 27 = 0$
43. $x^6 - 64 = 0$
44. $x^4 = 81$
45. $4x^4 + 25x^2 + 36 = 0$
46. $27x^4 + 21x^2 + 4 = 0$
47. $x^3 + 3x^2 + 4x = 0$
48. $8x^3 - 12x^2 + 2x - 3 = 0$

49. Si $z = a + bi$ es cualquier número complejo, su conjugado se representa a menudo por $\bar{z}$; esto es, $\bar{z} = a - bi$. Compruebe cada una de las siguientes expresiones:
    (a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
    (b) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
    (c) $\overline{z^2} = (\bar{z})^2$, $\overline{z^3} = (\bar{z})^3$, y $\overline{z^4} = (\bar{z})^4$
    (d) $\bar{z} = z$ si y sólo si z es real.
50. Refiérase al Ejercicio 49. Compruebe que la expresión $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$ y $\bar{\bar{z}} = z$.

2.5 Ecuaciones de otros tipos

Si se puede expresar una ecuación en forma de factores, *con cero en un lado*, entonces a menudo pueden obtenerse soluciones igualando cada factor a cero, tal como lo ilustran los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 Resolver $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

SOLUCIÓN Se puede factorizar el lado izquierdo mediante un agrupamiento como el siguiente:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$
$$x^2(x + 2) - (x + 2) = 0$$
$$(x^2 - 1)(x + 2) = 0$$
$$(x + 1)(x - 1)(x + 2) = 0$$

El igualar cada factor a cero da

$$x + 1 = 0, \qquad x - 1 = 0, \qquad x + 2 = 0,$$

o lo que es igual

$$x = -1, \qquad x = 1, \qquad x = -2.$$

Mediante sustitución en la ecuación original puede verificarse que estos tres números son soluciones. ■

EJEMPLO 2 Resolver $x^{3/2} = x^{1/2}$.

SOLUCIÓN Podemos proceder como sigue:

$$x^{3/2} - x^{1/2} = 0$$
$$x^{1/2}(x - 1) = 0$$

Entonces $x^{1/2} = 0$ o bien $x - 1 = 0$, de donde obtenemos las soluciones $x = 0$ y $x = 1$. ■

Cuando se tiene una ecuación como $x^{3/2} = x^{1/2}$ (Ejemplo 2) comúnmente se comete un error al dividir ambos lados entre $x^{1/2}$ y obtener $x = 1$. Observe que esto hace que se pierda la solución $x = 0$. En general, *no se dividen ambos lados de una ecuación entre una expresión que contiene variables.*

Si una ecuación contiene radicales o exponentes fraccionarios, a menudo se utiliza el método de elevar ambos lados a una potencia entera positiva. Cuando se hace esto, las soluciones de la nueva ecuación siempre contienen las soluciones de la ecuación original. Por ejemplo, las soluciones de

$$2x - 3 = \sqrt{x + 6}$$

son también soluciones de

$$(2x - 3)^2 = (\sqrt{x + 6})^2.$$

En algunos casos la ecuación nueva tiene *más* soluciones que la ecuación original. Para ilustrarlo, empecemos con la ecuación $x = 3$ y elevemos al cuadrado amos miembros. Obtenemos $x^2 = 9$. Nótese que la ecuación dada tiene sólo una solución, 3, mientras que la nueva ecuación tiene dos soluciones, 3 y -3. Cualquier solución de la ecuación

nueva que no es solución de la ecuación original se denomina **solución extraña**. Debido a que pueden surgir soluciones extrañas, es *absolutamente esencial* verificar todas las soluciones que se obtengan al elevar ambos lados de una ecuación a la misma potencia.

EJEMPLO 3 Resolver

$$\sqrt[3]{x^2 - 1} = 2.$$

SOLUCIÓN Si elevamos al cubo ambos lados, las soluciones de la ecuación dada estarán comprendidas entre las soluciones de la siguiente:

$$(\sqrt[3]{x^2 - 1})^3 = 2^3$$

$$x^2 - 1 = 8$$

$$x^2 = 9.$$

Entonces, las únicas soluciones posiles de $\sqrt[3]{x^2 - 1} = 2$ son 3 y -3.

A continuación, verificamos cada uno de estos números mediante sustitución en $\sqrt[3]{x^2 - 1} = 2$. Al sustituir x por 3 en la ecuación obtenemos $\sqrt[3]{3^2 - 1} = 2$ o bien $\sqrt[3]{8} = 2$, el cual es un enunciado verdadero. Entonces, 3 es una solución. De igual manera -3 es una solución. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación dada son 3 y -3. ■

EJEMPLO 4 Resolver

$$3 + \sqrt{3x + 1} = x.$$

SOLUCIÓN Empezamos por aislar el radical en un lado como sigue:

$$\sqrt{3x + 1} = x - 3.$$

A continuación, elevamos al cuadrado ambos lados y simplificamos para obtener

$$(\sqrt{3x + 1})^2 = (x - 3)^2$$

$$3x + 1 = x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 - 9x + 8 = 0$$

$$(x - 1)(x - 8) = 0.$$

Como la última ecuación tiene por soluciones 1 y 8, se concluye que 1 y 8 son las únicas soluciones posibles de la ecuación original.

Ahora verificamos cada solución posible, mediante sustitución en $3 + \sqrt{3x + 1} = x$. Al hacer $x = 1$ tenemos

$$3 + \sqrt{4} = 1 \quad \text{o bien} \quad 5 = 1$$

que es falso. Consecuentemente, 1 no es solución. Al tomar $x = 8$ en la ecuación dada, obtenemos

$$3 + \sqrt{25} = 8 \quad \text{o bien} \quad 3 + 5 = 8$$

lo que es cierto. Se concluye que la ecuación $3 + \sqrt{3x + 1} = x$ tiene una sola solución $x = 8$. ■

Para resolver algunas ecuaciones con radicales puede ser necesario usar el proceso de elevar ambos lados a ciertas potencias varias veces, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 Resolver

$$\sqrt{2x - 3} - \sqrt{x + 7} + 2 = 0.$$

SOLUCIÓN Empecemos por escribir

$$\sqrt{2x - 3} = \sqrt{x + 7} - 2.$$

Elevamos ambos lados al cuadrado y obtenemos

$$2x - 3 = (x + 7) - 4\sqrt{x + 7} + 4,$$

que se simplifica a $$x - 14 = -4\sqrt{x + 7}.$$

Al elevar al cuadrado ambos lados de la última ecuación y simplificar tenemos que

$$x^2 - 28x + 196 = 16(x + 7)$$

$$x^2 - 28x + 196 = 16x + 112$$

$$x^2 - 44x + 84 = 0$$

$$(x - 42)(x - 2) = 0.$$

Por lo que las únicas soluciones posibles de la ecuación dada son 42 y 2.

Ahora verificamos cada una de ellas por medio de sustitución en la ecuación original. Al sustituir $x = 42$ obtenemos

$$\sqrt{84 - 3} - \sqrt{42 + 7} + 2 = 0$$

o bien $$9 - 7 + 2 = 0$$

lo que es falso. Por tanto, 42 no es solución. Si sustituimos $x = 2$ tenemos que

$$\sqrt{4 - 3} - \sqrt{2 + 7} + 2 = 0$$

o sea que $$1 - 3 + 2 = 0$$

lo cual es verdadero. Se concluye que la ecuación dada sólo tiene una solución, $x = 2$. ■

Se dice que una ecuación es de **tipo cuadrático** si se puede escribir en la forma

$$au^2 + bu + c = 0$$

en donde $a \neq 0$ y u expresa alguna variable. Si encontramos las soluciones en términos de u, entonces las soluciones de la ecuación original se pueden obtener por referencia a la forma específica de u. El ejemplo siguiente ilustra esta técnica.

EJEMPLO 6 Resolver $x^{2/3} + x^{1/3} - 6 = 0$.

SOLUCIÓN Si hacemos $u = x^{1/3}$, entonces la ecuación se puede escribir como

$$u^2 + u - 6 = 0, \quad \text{o bien} \quad (u + 3)(u - 2) = 0.$$

que tiene las soluciones $u = -3$ y $u = 2$.

Como $u = x^{1/3}$, $x^{1/3} = -3$ o bien $x^{1/3} = 2$.

El elevar al cubo da $x = -27$ o bien $x = 8$.

Ahora verificamos cada una de éstas por sustitución. Si tomamos $x = -27$ en la ecuación dada obtenemos

$$[(-27)^{1/3}]^2 + (-27)^{1/3} - 6 = 9 - 3 - 6 = 0.$$

Entonces -27 es una solución. En forma análoga se puede ver que 8 es una solución. De aquí que las soluciones de la ecuación dada sean -27 y 8. ■

EJEMPLO 7 Resolver $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$.

SOLUCIÓN El hacer $u = x^2$ da

$$u^2 - 3u + 1 = 0.$$

Al usar la fórmula cuadrática obtenemos

$$u = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como $u = x^2$, tenemos

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad \text{o sea} \quad x = \pm\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}.$$

Entonces, hay cuatro soluciones posibles

$$\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}, \quad -\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}, \quad \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}, \quad -\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}.$$

■

Ejercicios 2.5

Resuelva las ecuaciones de los Ejercicios 1 a 36.

1. $4x^3 + 12x^2 - 9x - 27 = 0$
2. $2x^3 + 5x^2 - 8x - 20 = 0$
3. $6x^5 + 10x^4 = 3x^3 + 5x^2$
4. $25z^4 + 5z = 125z^3 + z^2$
5. $y^{3/2} = 4y$
6. $2x^3 = 5x^2$

7. $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$

8. $\sqrt{x}\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x} + 6 = 0$

9. $\sqrt{7 - 5x} = 8$

10. $\sqrt{2x - 9} = 3^{-1}$

11. $2 + \sqrt[3]{1 - 5t} = 0$

12. $\sqrt[3]{6 - s^2} + 5 = 0$

13. $\sqrt[5]{2x^2 + 1} - 2 = 0$

14. $\sqrt[4]{2x^2 - 1} = x$

15. $3\sqrt{2x - 3} + 2\sqrt{7 - x} = 11$

16. $\sqrt{2x + 15} - 2 = \sqrt{6x + 1}$

17. $\sqrt{7 - 2x} - \sqrt{5 + x} = \sqrt{4 + 3x}$

18. $4\sqrt{1 + 3x} + \sqrt{6x + 3} = \sqrt{-6x - 1}$

19. $\sqrt{11 + 8x} + 1 = \sqrt{9 + 4x}$

20. $2\sqrt{x} - \sqrt{x - 3} = \sqrt{5 + x}$

21. $\sqrt{2\sqrt{x + 1}} = \sqrt{3x - 5}$

22. $\sqrt{5\sqrt{x}} = \sqrt{2x - 3}$

23. $\sqrt{1 + 4\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1$

24. $\sqrt{x + 1} = \sqrt{x - 1}$

25. $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$

26. $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$

27. $3z^4 - 5z^2 + 1 = 0$

28. $2y^4 + y^2 - 5 = 0$

29. $3x^{2/3} + 8x^{1/3} - 3 = 0$

30. $2t^{1/3} - 5t^{1/6} + 2 = 0$

31. $3w - 19\sqrt{w} + 20 = 0$

32. $2x^{-2/3} + 7x^{-1/3} - 4 = 0$

33. $\frac{2}{(x - 1)^2} + \frac{3}{x - 1} - 2 = 0$

34. $\frac{4}{(x^2 - 1)^2} - \frac{5}{x^2 - 1} + 1 = 0$

35. $\left(\frac{t}{t + 1}\right)^2 + \frac{2t}{t + 1} - 15 = 0$

36. $6u^{-1/2} - 17u^{-1/4} + 5 = 0$

Las fórmulas de los Ejercicios 37 a 42 se presentan en la teoría y las aplicaciones de las matemáticas. Resuelva para evaluar la variable indicada en términos de las variables restantes (todas las letras denotan números reales positivos).

37. $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ para h

38. $d = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - C^2}$ para C

39. $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ para x

40. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ para l

41. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ para y

42. $y = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x})^3$ para x

43. A medida que sale arena de cierto recipiente, forma una pila con forma de cono circular recto, cuya altura es siempre la mitad del diámetro de la base. ¿Cuál es el diámetro de la base en el instante en que han salido del recipiente 144 cm^3 de arena?

44. Si el volumen de un globo esférico aumenta de $10\frac{2}{3}$ m^3 que tenía originalmente a 36 m^3, ¿en cuánto aumenta el diámetro?

45. Un terreno de forma rectangular tiene un área de 1200 pie^2 y la distancia mayor entre cualesquiera dos puntos del mismo es de 50 pie. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

46. Un vaso cónico de papel debe tener una altura de 3 pulg. Halle el radio del cono que tendría un área superficial de 6π pulg^2. (*Sugerencia:* El área lateral de un cono está dada por la ecuación $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$.)

Ejercicios para Calculadora 2.5

Aproxime hasta milésimos las soluciones de las ecuaciones de los Ejercicios 1 a 4.

1. $x^{6/7} - 28x^{1/7} = 0$

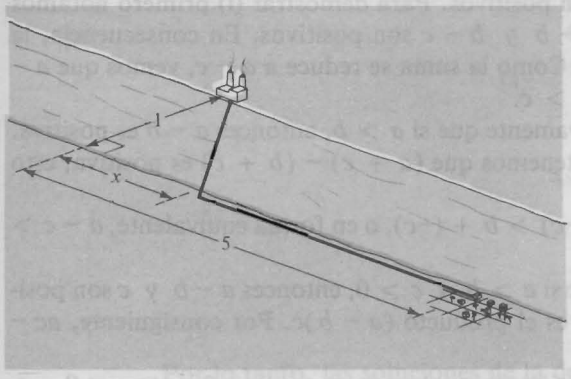
2. $45x^4 - 63x^2 + 14 = 0$

3. $62x^{2/3} - 75x^{1/3} - 23 = 0$

4. $12x^{-2/5} - 19x^{-1/5} - 11 = 0$

5. Se debe instalar una línea de energía eléctrica a través de un río, de 1 milla de ancho, hasta una

FIGURA PARA EL EJERCICIO 5



ciudad que se encuentra a 5 millas río abajo (véase la figura). Tender un cable bajo el agua cuesta $7500 (dólares) por milla, y llevar la línea por tierra cuesta $6000 por milla. Determine la forma que debe tener la instalación si se dispone de $35 000 para este proyecto.

6. Adolphe Quetelet (1796-1874), director del Observatorio de Bruselas de 1832 a 1874 fue la primera persona que intentó ajustar una expresión matemática a los datos del crecimiento humano. La fórmula de Quetelet para varones en Bruselas se puede expresar como

$$h + \frac{h}{100(h_m - h)} = at + \frac{h_0 + t}{1 + (4t/3)},$$

en donde h es la estatura en metros, $h_0 = 0.5$ es el valor al momento de nacer, $h_m = 1.684$ es la estatura final de un adulto, t es la edad en años y $a = 0.545$.

(a) Determine la estatura esperada de un niño de 12 años.

(b) ¿A qué edad se alcanza el 50% de la estatura en la edad adulta?

2.6 Desigualdades

Consideremos la desigualdad

$$x^2 - 3 < 2x + 4$$

en donde x es una variable. Si cierto número tal como 4 o 5 se sustituye en vez de x, obtenemos un resultado falso: $13 < 12$ o bien $22 < 14$, respectivamente. Otros números, como 1 o 2, producen resultados verdaderos: $-2 < 6$ o $1 < 8$. Si un resultado verdadero se obtiene reemplazando x por un número real a, entonces a se llama una **solución** de la desigualdad. Así, 1 y 2 son soluciones de la desigualdad $x^2 - 3 < 2x + 4$, en tanto que 4 y 5 no son soluciones. **Resolver** una desigualdad significa encontrar todas sus soluciones. Decimos que dos desigualdades son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones.

Al igual que con las ecuaciones, para resolver una desigualdad se le reemplaza con una lista de desigualdades equivalentes, terminando con una cuyas soluciones sean evidentes. Las siguientes propiedades son generalmente útiles, cuando a, b y c son números reales.

PROPIEDADES DE >

(i) Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

(ii) Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.

(iii) Si $a > b$, entonces $a - c > b - c$.

(iv) Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$.

(v) Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$.

DEMOSTRACIÓN Usaremos el hecho de que tanto la suma como el producto de dos números reales positivos, son también positivos. Para demostrar (i) primero notamos que si $a > b$ y $b > c$, entonces $a - b$ y $b - c$ son positivos. En consecuencia, la suma $(a - b) + (b - c)$ es positiva. Como la suma se reduce a $a - c$, vemos que $a - c$ es positiva, lo cual significa que $a > c$.

Para establecer (ii) notamos nuevamente que si $a > b$, entonces $a - b$ es positiva. Como $(a + c) - (b + c) = a - b$, tenemos que $(a + c) - (b + c)$ es positiva; esto es, $a + c > b + c$.

Si $a > b$, entonces por (ii), $a + (-c) > b + (-c)$, o en forma equivalente, $a - c > b - c$. Esto prueba (iii).

Para demostrar (iv) obsérvese que si $a > b$ y $c > 0$, entonces $a - b$ y c son positivos y, en consecuencia, también lo es el producto $(a - b)c$. Por consiguiente, $ac - bc$ es positiva; esto es $ac > bc$.

Finalmente, para demostrar (v), primero se observa que si $c < 0$, entonces $0 - c$, o bien, $-c$, es positivo. Además, si $a > b$, entonces $a - b$ es positiva, y en consecuencia, el producto $(a - b)(-c)$ es positivo. Sin embargo, $(a - b)(c) = -ac + bc$ y por lo tanto $bc - ac$ es positiva. Esto significa que $bc > ac$, o bien, $ac < bc$. □

Resultados similares son verdaderos para el símbolo $<$. Así, si $a < b$, entonces se tiene que $a + c < b + c$, etcétera.

Si x representa un número real, entonces por las propiedades (ii) o (iii), sumando o restando la misma expresión en x, a ambos lados de la desigualdad, conduce a una desigualdad equivalente. Por (iv) pueden multiplicarse ambos miembros o lados de una desigualdad por una expresión que contenga x si estamos seguros de que tal expresión es positiva para todos los valores de x considerados. Para ilustrar lo anterior, una multiplicación por $x^4 + 3x^2 + 5$ podría ser admisible si esta expresión fuera siempre positiva. Si se multiplican ambos lados de una desigualdad por una expresión siempre negativa, como $-7 - x^2$, entonces, por (v) el signo de desigualdad se invierte.

EJEMPLO 1 Resolver la desigualdad $-3x + 4 > 11$.

SOLUCIÓN Todas las desigualdades siguientes son equivalentes. (Dígase por qué.)

$$-3x + 4 > 11$$
$$(-3x + 4) - 4 > 11 - 4$$
$$-3x > 7$$
$$(-\tfrac{1}{3})(-3x) < (-\tfrac{1}{3})(7)$$
$$x < -\tfrac{7}{3}$$

Como la última desigualdad es equivalente a la primera, las soluciones de $-3x + 4 > 11$ son todos los números reales x tales que $x < -7/3$. ■

EJEMPLO 2 Resolver la desigualdad $4x - 3 < 2x + 5$.

SOLUCIÓN La siguiente es una lista de desigualdades equivalentes:

$$4x - 3 < 2x + 5$$
$$(4x - 3) + 3 < (2x + 5) + 3$$
$$4x < 2x + 8$$
$$4x - 2x < (2x + 8) - 2x$$
$$2x < 8$$
$$\tfrac{1}{2}(2x) < \tfrac{1}{2}(8)$$
$$x < 4$$

Por lo tanto, las soluciones de la desigualdad dada son todos los números x tales que $x < 4$. ■

Es conveniente dar interpretaciones gráficas de las soluciones de las desigualdades. Por **gráfica** de un conjunto de números reales entendemos la colección de todos los puntos de una recta coordenada l que corresponden a tales números. Para **hacer una gráfica** se destaca (o colorea) una porción adecuada de l. La gráfica que corresponde a las soluciones del Ejemplo 2 consiste en todos los puntos a la izquierda del punto con coordenada 4 y se presenta en la Figura 2.5. El paréntesis en la figura indica que el punto correspondiente a 4 no es parte de la gráfica. Si deseamos incluir tal **extremo** de una gráfica, usamos un paréntesis recto en vez del circular. Esto se ilustra en el Ejemplo 4.

Si $a < b$, a veces se utiliza el símbolo (a, b) para representar todos los números reales entre a y b. A este conjunto se le denomina **intervalo abierto**.

DEFINICIÓN DE INTERVALO ABIERTO

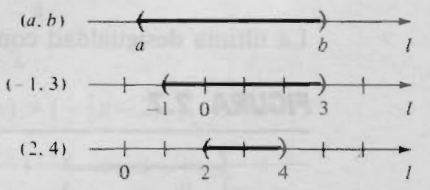
$$(a, b) = \{x : a < x < b\}$$

El símbolo que se encuentra a la derecha del signo igual se traduce por "el conjunto de todos los x tales que $a < x < b$". A los números a y b se les llama **extremos** del intervalo. La gráfica de (a, b) consiste en todos los puntos de una recta coordenada que caen entre los puntos correspondientes a a y b. En la Figura 2.8 hemos dibujado la gráfica de un intervalo abierto general (a, b) y también los intervalos abiertos especiales $(-1, 3)$ y $(2, 4)$. El paréntesis circular en la figura indica que los extremos del intervalo no se incluyen. Por conveniencia usaremos indistintamente los términos *intervalo abierto* y *gráfica de un intervalo abierto*.

FIGURA 2.5



FIGURA 2.6



Las soluciones de una desigualdad a menudo pueden describirse en términos de intervalos, como lo ilustra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Resolver la desigualdad $-6 < 2x - 4 < 2$ y dar la representación gráfica de las soluciones.

SOLUCIÓN Un número real x es una solución de la desigualdad dada si y sólo si es una solución de *las dos* desigualdades siguientes:

$$-6 < 2x - 4 \quad \text{y} \quad 2x - 4 < 2.$$

La primera desigualdad es equivalente a cada una de las siguientes:

$$-6 < 2x - 4$$
$$-6 + 4 < (2x - 4) + 4$$
$$-2 < 2x$$
$$\tfrac{1}{2}(-2) < \tfrac{1}{2}(2x)$$
$$-1 < x$$

La segunda desigualdad es equivalente a cada una de las siguientes:

$$2x - 4 < 2$$
$$2x < 6$$
$$x < 3$$

Entonces, x es una solución de la desigualdad dada si y sólo si se cumplen *las dos* desigualdades siguientes:

$$-1 < x \quad \text{y} \quad x < 3,$$

o sea

$$-1 < x < 3.$$

De aquí que las soluciones sean todos los números del intervalo abierto $(-1, 3)$. La gráfica se presenta en la Figura 2.7.

Puede encontrarse una solución alternativa (y más corta) trabajando simultáneamente con ambas desigualdades como se hace a continuación:

$$-6 < 2x - 4 < 2$$
$$-6 + 4 < 2x < 2 + 4$$
$$-2 < 2x < 6$$
$$-1 < x < 3$$

La última desigualdad concuerda con la primera solución. ■

FIGURA 2.7



Por conveniencia nos referimos al intervalo $(-1, 3)$ como **intervalo solución** de la desigualdad del Ejemplo 3.

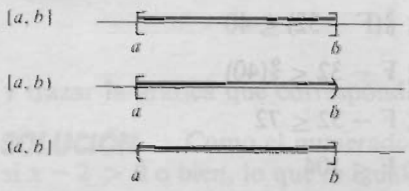
Si deseamos incluir un extremo de un intervalo, en vez de un paréntesis circular utilizamos uno recto. Si $a < b$, entonces los **intervalos cerrados**, que se denotan por $[a, b]$ y los intervalos semiabiertos, denotados mediante $[a, b)$ o bien $(a, b]$ se definen del modo siguiente:

DEFINICIÓN DE INTERVALOS CERRADOS Y SEMIABIERTOS

$$[a, b] = \{x; a \leq x \leq b\}$$
$$[a, b) = \{x: a \leq x < b\}$$
$$(a, b] = \{x: a < x \leq b\}$$

Las gráficas se dibujan como en la Figura 2.8, donde un paréntesis recto indica que el extremo correspondiente es parte de la gráfica.

FIGURA 2.8



EJEMPLO 4 Resolver la desigualdad

$$-5 \leq \frac{4 - 3x}{2} < 1$$

y trazar la gráfica que corresponde a las soluciones.

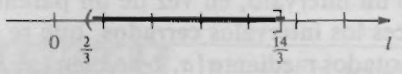
SOLUCIÓN Un número x es solución si y sólo si satisface simultáneamente las desigualdades

$$-5 \leq \frac{4 - 3x}{2} \quad \text{y} \quad \frac{4 - 3x}{2} < 1.$$

Podemos trabajar con cada una separadamente o proceder como en la solución alternativa del Ejemplo 3. Utilicemos esta última técnica como sigue:

$$-5 \leq \frac{4 - 3x}{2} < 1$$
$$-10 \leq 4 - 3x < 2$$
$$-10 - 4 \leq -3x \leq 2 - 4$$
$$-14 \leq -3x < -2$$
$$(-\tfrac{1}{3})(-14) \geq (-\tfrac{1}{3})(-3x) > (-\tfrac{1}{3})(-2)$$
$$\tfrac{14}{3} \geq x > \tfrac{2}{3}$$
$$\tfrac{2}{3} < x \leq \tfrac{14}{3}.$$

FIGURA 2.9



Entonces, el intervalo solución de la desigualdad es $(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}]$. La gráfica se presenta en la Figura 2.9. ■

EJEMPLO 5 Las lecturas de temperatura en las escalas Fahrenheit y Celsius se relacionan con la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. ¿Qué temperaturas F corresponden a $30 \leq C \leq 40$?

SOLUCIÓN Las siguientes desigualdades son equivalentes:

$$30 \leq C \leq 40$$

$$30 \leq \tfrac{5}{9}(F - 32) \leq 40$$

$$\tfrac{9}{5}(30) \leq F - 32 \leq \tfrac{9}{5}(40)$$

$$54 \leq F - 32 \leq 72$$

$$86 \leq F \leq 104$$

Entonces, el intervalo de la temperatura Celsius entre 30°C y 40°C es igual que el intervalo Fahrenheit entre 86°F y 104°F. ■

Para describir soluciones de desigualdades como $x < 4, x > -2, x \leq 7$ o bien $x \geq 3$, conviene utilizar **intervalos infinitos**. En particular, si a es un número real, definimos

$$(-\infty, a) = \{x : x < a\}.$$

Esto es, $(-\infty, a)$ denota al conjunto de todos los números reales menores que a. El símbolo ∞ (llamado **infinito**) es solamente un artificio de notación y no debe interpretarse como un número real. Para ilustrar esto, tomemos el intervalo solución del Ejemplo 1 que es el intervalo infinito $(-\infty, -\frac{7}{3})$, y el del Ejemplo 2, que es $(-\infty, 4)$. La gráfica de $(-\infty, 4)$ se ilustra en la Figura 2.5.

Si deseamos incluir el punto correspondiente a a escribimos

$$(-\infty, a] = \{x : x \leq a\}.$$

Otros tipos de intervalos infinitos se definen mediante

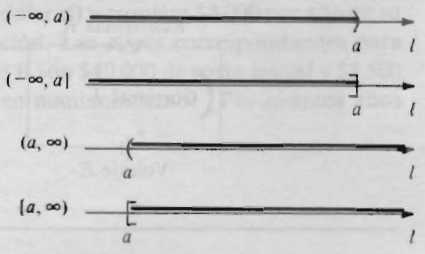
$$(a, \infty) = \{x : x > a\}$$

$$[a, \infty) = \{x : x \geq a\}.$$

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se denota algunas veces mediante $(-\infty, \infty)$.

En la Figura 2.10 se presentan las gráficas de los intervalos infinitos para un número real arbitrario a. La ausencia de un paréntesis a la izquierda de las gráficas de $(-\infty, a)$

FIGURA 2.10



y $(-\infty, a]$ y a la derecha de (a, ∞) y $[a, \infty)$, indica que las porciones de trazo grueso se extienden indefinidamente.

EJEMPLO 6 Resolver

$$\frac{1}{x-2} > 0$$

y trazar la gráfica que corresponde a las soluciones.

SOLUCIÓN Como el numerador es positivo, la fracción dada es positiva si y sólo si $x - 2 > 0$ o bien, lo que es igual, $x > 2$. Por tanto, el intervalo solución es $(2, \infty)$. La gráfica es la de la Figura 2.11. ■

FIGURA 2.11



Ejercicios 2.6

1. Dado que $-6 < -4$, ¿qué desigualdad se obtiene si:
   (a) se suma 5 en ambos lados?
   (b) se resta 5 de ambos miembros?
   (c) ambos lados se multiplican por $\frac{1}{2}$?
   (d) ambos lados se multiplican por $-\frac{1}{2}$?

2. Dado que $3 > -3$, ¿qué desigualdad se obtiene si:
   (a) se suma 3 en ambos miembros?
   (b) se suma -3 en ambos lados?
   (c) ambos lados se dividen entre 3?
   (d) ambos lados se dividen entre -3?

En cada uno de los Ejercicios 3 a 12 exprese la desigualdad dada en notación de intervalo y trace la gráfica del intervalo.

3. $2 < x < 5$
4. $-1 < x < 2$
5. $-1 < x \leq 3$
6. $-2 \geq x \geq -3$
7. $4 \geq x \geq 1$
8. $0 < x \leq 4$
9. $x > -1$
10. $x < 1$
11. $x \leq 2$
12. $x \geq -3$

Exprese cada uno de los intervalos de los Ejercicios 13 a 18 como una desigualdad en la variable x.

13. $(-1, 7)$
14. $[5, 12]$
15. $(8, 9]$
16. $[-5, 0)$
17. $(5, \infty)$
18. $(-\infty, 7]$

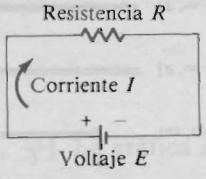
Resuelva las desigualdades de los Ejercicios 19 a 42 y exprese las soluciones en términos de intervalos.

19. $5x - 6 > 11$
20. $3x - 5 < 10$
21. $2 - 7x \leq 16$
22. $7 - 2x \geq -3$
23. $3x + 1 < 5x - 4$
24. $6x - 5 > 9x + 1$
25. $4 - \frac{1}{2}x \geq -7 + \frac{1}{4}x$
26. $\frac{1}{3}x - 4 \leq \frac{1}{4}x - 6$
27. $-4 < 3x + 5 < 8$
28. $6 > 2x - 6 > 4$
29. $3 \geq \dfrac{7 - x}{2} \geq 1$
30. $-2 \leq \dfrac{5 - 3x}{4} \leq \dfrac{1}{2}$
31. $0 < 2 - \frac{3}{4}x \leq \frac{1}{2}$
32. $-3 < \frac{1}{2}x - 4 \leq 0$
33. $(3x + 1)(2x - 4) < (6x - 2)(x + 5)$
34. $(x + 2)(x - 5) < (x - 1)^2$
35. $(x + 2)^2 > x(x - 2)$
36. $2x(8x - 1) \geq (4x + 1)(4x - 3)$
37. $\dfrac{5}{3x + 7} > 0$
38. $\dfrac{1}{6 - 2x} < 0$
39. $(1 - 4x)^{-1} < 0$
40. $(x + 4)^{-1} > 0$
41. $\dfrac{1}{(x - 1)^2} > 0$
42. $\dfrac{1}{x^2 + 1} < 0$

43. La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit y Celsius está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Si $60 \leq F \leq 80$, exprese el intervalo correspondiente de C en términos de una desigualdad.

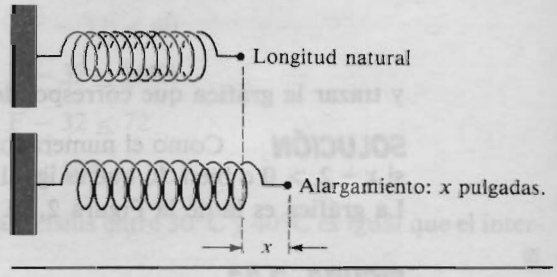
44. En el estudio de la electricidad, la ley de Ohm expresa que si se denota por R a la resistencia de un objeto (en ohms, Ω), por E a la diferencia de potencial (voltaje) a través del objeto (en volts, V) y por I a la corriente que fluye a través de él (en amperes, A), entonces $R = E/I$ (véase la figura). Si el voltaje es de 110 V, ¿qué valores de la resistencia resultarán en una corriente que no excede de 10 A?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 44



45. De acuerdo con la Ley de Hooke, la fuerza F (en libras) que se requiere para estirar un resorte x pulgadas más de su longitud natural está dada por $F = (4.5)x$ (véase la figura). Si $10 \leq F \leq 18$, ¿cuál es el intervalo correspondiente de x?

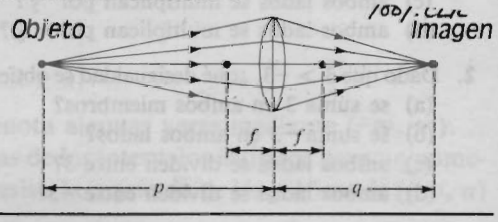
FIGURA PARA EL EJERCICIO 45



46. Si se conectan dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo en un circuito eléctrico, la resistencia neta está dada por $1/R = (1/R_1) + (1/R_2)$. (Compare con el Ejemplo 3 de la Sección 2.2.) Si $R_1 = 10\ \Omega$, ¿qué valores de R_2 resultarán en una resistencia neta menor que $5\ \Omega$?

47. Una lente convexa tiene una distancia focal $f = 5$ cm. Si se coloca un objeto a una distancia p cm de la lente, la distancia q a la que se encuentra la imagen de la lente está relacionada con p y con f mediante la fórmula $(1/p) + (1/q) = 1/f$ (véase la figura). ¿Qué tan cerca de la lente debe estar el objeto para que la imagen esté a más de 12 cm de la lente?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 47



Exprese cada uno de los intervalos de los Ejercicios 13 a 18 como una desigualdad en la variable x.

13. $(-1, 7)$
14. $[5, 12]$
15. $(8, 9]$
16. $[-5, 0)$
17. $(5, \infty)$
18. $(-\infty, 7]$

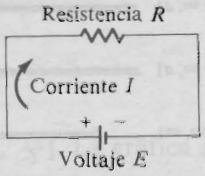
Resuelva las desigualdades de los Ejercicios 19 a 42 y exprese las soluciones en términos de intervalos.

19. $5x - 6 > 11$
20. $3x - 5 < 10$
21. $2 - 7x \leq 16$
22. $7 - 2x \geq -3$
23. $3x + 1 < 5x - 4$
24. $6x - 5 > 9x + 1$
25. $4 - \frac{1}{2}x \geq -7 + \frac{1}{4}x$
26. $\frac{1}{3}x - 4 \leq \frac{1}{4}x - 6$
27. $-4 < 3x + 5 < 8$
28. $6 > 2x - 6 > 4$
29. $3 \geq \dfrac{7 - x}{2} \geq 1$
30. $-2 \leq \dfrac{5 - 3x}{4} \leq \dfrac{1}{2}$
31. $0 < 2 - \frac{3}{4}x \leq \frac{1}{2}$
32. $-3 < \frac{1}{2}x - 4 \leq 0$
33. $(3x + 1)(2x - 4) < (6x - 2)(x + 5)$
34. $(x + 2)(x - 5) < (x - 1)^2$
35. $(x + 2)^2 > x(x - 2)$
36. $2x(8x - 1) \geq (4x + 1)(4x - 3)$
37. $\dfrac{5}{3x + 7} > 0$
38. $\dfrac{1}{6 - 2x} < 0$
39. $(1 - 4x)^{-1} < 0$
40. $(x + 4)^{-1} > 0$
41. $\dfrac{1}{(x - 1)^2} > 0$
42. $\dfrac{1}{x^2 + 1} < 0$

43. La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit y Celsius está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Si $60 \leq F \leq 80$, exprese el intervalo correspondiente de C en términos de una desigualdad.

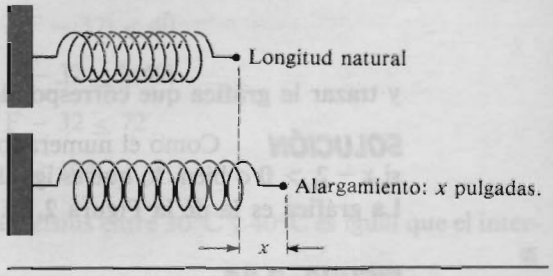
44. En el estudio de la electricidad, la ley de Ohm expresa que si se denota por R a la resistencia de un objeto (en ohms, Ω), por E a la diferencia de potencial (voltaje) a través del objeto (en volts, V) y por I a la corriente que fluye a través de él (en amperes, A), entonces $R = E/I$ (véase la figura). Si el voltaje es de 110 V, ¿qué valores de la resistencia resultarán en una corriente que no excede de 10 A?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 44



45. De acuerdo con la Ley de Hooke, la fuerza F (en libras) que se requiere para estirar un resorte x pulgadas más de su longitud natural está dada por $F = (4.5)x$ (véase la figura). Si $10 \leq F \leq 18$, ¿cuál es el intervalo correspondiente de x?

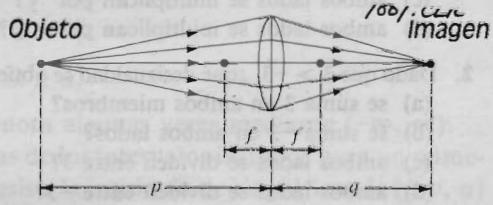
FIGURA PARA EL EJERCICIO 45



46. Si se conectan dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo en un circuito eléctrico, la resistencia neta está dada por $1/R = (1/R_1) + (1/R_2)$. (Compare con el Ejemplo 3 de la Sección 2.2.) Si $R_1 = 10\ \Omega$, ¿qué valores de R_2 resultarán en una resistencia neta menor que $5\ \Omega$?

47. Una lente convexa tiene una distancia focal $f = 5$ cm. Si se coloca un objeto a una distancia p cm de la lente, la distancia q a la que se encuentra la imagen de la lente está relacionada con p y con f mediante la fórmula $(1/p) + (1/q) = 1/f$ (véase la figura). ¿Qué tan cerca de la lente debe estar el objeto para que la imagen esté a más de 12 cm de la lente?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 47



48. Una empresa constructora ha de decidir cuál de dos modelos de grúa ha de comprar. El A cuesta \$50 000 (dólares) y requiere \$4 000 por año en su conservación. Las cifras correspondientes para el modelo B son \$40 000 de costo inicial y \$5 500 por año en mantenimiento. ¿Por cuántos años ha de usarse el modelo A antes de que resulte más económico que el B?

49. Si $0 < a < b$, demuestre que $(1/a) > (1/b)$. ¿Por qué es necesaria la restricción $0 < a$?

50. Si $0 < a < b$, demuestre que $a^2 < b^2$. ¿Por qué es necesaria la restricción $0 < a$?

2.7 Algo más acerca de desigualdades

Si a es un número real, entonces la desigualdad $|a| < 1$ es equivalente a $-1 < a < 1$. Esto, a su vez, significa que a está en el intervalo abierto $(-1, 1)$. En general, si b es cualquier número real positivo, puede demostrarse lo siguiente.

PROPIEDADES DE LOS VALORES ABSOLUTOS ($b > 0$)

(i)	$\|a\| < b$	si y sólo si $-b < a < b$
(ii)	$\|a\| > b$	si y sólo si $a > b$ o bien $a < -b$
(iii)	$\|a\| = b$	si y sólo si $a = b$ o bien $a = -b$

Las propiedades (ii) y (iii) se verifican también si $b = 0$. Por tanto, si $b > 0$, entonces

$$|a| \leq b \quad \text{si y sólo si} \quad -b \leq a \leq b$$

y

$$|a| \geq b \quad \text{si y sólo si} \quad a \geq b \text{ o bien } a \leq -b.$$

EJEMPLO 1 Resolver cada una de las siguientes desigualdades:

SOLUCIÓN (a) $|x| < 4$ (b) $|x| > 4$ (c) $|x| = 4$.

(a) Si usamos la propiedad (i) con $a = x$ y $b = 4$ vemos que

$$|x| < 4 \quad \text{si y sólo si} \quad -4 < x < 4.$$

Entonces, la solución es todos los números reales en el intervalo abierto $(-4, 4)$.

(b) Por la propiedad (ii), $|x| > 4$ significa que $x > 4$, o bien $x < -4$. De modo que las soluciones son todos los números reales en los dos intervalos infinitos $(-\infty, -4)$ y $(4, \infty)$.

(c) Por la propiedad (iii),

$$|x| = 4 \quad \text{si y sólo si} \quad x = 4 \quad \text{o bien} \quad x = -4. \qquad \blacksquare$$

Para las soluciones del tipo de las que se obtuvieron en (b) del Ejemplo 1, es algunas veces conveniente utilizar el símbolo de **unión**, $\cup$, y escribir

$$(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$$

para denotar todos los números reales x tales que están en $(-\infty, -4)$ o en $(4, \infty)$.

EJEMPLO 2 Resolver la desigualdad $|x - 3| < 0.1$.

SOLUCIÓN Por la propiedad (i), con $a = x - 3$ y $b = 0.1$, la desigualdad dada es equivalente a

$$-0.1 < x - 3 < 0.1$$

y por lo tanto a $$-0.1 + 3 < (x - 3) + 3 < 0.1 + 3$$

o sea $$2.9 < x < 3.1.$$

En consecuencia, el intervalo solución de la desigualdad dada es todos los números reales en $(2.9, 3.1)$. ■

EJEMPLO 3 Si a y δ denotan números reales y $\delta > 0$, resolver la desigualdad

$$|x - a| < \delta$$

y representar las soluciones gráficamente.

SOLUCIÓN Se puede proceder como en el Ejemplo 2. Así,

$$-\delta < x - a < \delta$$

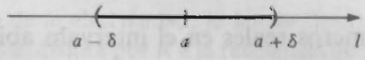
$$a - \delta < a + (x - a) < a + \delta$$

$$a - \delta < x < a + \delta.$$

Las soluciones de la desigualdad consisten en todos los números reales en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$. En la Figura 2.12 se muestra una gráfica típica. ■

FIGURA 2.12

$|x - a| < \delta$



Nótese que el Ejemplo 2 es un caso especial del Ejemplo 3, en el que $a = 3$ y $\delta = 0.1$.

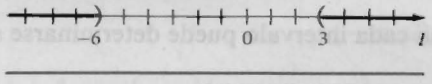
EJEMPLO 4 Resolver $|2x + 3| > 9$ e ilustrar las soluciones gráficamente.

SOLUCIÓN Por la propiedad (ii), con $a = 2x + 3$ y $b = 9$, las soluciones de la desigualdad dada son las soluciones de las *dos* desigualdades

$$\text{(i) } 2x + 3 > 9 \quad \text{y} \quad \text{(ii) } 2x + 3 < -9.$$

La desigualdad (i) es equivalente a $2x > 6$ o sea $x > 3$. Esto da el intervalo infinito $(3, \infty)$. La desigualdad (ii) es equivalente a $2x < -12$ o bien $x < -6$, lo cual lleva al intervalo $(-\infty, -6)$. En consecuencia, las soluciones de $|2x + 3| > 9$ son los números de la unión $(-\infty, -6) \cup (3, \infty)$. La gráfica se presenta en la Figura 2.13. ■

FIGURA 2.13



Para resolver desigualdades donde intervengan polinomios de grado mayor que 1, se usa el siguiente teorema, que se discutirá más ampliamente en la Sección 4.2. En el enunciado del teorema la frase *soluciones sucesivas c* y *d* significa que no hay otras soluciones entre *c* y *d*.

TEOREMA

Sea $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio. Si los números reales *c* y *d* son soluciones sucesivas de la ecuación

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

entonces cuando *x* está en el intervalo abierto (c, d) todos los valores del polinomio son positivos o bien todos son negativos.

Este teorema implica que si escogemos *cualquier* número *k*, tal que $c < k < d$, y si el valor del polinomio es positivo para $x = k$, entonces el polinomio es positivo para *toda x* en (c, d). De manera similar, si el polinomio es negativo para $x = k$, entonces es negativo en todo el intervalo (c, d). Al valor del polinomio en $x = k$ lo llamaremos **valor de prueba** para el intervalo (c, d). Los valores de prueba se pueden usar en intervalos infinitos de la forma $(-\infty, a)$ o bien (a, ∞), siempre y cuando la ecuación del polinomio no tenga soluciones en estos intervalos. El uso de los valores de prueba se muestra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 Resolver $2x^2 - x < 3$.

SOLUCIÓN Para utilizar el método que describiremos aquí, *es esencial que todos los términos diferentes de cero estén en el mismo lado* del signo de desigualdad. Empezamos escribiendo

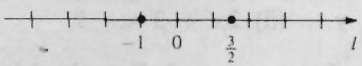
$$2x^2 - x - 3 < 0.$$

Factorizando da

$$(x + 1)(2x - 3) < 0.$$

Observamos, a partir de la forma factorizada, que la ecuación $2x^2 - x - 3 = 0$ tiene

FIGURA 2.14



las soluciones -1 y $\frac{3}{2}$. Para referencia se ubican los puntos correspondientes en un eje real, como en la Figura 2.14. Estos puntos dividen el eje en tres partes y determinan los siguientes intervalos:

$$(-\infty, -1), \qquad (-1, \tfrac{3}{2}), \qquad (\tfrac{3}{2}, \infty).$$

El signo del polinomio $2x^2 - x - 3$ en cada intervalo puede determinarse si se encuentra un valor de prueba adecuado.

Si escogemos -2 en $(-\infty, -1)$, entonces el polinomio $2x^2 - x - 3$ tiene el valor

$$2(-2)^2 - (-2) - 3 = 8 + 2 - 3 = 7.$$

Como 7 es positivo, se concluye que $2x^2 - x - 3 > 0$ para cada x de $(-\infty, -1)$.

Si escogemos 0 en $(-1, \frac{3}{2})$, el polinomio tiene el valor de

$$2(0)^2 - (0) - 3 = -3.$$

Como -3 es negativo $2x^2 - x - 3 < 0$ para toda x en $(-1, \frac{3}{2})$.

Finalmente, si escogemos 2 en $(\frac{3}{2}, \infty)$ obtenemos

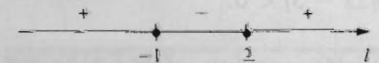
$$2(2)^2 - 2 - 3 = 8 - 2 - 3 = 3,$$

y como 3 es positivo, $2x^2 - x - 3 > 0$ en todo el intervalo $(\frac{3}{2}, \infty)$. Es conveniente tabular estos hechos como sigue:

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, \infty)$
k	-2	0	2
Valor de prueba de $2x^2 - x - 3$ para k	7	-3	3
Signo de $2x^2 - x - 3$ en el intervalo	+	−	+

La Figura 2.15 ilustra gráficamente los intervalos en los que $2x^2 - x - 3$ es positivo o negativo. Por tanto, las soluciones $2x^2 - x - 3 < 0$, o equivalentemente, $2x^2 - x < 3$, son los números reales en el intervalo $(-1, \frac{3}{2})$. ■

FIGURA 2.15



EJEMPLO 6 Resolver la desigualdad $x^2 > 7x - 10$ y representar en una gráfica las soluciones.

SOLUCIÓN Como en el Ejemplo 5, trasladamos todos los términos a un lado de la desigualdad, obteniendo

$$x^2 - 7x + 10 > 0.$$

Factorizando queda $$(x - 2)(x - 5) > 0.$$

Los puntos correspondientes a las soluciones 2 y 5 de $x^2 - 7x + 10 = 0$ se presentan en la Figura 2.16. Al referirnos a la figura, obtenemos los intervalos:

$$(-\infty, 2), \quad (2, 5), \quad (5, \infty).$$

A continuación usamos valores de prueba para determinar el signo de $x^2 - 7x + 10$ en cada intervalo. La tabla siguiente resume los resultados. (*Verifique toda la tabla.*)

Intervalo	$(-\infty, 2)$	$(2, 5)$	$(5, \infty)$
k	0	3	6
Valor de prueba de $x^2 - 7x + 10$ para k	$0^2 - 7(0) + 10 = 10$	$3^2 - 7(3) + 10 = -2$	$6^2 - 7(6) + 10 = 4$
Signo de $x^2 - 7x + 10$ en el intervalo	+	−	+

FIGURA 2.16

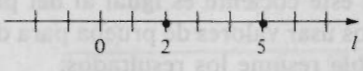
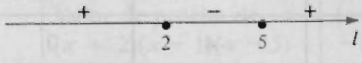
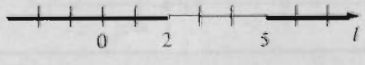


FIGURA 2.17



La Figura 2.17 ilustra gráficamente donde $x^2 - 7x + 10$ es positiva o negativa. Así, $x^2 - 7x + 10 > 0$ si está en $(-\infty, 2)$ o bien en $(5, \infty)$. Las soluciones de la desigualdad están dadas por $(-\infty, 2) \cup (5, \infty)$. La gráfica se presenta en la Figura 2.18. ■

FIGURA 2.18



EJEMPLO 7 Resolver $\dfrac{x+1}{x+3} \leq 2$ y representar gráficamente las soluciones.

SOLUCIÓN Primero trasladamos todos los términos distintos de cero a un lado del símbolo de desigualdad y luego se procede como sigue:

$$\frac{x+1}{x+3} \leq 2$$

$$\frac{x+1}{x+3} - 2 \leq 0$$

$$\frac{x+1-2x-6}{x+3} \leq 0$$

$$\frac{-x-5}{x+3} \leq 0$$

$$\frac{x+5}{x+3} \geq 0$$

El numerador y el denominador de $(x + 5)/(x + 3)$ es igual a cero en $x = -5$ y $x = -3$, respectivamente. Para referencia, ubicamos estos puntos como se ve en la Figura 2.19. Notemos que -5 es una solución de $(x + 5)/(x + 3) \geq 0$; sin embargo, -3 *no* es solución ya que aparece un denominador cero si x se sustituye por -3. Los puntos de la figura determinan los intervalos siguientes:

$$(-\infty, -5), \qquad (-5, -3), \qquad (-3, \infty)$$

Como $(x + 5)/(x + 3)$ es un cociente de dos polinomios, siempre es positivo o siempre es negativo en todo un intervalo. (El signo de este cociente es igual al del producto $(x + 5)(x + 3)$.) Como anteriormente, podemos usar valores de prueba para determinar el signo en cada intervalo. La siguiente tabla resume los resultados:

Intervalo	$(-\infty, -5)$	$(-5, -3)$	$(-3, \infty)$
k	-6	-4	0
Valor de prueba de $(x + 5)/(x + 3)$ para k	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{5}{3}$
Signo de $(x + 5)/(x + 3)$ en el intervalo	$+$	$-$	$+$

FIGURA 2.19

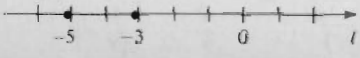


FIGURA 2.20

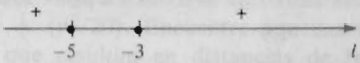
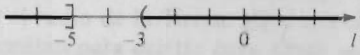


FIGURA 2.21



La Figura 2.20 indica donde $(x + 5)/(x + 3)$ es positivo o negativo. Así, las soluciones de $(x + 5)/(x + 3) > 0$ están dadas por $(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$. Las soluciones de $(x + 5)/(x + 3) \geq 0$ están dadas por $(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$. ■

EJEMPLO 8 Resolver la desigualdad $(x + 2)(x - 5) > 0$ y representar gráficamente las soluciones.

SOLUCIÓN La expresión $(x + 2)(x - 1)(x - 5)$ es cero en -2, 1 y 5. Los puntos correspondientes se representan en un eje real en la Figura 2.22. Estos puntos determinan los cuatro intervalos:

$$(-\infty, -2), \quad (-2, 1), \quad (1, 5), \quad (5, \infty)$$

Ahora utilizamos valores de prueba, como lo muestra la tabla siguiente.

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, 5)$	$(5, \infty)$
k	-3	0	2	6
Valor de prueba de $(x + 2)(x - 1)(x - 5)$	$(-1)(-4)(-8) = -32$	$(2)(-1)(-5) = 10$	$(4)(1)(-3) = -12$	$(8)(5)(1) = 40$
Signo de $(x + 2)(x - 1)(x - 5)$ en el intervalo	$-$	$+$	$-$	$+$

FIGURA 2.22

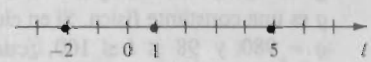


FIGURA 2.20

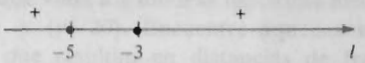
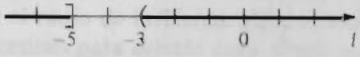


FIGURA 2.21



La Figura 2.20 indica donde $(x + 5)/(x + 3)$ es positivo o negativo. Así, las soluciones de $(x + 5)/(x + 3) > 0$ están dadas por $(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$. Las soluciones de $(x + 5)/(x + 3) \geq 0$ están dadas por $(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$. ■

EJEMPLO 8 Resolver la desigualdad $(x + 2)(x - 5) > 0$ y representar gráficamente las soluciones.

SOLUCIÓN La expresión $(x + 2)(x - 1)(x - 5)$ es cero en -2, 1 y 5. Los puntos correspondientes se representan en un eje real en la Figura 2.22. Estos puntos determinan los cuatro intervalos:

$$(-\infty, -2), \quad (-2, 1), \quad (1, 5), \quad (5, \infty)$$

Ahora utilizamos valores de prueba, como lo muestra la tabla siguiente.

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, 5)$	$(5, \infty)$
k	-3	0	2	6
Valor de prueba de $(x + 2)(x - 1)(x - 5)$	$(-1)(-4)(-8) = -32$	$(2)(-1)(-5) = 10$	$(4)(1)(-3) = -12$	$(8)(5)(1) = 40$
Signo de $(x + 2)(x - 1)(x - 5)$ en el intervalo	$-$	$+$	$-$	$+$

FIGURA 2.22

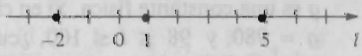
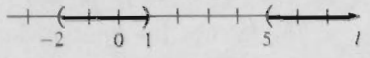


FIGURA 2.23



FIGURA 2.24



La Figura 2.23 muestra donde $(x + 2)(x - 1)(x - 5)$ es positiva o negativa. Así, las soluciones de $(x + 2)(x - 1)(x - 5) > 0$ están dadas por $(-2, 1) \cup (5, \infty)$. La gráfica es la que aparece en la Figura 2.24. ■

Ejercicios 2.7

Resuelva las desigualdades de los Ejercicios 1 a 38 y exprese las soluciones en términos de intervalos.

1. $|x| < 2$
2. $|x| < 25$
3. $|x| > 6$
4. $|x| > \frac{1}{2}$
5. $|-x| \leq 10$
6. $|x| \geq 7$
7. $|x - 10| < 0.05$
8. $|x - 5| < 0.001$
9. $\left|\frac{x+4}{3}\right| \leq 2$
10. $\left|\frac{x+1}{5}\right| \leq 1$
11. $|5 - 3x| < 7$
12. $|7x + 4| < 10$
13. $|2x + 4| > 8$
14. $|6x - 7| \geq 4$
15. $\frac{3}{|5 - 2x|} \leq 1$
16. $\left|\frac{4-x}{2}\right| > 9$
17. $x^2 - x - 6 < 0$
18. $x^2 + 6x + 5 < 0$
19. $x(2x + 3) > 5$
20. $x(3x - 1) > 4$
21. $x^2 \leq 10x$
22. $4x^2 \geq x$
23. $(2x + 1)(10 - 3x) < 0$
24. $(9 - 4x)(x + 1) \geq 0$
25. $x^2 < 9$
26. $25x^2 - 16 > 0$
27. $\frac{7x}{x^2 - 16} \geq 0$
28. $\frac{x-2}{x^2 - 9} < 0$
29. $\frac{x^2 - 25}{4x^2 - 9} \leq 0$
30. $\frac{10}{x^4 - 16} > 0$
31. $\frac{x+4}{2x-1} < 3$
32. $\frac{1}{x-2} > \frac{3}{x+1}$
33. $x^3 < x$
34. $x^4 + 3x^2 > 4$
35. $x^3 - x^2 - 4x + 4 \geq 0$
36. $(x^2 - 4x + 4)(3x - 7) < 0$
37. $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 3} \geq 0$
38. $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x} \leq 0$
39. Si se dispara un proyectil perpendicularmente hacia arriba, desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial de 72 pie/s, su altura s (en metros) después de t segundos está dada por $s = -16t^2 + 72t$. ¿Durante qué intervalo de tiempo estará el proyectil a más de 32 pie del suelo?
40. El periodo T (s) de un péndulo sencillo de longitud l (cm) está dado por $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, en donde g es una constante física. Si en ciertas condiciones $g = 980$ y $98 \leq l \leq 100$, ¿cuál es el intervalo correspondiente de T?

41. La distancia de frenado d (en pies) de un automóvil que viaja a v mi/h se aproxima mediante $d = v + (v^2/20)$. Encuentre aquellas velocidades que resultan en distancias de frenado menores que 75 pie.

42. Para que un satélite se mantenga en órbita a una altura de h kilómetros, su velocidad (en km/s) debe ser igual a $626.4/\sqrt{h + R}$, en donde $R = 6\,372$ km en el radio de la Tierra. ¿Qué velocidades se necesitan para órbitas cuya altura sea mayor que 100 km medida desde la superficie de la Tierra?

43. Para una población particular de salmón, la relación entre el número S de hembras y el número R de crías que sobreviven hasta la edad madura está dada por la fórmula $R = 4\,500S/(S + 500)$. ¿En qué condiciones es $R > S$?

44. Determine cuándo un cubo de x unidades de lado tendrá un volumen mayor en valor numérico que su área superficial en valor numérico.

45. Para que cualquier medicamento tenga un efecto benéfico su concentración en el torrente sanguíneo debe exceder un cierto valor llamado *nivel terapéutico mínimo*. Suponga que la concentración c de un fármaco al transcurrir t horas después de que se ha ingerido está dada por $c = 20t/(t^2 + 4)$ mg/litro. Si el nivel terapéutico mínimo es de 4 mg/litro, determine cuándo se ha excedido este nivel.

46. Conforme se calienta un recipiente que contiene 10 moles de gas A, la velocidad de las moléculas del gas aumenta y se forma un segundo gas B. Cuando dos moléculas del gas A chocan, se forman dos moléculas del gas B. Si el número de moles del gas B después de t minutos es $10t/(t + 4)$, ¿cuándo habrá más moléculas del gas B que del A?

2.8 Repaso

Defina y explique cada una de las siguientes expresiones.

1. Solución de una ecuación.
2. Raíz de una ecuación.
3. Identidad.
4. Ecuación condicional.
5. Ecuaciones equivalentes.
6. Ecuación lineal.
7. Ecuación cuadrática.
8. La fórmula cuadrática.
9. Discriminante de una ecuación cuadrática.
10. Números complejos.
11. Conjugado de un número complejo.
12. Solución extraña.
13. Propiedades de las desigualdades.
14. Solución de una desigualdad.
15. Desigualdades equivalentes.
16. Gráfica de un conjunto de números reales.
17. Intervalo abierto.
18. Intervalo cerrado.
19. Intervalo semiabierto.
20. Intervalo infinito.

Ejercicios 2.8

Resuelva las ecuaciones y desigualdades de los Ejercicios 1 a 34.

1. $\dfrac{3x+1}{5x+7} = \dfrac{6x+11}{10x-3}$

2. $2 - \dfrac{1}{x} = 1 + \dfrac{4}{x}$

3. $\dfrac{2}{x+5} - \dfrac{3}{2x+1} = \dfrac{5}{6x+3}$

4. $\dfrac{7}{x-2} - \dfrac{6}{x^2-4} = \dfrac{3}{2x+4}$

5. $\frac{1}{\sqrt{x}} - 2 = \frac{1 - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

6. $2x^2 + 5x - 12 = 0$

7. $x(3x + 4) = 5$

8. $\frac{x}{3x + 1} = \frac{x - 1}{2x + 3}$

9. $(x - 2)(x + 1) = 3$

10. $4x^4 - 33x^2 + 50 = 0$

11. $x^{2/3} - 2x^{1/3} - 15 = 0$

12. $20x^3 + 8x^2 - 35x - 14 = 0$

13. $5x^2 = 2x - 3$

14. $x^2 + \frac{1}{3}x + 2 = 0$

15. $6x^4 + 29x^2 + 28 = 0$

16. $x^4 + x^2 + 1 = 0$

17. $\frac{1}{x} + 6 = \frac{5}{\sqrt{x}}$

18. $\sqrt[3]{4x - 5} - 2 = 0$

19. $\sqrt{7x + 2} + x = 6$

20. $\sqrt{x + 4} = \sqrt[4]{6x + 19}$

21. $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x + 4} = 1$

22. $10 - 7x < 4 + 2x$

23. $-\frac{1}{2} < \frac{2x + 3}{5} < \frac{3}{2}$

24. $(3x - 1)(10x + 4) \geq (6x - 5)(5x - 7)$

25. $\frac{6}{10x + 3} < 0$

26. $|4x + 7| < 21$

27. $|16 - 3x| \geq 5$

28. $2 < |x - 6| < 4$

29. $10x^2 + 11x > 6$

30. $x(x - 3) \leq 10$

31. $\frac{3}{2x + 3} < \frac{1}{x - 2}$

32. $\frac{x + 1}{x^2 - 25} \leq 0$

33. $x^3 > x^2$

34. $(x^2 - x)(x^2 - 5x + 6) < 0$

En los Ejercicios 35 a 40 resuelva para evaluar las variables indicadas en términos de las otras variables.

35. $S = \pi(r + R)s$ para R

36. $S = 2(ab + bc + ac)$ para a

37. $n = \frac{\pi P R^4}{8VL}$ para R

38. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ para r

39. $\frac{1}{R} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ para R_2

40. $V = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$ para R_1

Exprese los números complejos de los Ejercicios 41 a 46 en la forma $a + bi$, donde a y b son números complejos.

41. $(7 + 5i) + (-8 + 3i)$

42. $(4 + 2i)(-5 + 4i)$

43. $(3 + 8i)^2$

44. $\frac{1}{9 - 2i}$

45. $\frac{6 - 3i}{2 + 7i}$

46. $\frac{20 - 8i}{4i}$

47. La diagonal de un cuadrado mide 50 cm. ¿Qué cambio en la longitud de un lado aumentará el área en 46 cm^2?

48. El área de la superficie S de una esfera de radio r está dada por la fórmula $S = 4\pi r^2$. Si $r = 6$ cm, ¿qué cambio del radio aumentará el área de la superficie en 36π cm^2?

49. Un avión vuela con el viento a su favor durante 30 min y de regreso recorre la misma distancia en 45 min. Si la velocidad del avión es de 320 millas por hora calcule la velocidad del viento.

50. Un comerciante desea mezclar cacahuates que cuestan \$150 el kilogramo, con nueces que cuestan \$400 el kilogramo, para obtener 50 kg de una mezcla que cueste \$240 el kilogramo. ¿Cuántos kilogramos de cada uno deben utilizarse?

51. Una solución de alcohol etílico que tiene 75% de alcohol en peso ha de usarse como bactericida. La solución se preparará agregando agua a una solución de 95% de alcohol. ¿Cuántos gramos de cada sustancia deben emplearse para preparar 400 gramos del bactericida?

52. Un panel solar grande requiere 120 galones de un líquido que es 30% anticongelante. El líquido viene en una solución de 50% o de 20%. ¿Cuántos galones de cada una deben usarse para preparar la solución de 120 galones?

53. Cuando dos resistores R_1 y R_2 se conectan en paralelo, la resistencia neta R está dada por $1/R = (1/R_1) + (1/R_2)$. Si $R_1 = 5\,\Omega$ (ohms), ¿cuál es el valor de R_2 tal que la resistencia neta o equivalente es de $2\,\Omega$?

54. Un remolcador puede traer a puerto un buque en 2 horas, en tanto que uno más pequeño puede efectuar ese trabajo en 3 horas. Calcule el número de horas que necesitan ambos remolcadores para llevar a puerto el barco.

55. Una lancha de motor carga 10 galones de gasolina y, cuando viaja a plena marcha en aguas tranquilas, corre a 20 millas por hora y desarrolla 16 millas por galón. La lancha navega contra una corriente de 5 millas por hora. ¿A qué distancia puede llegar en esas condiciones y regresar al punto de partida con los 10 galones de gasolina, si será conducida a plena marcha durante todo el recorrido?

56. Un automovilista promedió 42 km/h manejando fuera de la ciudad y 25 km/h dentro de la ciudad. Si un viaje de 80 km le toma dos horas, ¿cuánto tiempo manejó en la ciudad?

57. El ancho de una página de un libro es 2 pulg menos de lo que mide el largo. El área impresa es de 72 pulg^2, con márgenes de 1 pulg arriba y abajo y márgenes de $\frac{1}{2}$ pulg en los lados. Halle las dimensiones de la página.

58. Un hombre pone una cerca alrededor de un campo rectangular y luego subdivide el campo en tres terrenos rectangulares menores, mediante la colocación de dos cercas paralelas a uno de los lados. Si el área del campo es de 31 250 m^2 y se usan 1 000 m de cerca, calcule las dimensiones del campo.

59. Una carretera que va de norte a sur cruza a una que va de este a oeste en el punto P. Un automóvil pasa por P a las 10:00 A.M. mientras viaja hacia el este a una velocidad constante de 20 millas por hora. Al mismo tiempo otro automóvil se encuentra a dos millas al norte de P mientras viaja hacia el sur a 50 millas por hora. Obtenga una fórmula que exprese la distancia d entre los automóviles t horas después de las 10:00 A.M. ¿A qué hora se encontrarán los automóviles a una distancia de 104 millas?

60. El representante de una compañía estima que el rendimiento promedio de gasolina de su automóvil es de 28 millas por galón en carretera y 22 millas por galón en la ciudad. En un viaje reciente recorrió 627 millas y utilizó 24 galones de gasolina. ¿Cuántas millas manejó en la ciudad?

61. Se desea construir un gran acuario cuyos lados sean de 6 pie de longitud y cuyos extremos sean cuadrados.

(a) Calcule la longitud del extremo cuadrado si el volumen ha de ser de 48 pie^3.

(b) Determine la longitud del extremo cuadrado si se utilizarán 44 pie^2 de vidrio para su construcción.

62. La longitud de un estanque decorativo rectangular debe ser cuatro veces su anchura; además, alrededor del estanque debe hacerse un andador de 6 pie de ancho. Si se dispone de 1 440 pie^2 para su construcción, ¿cuáles serán las dimensiones de la alberca?

63. Si se espera que la población P de una ciudad (en miles) crezca de acuerdo con la fórmula $P = 15 + \sqrt{3t + 2}$, en donde t (tiempo) está en años, halle cuándo se espera que la población alcance 20 000 personas.

64. Un recién egresado de universidad tiene dos ofertas de trabajo como vendedor en una empresa de computadoras. Para el puesto A se le ofrecen \$20 000 (dólares) por año más un 5% de comisión. Para el puesto B se le ofrecen solamente \$15 000 por año, pero la comisión es de 10%. ¿Cuántas ventas debe realizar el vendedor para que el segundo puesto sea más lucrativo?

65. La ley de Boyle para un cierto gas expresa que $pv = 200$, en donde p denota la presión (en lb/pulg^2) y v el volumen (en pulg^3). Si $25 \le v \le 50$, ¿cuál es el intervalo correspondiente de p?

66. La *fórmula de Lorentz para la contracción* en la teoría de la relatividad relaciona la longitud L de un objeto, que se mueve a una velocidad de V con respecto a un observador, con su longitud L_0 en reposo. Si c es la velocidad de la luz, entonces

$$L^2 = L_0^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right).$$

¿Para qué velocidades L será menor que $\frac{1}{2}L_0$? Exprese su respuesta en términos de c.

3.1 Sistemas coordenados en dos dimensiones

En la Sección 1.2 vimos la forma de asignar coordenadas a puntos de una recta. También se pueden aplicar sistemas coordenados a un plano mediante pares ordenados. El término de **par ordenado** se refiere a dos números reales, uno se designa "primer" número y el otro "segundo" número. El símbolo (a, b) se emplea para denotar el par ordenado que consta de los números reales a y b, en donde a es el primer número y b es el segundo. Los pares ordenados tienen muchos usos. En la Sección 2.6 se emplearon para denotar intervalos abiertos. En esta sección representarán puntos en un plano. Aunque los pares ordenados se emplean en situaciones diferentes, es difícil confundirse, puesto que en general el contexto indica claramente si el símbolo (a, b) representa un intervalo, un punto, u otro término matemático. Consideramos que dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales cuando

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{si y sólo si} \quad a = c \quad \text{y} \quad b = d.$$

Esto implica que $(a, b) \neq (b, a)$ si $a \neq b$.

Para formar un **sistema coordenado rectangular**, o **cartesiano***, se consideran dos rectas coordenadas perpendiculares entre sí, que se cortan en el origen O de ambas. Se elige la misma unidad de longitud en cada recta, a menos que se especifique lo contrario. Usualmente una de las rectas es horizontal con dirección positiva hacia la derecha y la otra recta es vertical con dirección positiva hacia arriba como lo indican las flechas de la Figura 3.1. Las dos rectas se llaman **ejes coordenados** y el punto O es considerado como el **origen**. Más específicamente, a la recta horizontal la consideramos como el **eje x**, y a la recta vertical como el **eje y**, y las designamos por x y y, respectivamente. El plano obtenido se llama **plano coordenado** o, con la notación anterior para ejes coordenados, **plano xy**. Aunque los símbolos x y y se usan para denotar a la vez rectas y números, no puede haber confusión en cuanto a lo que representan esas letras cuando aparecen a lo largo de los ejes coordenados como en la Figura 3.1. En algunas aplicaciones se designan las rectas coordenadas con letras diferentes tales como d, t, etc. Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro partes llamadas **primero**, **segundo**, **tercero** y **cuarto cuadrantes** que designaremos por I, II, III y IV, respectivamente, como se muestra en la Figura 3.1(i).

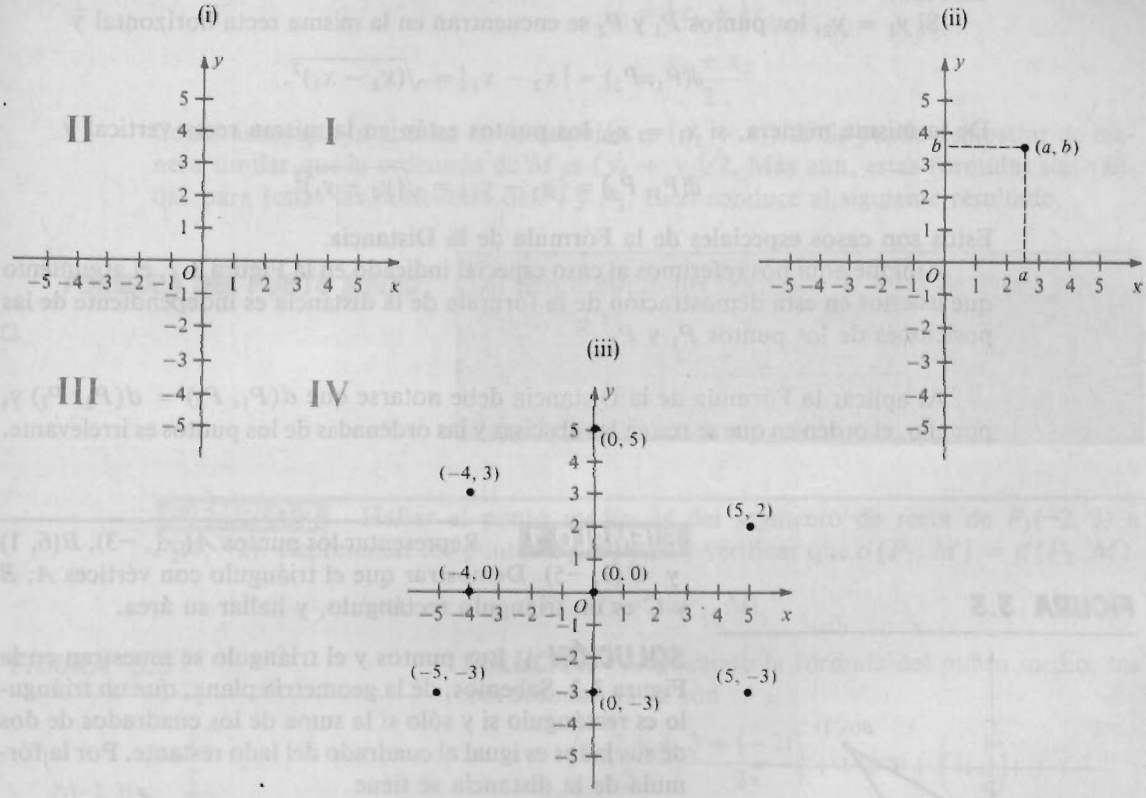
A cada punto P de un plano xy se le asigna un único par ordenado (a, b) como se muestra en la Figura 3.1(ii). Los números a y b se llaman **abscisa** (o **coordenada x**) y **ordenada** (o **coordenada y**) de P, respectivamente. A veces decimos que *P tiene coordenadas* (a, b). Recíprocamente, cada par ordenado (a, b) determina un punto P con coordenadas a y b en el plano xy. A menudo, cuando nos referimos al *punto* (a, b) o $P(a, b)$, queremos decir el punto P cuya coordenada x es a y cuya coordenada y es b. **Ubicar un punto** $P(a, b)$ significa localizar a P en un plano coordenado y representarlo mediante un punto. En la Figura 3.1(iii) se ilustran algunos puntos.

El siguiente enunciado proporciona una fórmula para la distancia entre dos puntos.

---

* El término "cartesiano" se usa en honor del matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650), quien fue uno de los primeros en emplear este concepto.

FIGURA 3.1

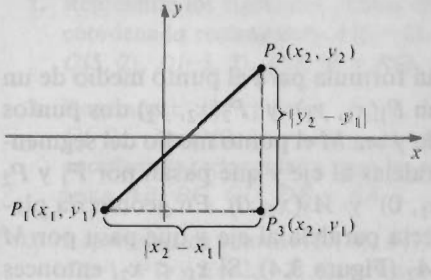


FÓRMULA DE LA DISTANCIA

La distancia $d(P_1, P_2)$ entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en un plano coordenado es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

FIGURA 3.2



DEMOSTRACIÓN Si $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$, entonces, como se ilustra en la Figura 3.2, los puntos P_1, P_2 y $P_3(x_2, y_1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. Por el teorema de Pitágoras,

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [d(P_1, P_3)]^2 + [d(P_3, P_2)]^2.$$

De la figura se ve que

$$d(P_1, P_3) = |x_2 - x_1| \quad \text{y} \quad d(P_3, P_2) = |y_2 - y_1|.$$

Puesto que $|a|^2 = a^2$ para todo número real a, se puede escribir

$$[d(P_1, P_2)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Sacando raíz cuadrada de cada lado de la ecuación anterior se obtiene la fórmula deseada.

Si $y_1 = y_2$, los puntos P_1 y P_2 se encuentran en la misma recta horizontal y

$$d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

De la misma manera, si $x_1 = x_2$, los puntos están en la misma recta vertical y

$$d(P_1, P_2) = |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2}.$$

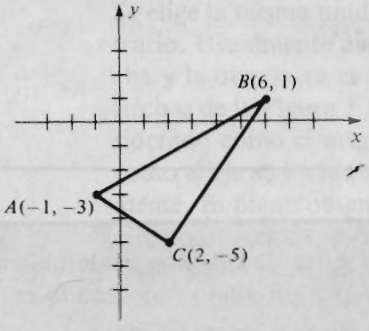
Estos son casos especiales de la Fórmula de la Distancia.

Aunque aquí nos referimos al caso especial indicado en la Figura 3.2, el argumento que usamos en esta demostración de la fórmula de la distancia es independiente de las posiciones de los puntos P_1 y P_2. □

Al aplicar la Fórmula de la Distancia debe notarse que $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$ y, por ello, el orden en que se resten las abscisas y las ordenadas de los puntos es irrelevante.

EJEMPLO 1 Representar los puntos $A(-1, -3)$, $B(6, 1)$ y $C(2, -5)$. Demostrar que el triángulo con vértices A, B y C es un triángulo rectángulo, y hallar su área.

FIGURA 3.3

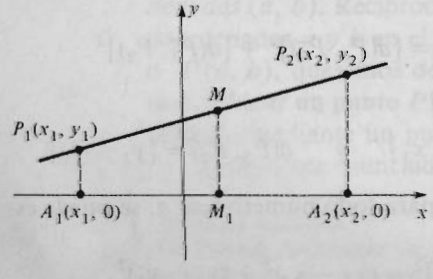


SOLUCIÓN Los puntos y el triángulo se muestran en la Figura 3.3. Sabemos, de la geometría plana, que un triángulo es rectángulo si y sólo si la suma de los cuadrados de dos de sus lados es igual al cuadrado del lado restante. Por la fórmula de la distancia se tiene

$$d(A, B) = \sqrt{(-1 - 6)^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$$
$$d(B, C) = \sqrt{(6 - 2)^2 + (1 + 5)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$$
$$d(A, C) = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (-3 + 5)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

Como $[d(A, B)]^2 = [d(B, C)]^2 + [d(A, C)]^2$, el triángulo es rectángulo con hipotenusa AB. El área es $\frac{1}{2}\sqrt{52}\sqrt{13} = 13$ unidades cuadradas. ■

FIGURA 3.4



Es fácil obtener una fórmula para el punto medio de un segmento de recta. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos de un punto coordenado y sea M el punto medio del segmento P_1P_2. Las rectas paralelas al eje y que pasan por P_1 y P_2 cortan al eje x en $A_1(x_1, 0)$ y $A_2(x_2, 0)$. En geometría plana se aprende que la recta paralela al eje y que pasa por M biseca al segmento A_1A_2 (Figura 3.4). Si $x_1 < x_2$, entonces $x_2 - x_1 > 0$ y, por lo tanto $d(A_1, A_2) = x_2 - x_1$. Como M_1 es el punto medio del segmento A_1A_2, la abscisa de M_1 es

$$x_1 + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_1$$
$$= \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2$$
$$= \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Concluimos que la abscisa de M también es $(x_1 + x_2)/2$. Se puede demostrar de manera similar que la ordenada de M es $(y_1 + y_2)/2$. Más aún, estas fórmulas son válidas para todas las posiciones de P_1 y P_2. Esto conduce al siguiente resultado.

FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO

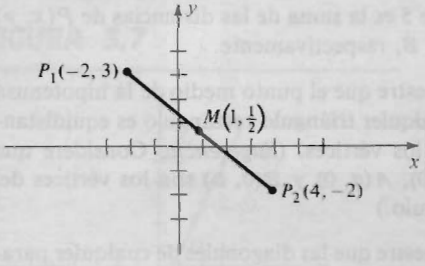
El punto medio del segmento de recta de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

EJEMPLO 2 Hallar el punto medio M del segmento de recta de $P_1(-2, 3)$ a $P_2(4, -2)$. Representar los puntos P_1, P_2 y M y verificar que $d(P_1, M) = d(P_2, M)$.

$$d(P_1, M) = d(P_2, M).$$

FIGURA 3.5



SOLUCIÓN Aplicando la fórmula del punto medio, las coordenadas de M son

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+(-2)}{2}\right) \quad \text{o bien} \quad \left(1, \frac{1}{2}\right).$$

Los tres puntos P_1, P_2 y M están representados en la Figura 3.7. Con las fórmulas de la distancia obtenemos

$$d(P_1, M) = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-\tfrac{1}{2})^2} = \sqrt{9 + \tfrac{25}{4}}$$
$$d(P_2, M) = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-\tfrac{1}{2})^2} = \sqrt{9 + \tfrac{25}{4}}.$$

Por lo tanto, $d(P_1, M) = d(P_2, M)$. ■

Ejercicios 3.1

1. Represente los siguientes puntos en un sistema coordenado rectangular: $A(5, -2)$, $B(-5, -2)$, $C(5, 2)$, $D(-5, 2)$, $E(3, 0)$ y $F(0, 3)$.
2. Represente los puntos $A(-3, 1)$, $B(3, 1)$, $C(-2, -3)$, $D(0, 3)$ y $E(2, -3)$ en un sistema coordenado rectangular y trace los segmentos de recta AB, BC, CD, DE y EA.
3. Represente los puntos $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(3, 3)$, $D(-1, -1)$ y $E(-2, -2)$. Describa el conjunto de todos los puntos de la forma (x, x) donde x es un número real.
4. Represente los puntos $A(0, 0)$, $B(1, -1)$, $C(2, -2)$, $D(-1, 1)$ y $E(-3, 3)$. Describa el conjunto de todos los puntos de la forma $(a, -a)$ donde a es un número real.
5. Describa en un plano cartesiano el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ tales que:
   (a) $x = 3$ (b) $y = -1$
   (c) $x \geq 0$ (d) $xy > 0$
   (e) $y < 0$
6. Describa en un plano cartesiano el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ tales que:

(a) $y = 0$ (b) $x = -5$
(c) $x/y < 0$ (d) $xy = 0$
(e) $y > 1$

En los Ejercicios 7 a 12, encuentre: (a) la distancia $d(A, B)$ entre los puntos A y B; (b) el punto medio del segmento AB.

7. $A(4, -3)$, $B(6, 2)$
8. $A(-2, -5)$, $B(4, 6)$
9. $A(-5, 0)$, $B(-2, -2)$
10. $A(6, 2)$, $B(6, -2)$
11. $A(7, -3)$, $B(3, -3)$
12. $A(-4, 7)$, $B(0, -8)$

En los Ejercicios 13 y 14, demuestre que A, B y C son los vértices de un triángulo rectángulo y determine su área.

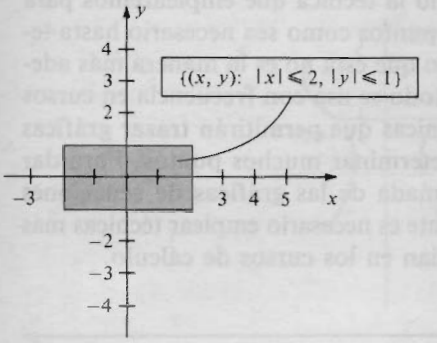
13. $A(8, 5)$, $B(1, -2)$, $C(-3, 2)$
14. $A(-6, 3)$, $B(3, -5)$, $C(-1, 5)$
15. Demuestre que los siguientes puntos son los vértices de un cuadrado: $A(-4, 2)$, $B(1, 4)$, $C(3, -1)$ y $D(-2, -3)$.
16. Demuestre que los siguientes puntos son los vértices de un paralelogramo: $A(-4, -1)$, $B(0, -2)$, $C(6, 1)$ y $D(2, 2)$.
17. Dado $A(-3, 8)$, encuentre las coordenadas del punto B tales que $M(5, -10)$ sea el punto medio de AB.
18. Dados $A(5, -8)$ y $B(-6, 2)$ encuentre el punto en AB localizado a las tres cuartas partes de la distancia de A a B.
19. Dados $A(-4, -3)$ y $B(6, 1)$, demuestre que $P(5, -11)$ está sobre la mediatriz de AB.
20. Dados $A(-4, -3)$ y $B(6, 1)$, encuentre una fórmula que exprese que $P(x, y)$ está sobre la mediatriz de AB.
21. Obtenga una fórmula que exprese que $P(x, y)$ está a una distancia de 5 unidades del origen. Describa el conjunto de dichos puntos.
22. Si r es un número real positivo, encuentre una fórmula que determine que $P(x, y)$ está a una distancia r de un punto fijo $C(h, k)$. Describa el conjunto de dichos puntos.
23. Encuentre todos los puntos sobre el eje y localizados a 6 unidades del punto $(5, 3)$.
24. Encuentre todos los puntos sobre el eje x localizados a 5 unidades de $(-2, 4)$.
25. Sea S el conjunto de los puntos de la forma $(2x, x)$ donde x es un número real. Encuentre el punto en S situado en el tercer cuadrante y a una distancia de 5 unidades del punto $(1, 3)$.
26. Sea S el conjunto de los puntos de la forma (x, x) donde x es un número real. Encuentre todos los puntos en S que están a una distancia de 3 unidades de $(-2, 1)$.
27. ¿Cuáles son los valores de a tales que la distancia entre $(a, 3)$ y $(5, 2a)$ sea mayor que $\sqrt{26}$?
28. Dados los puntos $A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$, encuentre una fórmula sin radicales que exprese el hecho de que 5 es la suma de las distancias de $P(x, y)$ a A y B, respectivamente.
29. Demuestre que el punto medio de la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo es equidistante de los vértices. (*Sugerencia:* Considere que $O(0, 0)$, $A(a, 0)$ y $B(0, b)$ son los vértices del triángulo.)
30. Demuestre que las diagonales de cualquier paralelogramo se cortan en el punto medio. (*Sugerencia:* Considere que los vértices del paralelogramo son $O(0, 0)$, $A(a, b)$ y $C(0, c)$.)

3.2 Gráficas

Si W es un conjunto de pares ordenados, se puede considerar al punto $P(x, y)$ de un plano coordenado que corresponda al par ordenado (x, y) en W. La **gráfica** de W es el conjunto de todos esos puntos. La frase "trazar la gráfica de W" significa ilustrar geométricamente en un plano coordenado las características relevantes de la gráfica.

EJEMPLO 1 Trazar la gráfica de $W = \{(x, y) : |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$.

FIGURA 3.6



SOLUCIÓN La notación que describe a W se traduce por "el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) tales que $|x| \leq 2$ y $|y| \leq 1$." Estas desigualdades son equivalentes a $-2 \leq x \leq 2$ y a $-1 \leq y \leq 1$. Por lo tanto, la gráfica de W consiste en todos los puntos comprendidos dentro y sobre la frontera de la región rectangular que se muestra en la Figura 3.6. ■

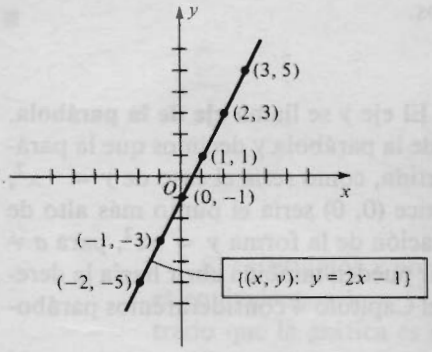
EJEMPLO 2 En este ejemplo se trata de trazar la gráfica de $W = \{(x, y) : y = 2x - 1\}$.

SOLUCIÓN Empezamos por encontrar algunos puntos con coordenadas (x, y) tales que el par ordenado (x, y) esté en W. Conviene tabular estas coordenadas como se muestra a continuación, de manera que el valor de y correspondiente al número real x sea igual a $2x - 1$.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	-3	-1	1	3	5

Después de marcar los puntos con estas coordenadas, nos damos cuenta que todos están sobre una recta y trazamos la gráfica de acuerdo con esta observación (Figura 3.7). En general los pocos puntos que representamos no serían suficientes para esbozar la gráfica; sin embargo, en este caso sencillo podemos estar seguros de que la gráfica es una recta. En la Sección 3.5 demostraremos que nuestra conjetura es correcta. ■

FIGURA 3.7



Las coordenadas x de los puntos en los que la gráfica corta al eje x se conocen como **intercepciones x** de la gráfica. Las coordenadas y de los puntos en los que la gráfica corta al eje y se conocen como **intercepciones y**. La gráfica de la Figura 3.7 tiene como intercepción x, $\frac{1}{2}$, y como intercepción y, -1.

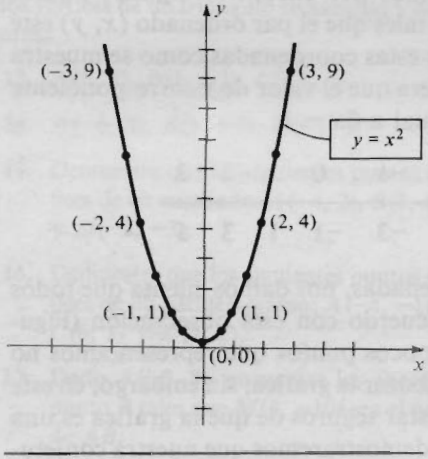
Es imposible trazar la gráfica completa del Ejemplo 2, ya que x puede tomar valores tan grandes como se desee. Sin embargo un dibujo del tipo de la Figura 3.9 se llama *gráfica de W* y se sobreentiende que la representación gráfica sólo da una idea de la verdadera gráfica que no termina como en la figura. En general la gráfica debe ilustrar una parte suficientemente grande de manera que las partes restantes sean evidentes.

Dada una ecuación en x y y decimos que un par ordenado (a, b) es una **solución** de la ecuación, si se obtiene una igualdad al reemplazar x por a y y por b. Por ejemplo $(2, 3)$, es una solución de $y = 2x - 1$ ya que al reemplazar x por 2 y y por 3 obtenemos $3 = 4 - 1$, o bien $3 = 3$. Se dice que dos ecuaciones en x y y son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones. Las soluciones de una ecuación en x y y determinan un conjunto W de pares ordenados; se define la **gráfica de la ecuación** como la gráfica

de W. Obsérvese que la gráfica de la ecuación $y = 2x - 1$ es la misma que la del conjunto W del Ejemplo 2 (Figura 3.7).

Para algunas de las ecuaciones de este capítulo la técnica que emplearemos para obtener la gráfica consistirá en representar tantos puntos como sea necesario hasta tener una idea clara de la forma de la curva. Es claro que ésta no es la manera más adecuada de obtener la gráfica; sin embargo, este método se usa con frecuencia en cursos elementales. Más adelante estudiaremos otras técnicas que permitirán trazar gráficas exactas sin tener que determinar muchos puntos. Para dar una descripción aproximada de las gráficas de ecuaciones complicadas, generalmente es necesario emplear técnicas más avanzadas que se estudian en los cursos de cálculo.

FIGURA 3.8



EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de la ecuación $y = x^2$.

SOLUCIÓN Para trazar la gráfica debemos situar más puntos que en el ejemplo anterior. Aumentando las coordenadas x sucesivas en $\frac{1}{2}$, se obtiene la siguiente tabla.

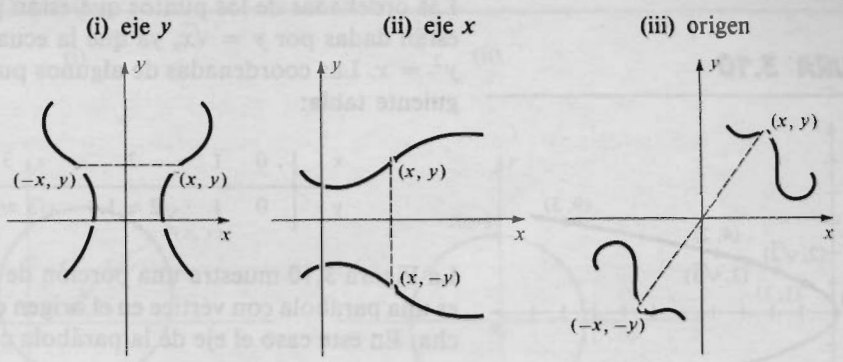
x	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
y	9	$\frac{25}{4}$	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	9

Al crecer los valores de x, crecen aún más los valores de y. Por ejemplo, los puntos (4, 16), (5, 25) y (6, 36) pertenecen a la gráfica, así como también los (−4, 16), (−5, 25) y (−6, 36). Al representar y unir mediante una curva alisada estos puntos, obtenemos la Figura 3.8, en donde se tienen marcados varios puntos. ■

La gráfica del Ejemplo 3 se llama **parábola**. El eje y se llama **eje de la parábola**. El punto inferior (0, 0) es conocido como **vértice** de la parábola y decimos que la parábola **abre hacia arriba**. Si la gráfica estuviese invertida, como sería el caso de $y = -x^2$, entonces la parábola **abriría hacia abajo** y el vértice (0, 0) sería el punto más alto de la gráfica. En general, la gráfica de *cualquier* ecuación de la forma $y = ax^2$, para $a \neq 0$, es una parábola con vértice (0, 0). Las parábolas pueden también abrir hacia la derecha o hacia la izquierda (véase el Ejemplo 4). En el Capítulo 4 consideraremos parábolas con ejes *paralelos* al eje x o al eje y.

Si el plano coordenado de la Figura 3.8 se dobla a lo largo del eje y, entonces la mitad de la gráfica del lado izquierdo coincide con la mitad de la derecha. Decimos que **la gráfica es simétrica con respecto al eje y**. La gráfica (i) de la Figura 3.11 es simétrica con respecto al eje y, ya que el punto $(-x, y)$ pertenece a la gráfica siempre que (x, y) esté en la curva. De manera análoga, una **gráfica es simétrica con respecto al eje x** si, siempre que el punto (x, y) está en la gráfica, entonces el punto $(x, -y)$ pertenece también a la curva, como se muestra en la Figura 3.9(ii). Otro tipo de simetría que ciertas gráficas poseen es la llamada **simetría con respecto al origen**. En este caso, siempre que un punto (x, y) esté en la curva, entonces el punto $(-x, -y)$ también está en la gráfica, como se ilustra en (iii) de la Figura 3.9.

FIGURA 3.9



La investigación de estos tres tipos de simetría se lleva a cabo mediante las siguientes pruebas para gráficas de ecuaciones en x y y.

PRUEBAS DE SIMETRÍA

(i) La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje y si la sustitución de x por $-x$ da una ecuación equivalente.

(ii) La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje x si la sustitución de y por $-y$ da una ecuación equivalente.

(iii) La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al origen si la sustitución simultánea de x por $-x$ y de y por $-y$ da una ecuación equivalente.

Si sustituimos x por $-x$ en la ecuación del Ejemplo 3, obtenemos que $y = (-x)^2$, es equivalente a $y = x^2$. Así pues, mediante la prueba de simetría (i), hemos demostrado que la gráfica es simétrica con respecto al eje y.

Si existe simetría con respecto a uno de los ejes, basta determinar la gráfica en una mitad del plano coordenado, ya que el resto de la curva puede trazarse como una reflexión en espejo de la primera mitad.

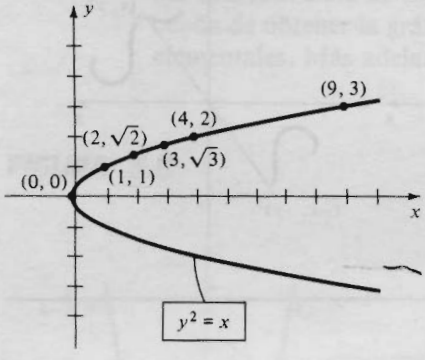
EJEMPLO 4 Trazar la gráfica de $y^2 = x$.

SOLUCIÓN La gráfica es simétrica con respecto al eje x, ya que la ecuación no cambia al sustituir y por $-y$. [Ver la prueba de simetría (ii).] Por consiguiente, es suficiente

representar puntos con ordenadas no negativas y luego reflejarla con respecto al eje x. Las ordenadas de los puntos que están por encima del eje x están dadas por $y = \sqrt{x}$, ya que la ecuación que se tiene es $y^2 = x$. Las coordenadas de algunos puntos se dan en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	9
y	0	1	$\sqrt{2} \approx 1.4$	$\sqrt{3} \approx 1.7$	2	3

FIGURA 3.10



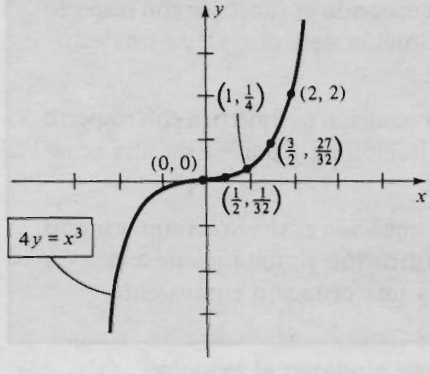
La Figura 3.10 muestra una porción de la gráfica. La curva es una parábola con vértice en el origen que se abre a la derecha. En este caso el eje de la parábola coincide con el eje x. ■

EJEMPLO 5 Trazar la gráfica de la ecuación $4y = x^3$.

SOLUCIÓN Si sustituimos x por $-x$ y y por $-y$, obtenemos

$$4(-y) = (-x)^3 \quad \text{o bien} \quad -4y = -x^3.$$

FIGURA 3.11



Al multiplicar ambos lados por -1, vemos que la última ecuación es equivalente a $4y = x^3$. De acuerdo con la prueba de simetría (iii), la gráfica es simétrica con respecto al origen. En la tabla siguiente aparecen algunos puntos de la gráfica:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
y	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{27}{32}$	2	$\frac{125}{32}$

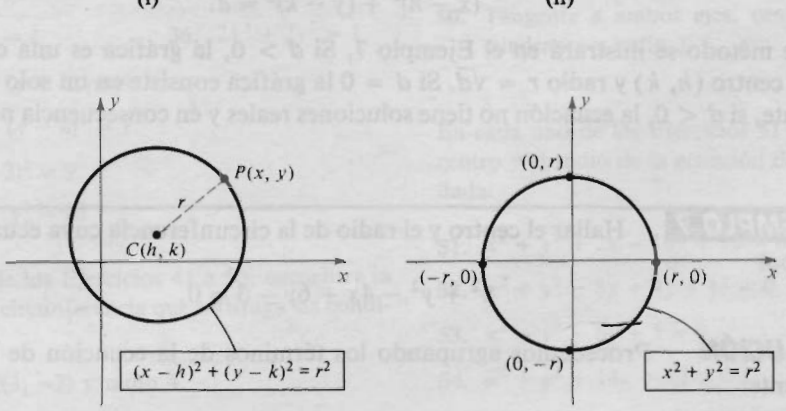
Por simetría (o sustitución) podemos ver que los puntos $(-1, -\frac{1}{4})$, $(-2, -2)$, etc., pertenecen a la gráfica. Al representar estos puntos, encontramos que la gráfica tiene la forma de la Figura 3.11. ■

Si $C(h, k)$ es un punto del plano coordenado, entonces se puede definir a la circunferencia con centro en C y radio $r > 0$ como el conjunto de todos los puntos que distan r unidades de C. Como se muestra en la Figura 3.12(i), un punto $P(x, y)$ se encuentra sobre la circunferencia si y sólo si $d(C, P) = r$, o por la fórmula de la distancia, si y sólo si

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r.$$

La ecuación equivalente se llama **ecuación de una circunferencia con radio r y centro (h, k)**, o simplemente, **ecuación de una circunferencia.**

FIGURA 3.12



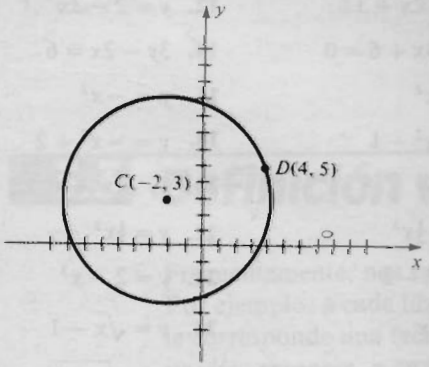
ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, \quad r > 0.$$

Si $h = 0$ y $k = 0$, se reduce a que $x^2 + y^2 = r^2$, que es la ecuación de una circunferencia de radio r y con centro en el origen [Figura 3.12(ii)]. Si $r = 1$, la gráfica es un **círculo unitario.**

EJEMPLO 6 Obtener la ecuación de la circunferencia con centro $C(-2, 3)$ y que pasa por el punto $D(4, 5)$.

FIGURA 3.13



SOLUCIÓN La Figura 3.13 ilustra la circunferencia. Como D está sobre la curva, el radio r es $d(C, D)$. La Fórmula de la Distancia da

$$r = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}.$$

Al hacer $h = -2$ y $k = 3$ en la ecuación de la circunferencia, obtenemos

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 40$$

o sea $$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 27 = 0.$$ ■

Elevando al cuadrado los binomios de la ecuación de la circunferencia y simplificando obtenemos una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

en donde a, b y c son números reales. Recíprocamente, si se parte de la ecuación anterior, se pueden *completar los cuadrados* en x y y para obtener una expresión de la forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = d.$$

Este método se ilustrará en el Ejemplo 7. Si $d > 0$, la gráfica es una circunferencia con centro (h, k) y radio $r = \sqrt{d}$. Si $d = 0$ la gráfica consiste en un solo punto. Finalmente, si $d < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales y en consecuencia no hay gráfica.

EJEMPLO 7 Hallar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación está dada por

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0.$$

SOLUCIÓN Procedemos agrupando los términos de la ecuación de la manera siguiente:

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = 3.$$

Ahora se completan los cuadrados para las expresiones entre paréntesis. Por supuesto, para obtener ecuaciones equivalentes se deben sumar los números a *ambos* miembros de la ecuación. Para completar el cuadrado en $x^2 - 4x$ se suma $(-\frac{4}{2})^2 = (-2)^2 = 4$ a los dos lados, mientras que para $y^2 + 6y$ se suma $(\frac{6}{2})^2 = 3^2 = 9$. La ecuación resultante es

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 3 + 4 + 9$$

o bien

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16.$$

Concluimos que el centro de la circunferencia está en $(2, -3)$ y su radio es 4. ■

Ejercicios 3.2

En los Ejercicios 1 a 8, trace la gráfica del conjunto de pares ordenados W.

1. $W = \{(x, y): x = 4\}$
2. $W = \{(x, y): y = -3\}$
3. $W = \{(x, y): xy < 0\}$
4. $W = \{(x, y): xy = 0\}$
5. $W = \{(x, y): |x| < 2, |y| > 1\}$
6. $W = \{(x, y): |x| > 1, |y| \leq 2\}$
7. $W = \{(x, y): |x - 2| < 3, |y| \leq 1\}$
8. $W = \{(x, y): |x - 1| < 5, |y + 1| < 2\}$

Obtenga un número suficiente de puntos y trace la gráfica correspondiente para cada una de las ecuaciones de los Ejercicios 9 a 32.

9. $y = 3x + 1$
10. $y = 4x - 3$
11. $y = -2x + 3$
12. $y = 2 - 3x$
13. $2y + 3x + 6 = 0$
14. $3y - 2x = 6$
15. $y = 2x^2$
16. $y = -x^2$
17. $y = 2x^2 - 1$
18. $y = -x^2 + 2$
19. $4y = x^2$
20. $3y + x^2 = 0$
21. $y = -\frac{1}{2}x^3$
22. $y = \frac{1}{2}x^3$
23. $y = x^3 - 2$
24. $y = 2 - x^3$
25. $y = \sqrt{x}$
26. $y = \sqrt{x} - 1$
27. $y = \sqrt{-x}$
28. $y = \sqrt{x - 1}$
29. $y = \sqrt{9 - x^2}$
30. $y = -\sqrt{4 - x^2}$
31. $x = -\sqrt{9 - y^2}$
32. $x = \sqrt{4 - y^2}$

Describa las gráficas de las ecuaciones en los Ejercicios 33 a 40.

33. $x^2 + y^2 = 16$ **34.** $x^2 + y^2 = 25$

35. $9x^2 + 9y^2 = 1$ **36.** $2x^2 + 2y^2 = 1$

37. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$

38. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$

39. $x^2 + (y - 3)^2 = 9$

40. $(x + 5)^2 + y^2 = 16$

En cada uno de los Ejercicios 41 a 50, encuentre la ecuación de la circunferencia que satisfaga las condiciones dadas.

41. Centro $C(3, -2)$ y radio 4.

42. Centro $C(-5, 2)$ y radio 5.

43. Centro $C(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ y radio 2.

44. Centro $C(\frac{1}{3}, 0)$ y radio $\sqrt{3}$.

45. Centro en el origen y que pase por $P(-3, 5)$.

46. Centro en $C(-4, 6)$ y que pase por $P(1, 2)$.

47. Centro en $C(-4, 2)$ y tangente al eje x.

48. Centro en $C(3, -5)$ y tangente al eje y.

49. Los extremos de un diámetro son $A(4, -3)$ y $B(-2, 7)$.

50. Tangente a ambos ejes, centro en el primer cuadrante y radio 2.

En cada uno de los Ejercicios 51 a 60, encuentre el centro y el radio de la ecuación de la circunferencia dada.

51. $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 10 = 0$

52. $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 15 = 0$

53. $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$

54. $x^2 + y^2 + 14x + 46 = 0$

55. $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$

56. $x^2 + y^2 + 2y = 0$

57. $4x^2 + 4y^2 + 8x - 8y + 7 = 0$

58. $2x^2 + 2y^2 + 8x + 7 = 0$

59. $3x^2 + 3y^2 - 3x + 2y + 1 = 0$

60. $9x^2 + 9y^2 + 12x - 6y + 4 = 0$

Ejercicios para Calculadora 3.2

Obtenga las coordenadas de un número suficiente de puntos de las siguientes ecuaciones y trace sus gráficas.

1. $y = x^{2/3}$ **2.** $y = x^{3/2}$ **3.** $y = x^{5/2}$ **4.** $y = 2x^{3/5} - 1$

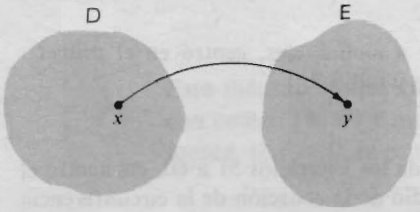
5. $y = \sqrt[5]{x} - 1$ **6.** $y = \sqrt[4]{x + 1}$

7. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ **8.** $y = x/(x^2 + 1)$

3.3 Definición de función

Frecuentemente, nos encontramos en la vida diaria con la noción de **correspondencia**. Por ejemplo, a cada libro le corresponde un cierto número de páginas. A cada persona le corresponde una fecha de cumpleaños. Si se mide la temperatura ambiental durante un día, entonces, a cada instante le corresponde una temperatura. En los ejemplos de correspondencia que hemos citado, hay dos conjuntos: D y E. En el primero de los ejemplos, D denota el conjunto de libros, y E el conjunto de enteros positivos. A cada libro x en D le corresponde un entero positivo y en E, que es el número de páginas.

FIGURA 3.14



La correspondencia se representa mediante diagramas del tipo de la Figura 3.14, en donde los conjuntos D y E se representan por medio de puntos dentro de las regiones de un plano. La flecha indica que al elemento x de D le corresponde el elemento y de E. Hemos considerado diferentes a los conjuntos X y Y. Sin embargo, los dos conjuntos pueden tener elementos en común, y más aún, es factible que $D = E$.

Los ejemplos mencionados indican que *a cada x en D le corresponde una y sólo una y en E*; es decir, para una x dada, *y es única*. Sin embargo, diferentes elementos de D pueden estar asociados a un mismo elemento de E. Por ejemplo, dos libros pueden tener el mismo número de páginas o dos personas, idéntica fecha de cumpleaños.

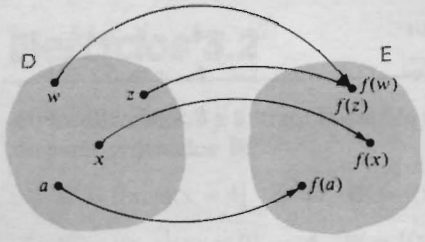
En este caso D y E serán conjuntos numéricos en la mayoría de los casos. Como ejemplo, supongamos que D y E son el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, y que a cada número real x le corresponde su cuadrado x^2. Es decir, al 3, -5 y $\sqrt{2}$ se les asocian los números 9, 25 y 2, respectivamente. Esto determina una correspondencia de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

Cada uno de los ejemplos de correspondencia que hemos visto es una *función*, la cual se define de la siguiente manera.

DEFINICIÓN

> Una **función** f de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asigna a cada elemento x de D un único elemento y de E.

FIGURA 3.15

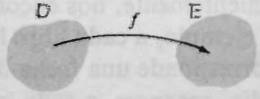


El elemento y de E se llama **valor** en x y se denota por $f(x)$ (que se lee "f de x"). (También recibe el nombre de **imagen** de x bajo f.) El conjunto D se denomina **dominio** de la función. El **contradominio** de f consiste en todos los valores posibles de $f(x)$, en donde x está en D. (Se le llama también **ámbito** de la función.)

Ahora es posible trazar el diagrama de la Figura 3.15. Las flechas indican que los elementos $f(x), f(w), f(z)$ y $f(a)$ de E están asociados a los elementos x, w, z y a de D, respectivamente. Es importante recordar que *a cada x en D se le asocia un único valor $f(x)$ en E*; sin embargo elementos diferentes de D, como w y z de la Figura 3.15, pueden tener el mismo valor en E.

Los símbolos

$$D \xrightarrow{f} E, \quad f: D \to E \quad \text{o bien}$$



significan que f es una función de D a E. Suele haber confusión por las notaciones f y $f(x)$. Recuérdese que f se usa para representar la función. No está en D ni en E. Sin embargo, $f(x)$ es un elemento de E, el que asigna f a x.

La *igualdad* de dos funciones f y g de D a E se define como sigue:

$$f = g \quad \text{si y sólo si} \quad f(x) = g(x) \quad \text{para todo } x \text{ en } D.$$

Por ejemplo, si $g(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 6) + 3$ y $f(x) = x^2$ para todo x en $\mathbb{R}$, entonces $g = f$ ya que $\frac{1}{2}(2x^2 - 6) + 3 = x^2$ para todo x.

EJEMPLO 1 Sea f una función con dominio $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ para todo x en $\mathbb{R}$. Encontrar $f(-6)$, $f(\sqrt{3})$ y $f(a)$ para cualquier número real a. ¿Cuál es el contradominio de f?

SOLUCIÓN Podemos hallar valores de f sustituyendo x por valores en la ecuación $f(x) = x^2$. Así,

$$f(-6) = (-6)^2 = 36, \quad f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3, \quad \text{y} \quad f(a) = a^2.$$

Por definición, el contradominio de f consiste en todos los números de la forma $f(a) = a^2$, en donde a está en $\mathbb{R}$. Como el cuadrado de todos los números reales es no negativo, el contradominio está contenido en el conjunto de los números reales no negativos. Más aún, todo número real no negativo c es un valor de f tal que $f(\sqrt{c}) = (\sqrt{c})^2 = c$. Por lo tanto, el contradominio de f es el conjunto de todos los números reales no negativos. ■

Muchas veces es difícil encontrar el contradominio de una función algebraica, como en el ejemplo anterior. En la siguiente sección veremos cómo se puede obtener el contradominio de una gráfica.

Si una función se define como en el Ejemplo 1, el símbolo que se usa para función y variable es irrelevante; esto es, expresiones como $f(x) = x^2$, $f(s) = s^2$, $g(t) = t^2$ y $k(r) = r^2$, todas definen la misma función. Esto es cierto porque si a define cualquier número en el dominio, entonces el mismo valor a^2 se obtiene sin importar qué expresión se emplee.

En el resto de nuestro trabajo la frase "f es una función" significará que el dominio y el contradominio son conjuntos de números reales. Si una función se define por el significado de una expresión, como en el Ejemplo 1, y el dominio D no se establece explícitamente, entonces D se considera como la totalidad de los números reales x tales que $f(x)$ es real. Para ejemplificar, si $f(x) = \sqrt{x - 2}$, entonces se supone que el dominio es el conjunto de los números reales x tales que $\sqrt{x - 2}$ es real; es decir, $x - 2 \geq 0$, o bien $x \geq 2$. Así, el dominio es el intervalo infinito $[2, \infty]$. Si x está en el dominio, decimos que f **se define en** x, o que $f(x)$ **existe**. Si un conjunto S está en el dominio, a menudo decimos que f **está definida** en S. La terminología f **no está definida** en x significa que x no está en el dominio de f.

EJEMPLO 2

Si $g(x) = \dfrac{\sqrt{4 + x}}{1 - x}$, hallar

(a) el dominio de g. (b) $g(5)$, $g(-2)$, $g(-a)$, $-g(a)$.

SOLUCIÓN

(a) La expresión fraccional en un número real si y sólo si el radicando es positivo y el denominador es diferente de cero. Entonces, $g(x)$ existe si y sólo si

$$4 + x \geq 0 \quad \text{y} \quad 1 - x \neq 0,$$

o lo que es lo mismo $\quad x \geq -4 \quad \text{y} \quad x \neq 1.$

El dominio se puede expresar en términos de intervalos como $[-4, 1) \cup (1, \infty)$.

(b) Para encontrar los valores de g, si se sustituye el valor de x de la siguiente manera:

$$g(5) = \frac{\sqrt{4+5}}{1-5} = \frac{\sqrt{9}}{-4} = -\frac{3}{4}$$

$$g(-2) = \frac{\sqrt{4+(-2)}}{1-(-2)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$g(-a) = \frac{\sqrt{4+(-a)}}{1-(-a)} = \frac{\sqrt{4-a}}{1+a}$$

$$-g(a) = -\frac{\sqrt{4+a}}{1-a} = \frac{\sqrt{4+a}}{a-1}$$

■

El manejo de expresiones como el efectuado en el ejemplo siguiente aparece en el estudio del cálculo.

EJEMPLO 3 Supóngase que $f(x) = x^2 + 3x - 2$. Si a y h son números reales y $h \neq 0$, encontrar y simplificar

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

SOLUCIÓN Puesto que

$$\begin{aligned} f(a+h) &= (a+h)^2 + 3(a+h) - 2 \\ &= (a^2 + 2ah + h^2) + (3a + 3h) - 2 \end{aligned}$$

y

$$f(a) = a^2 + 3a - 2,$$

se observa que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{[(a^2 + 2ah + h^2) + (3a + 3h) - 2] - (a^2 + 3a - 2)}{h}$$

$$= \frac{2ah + h^2 + 3h}{h}$$

$$= 2a + h + 3.$$

■

Muchas de las fórmulas que se emplean en matemáticas y en otras ciencias, determinan funciones. Así por ejemplo, la fórmula $A = \pi r^2$, para el área A de un círculo

de radio r, le asocia a cada número real positivo r un único valor A. Esta fórmula determina una función f tal que $f(r) = \pi r^2$, y por consiguiente, $A = f(r)$. La letra r que representa un número arbitrario del dominio de f se considera una **variable independiente**. A la letra A, que representa un número del contradominio de f, se le llama **variable dependiente**, puesto que su valor depende del número que se asigne a r. La relación existente entre r y A, conduce a decir que *A es una función de r*. Para citar otro ejemplo, considérese que un automóvil viaja a una velocidad uniforme de 50 millas por hora, entonces la distancia d (en millas) recorrida en el tiempo t (en horas) está dada por $d = 50t$, y por lo tanto, d es una función de t.

EJEMPLO 4 Expresar el radio de un círculo como función de su área.

SOLUCIÓN Si A y r representan el área y el radio, entonces

$$A = \pi r^2 \quad \text{y} \quad r^2 = \frac{A}{\pi}.$$

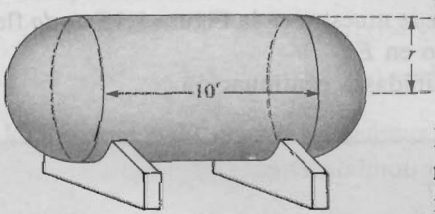
Puesto que tanto A como r son positivos,

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}.$$

Esto demuestra que r es una función de A, ya que a cada valor de A le corresponde un único valor $\sqrt{A/\pi}$ de r. ■

EJEMPLO 5 Se desea construir un tanque de acero para almacenar gas propano. Su forma debe ser la de un cilindro circular recto de 10 pie de altura con una semiesfera unida en cada extremo. Su radio r debe determinarse aún. Expresar el volumen V del tanque como función de r.

FIGURA 3.16



SOLUCIÓN El tanque se muestra en la Figura 3.16. El volumen de la parte cilíndrica del tanque puede encontrarse multiplicando la altura 10 por el área πr^2 de la base del cilindro. Esto da

$$\text{volumen del cilindro} = 10(\pi r^2) = 10\pi r^2.$$

Los dos extremos semiesféricos forman, al unirlos, una esfera de radio r. Usando la fórmula para el volumen de una esfera obtenemos:

$$\text{volumen de los dos extremos} = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

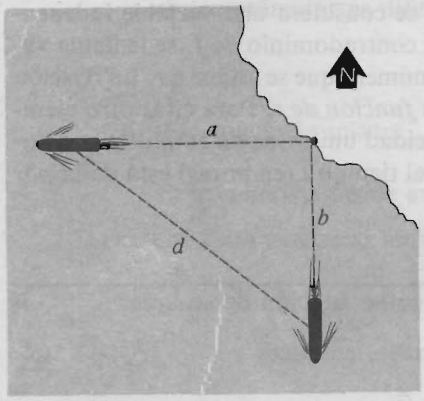
Así, el volumen V del tanque es

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 + 10\pi r^2.$$

Factorizando podemos reescribir esto como

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2(4r + 30) = \tfrac{2}{3}\pi r^2(2r + 15).$$ ■

FIGURA 3.17



EJEMPLO 6 Dos barcos parten de un puerto a la misma hora, uno viaja hacia el oeste con una velocidad de 17 millas por hora, y el otro hacia el sur a 12 millas por hora. Si t es el tiempo (en horas) que ha transcurrido desde su partida, expresar la distancia d entre los barcos como una función de t.

SOLUCIÓN Para ayudar a visualizar el problema empezamos por hacer un croquis y se marca como el que se muestra en la Figura 3.17. Usando el teorema de Pitágoras obtenemos

$$d^2 = a^2 + b^2$$

o bien

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Puesto que distancia = (velocidad)(tiempo) y las velocidades son de 17 y 12, respectivamente,

$$a = 17t \quad \text{y} \quad b = 12t.$$

Sustituyendo en $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ se obtiene

$$d = \sqrt{(17t)^2 + (12t)^2} = \sqrt{289t^2 + 144t^2} = \sqrt{433t^2}.$$

Entonces, la relación funcional es

$$d = \sqrt{433}t.$$

Una fórmula *aproximada* para expresar a d como una función de t es $d \approx (20.8)t$. ■

Si $f(x) = x$ para toda x en el dominio D de f, entonces f se llama **función identidad** sobre D. Una función f es una **función constante** si hay algún elemento (fijo) c en el contradominio tal que $f(x) = c$ para todo x en el dominio. Si una función constante se representa mediante un diagrama del tipo que se muestra en la Figura 3.15, *toda* flecha que parte de D termina en el mismo punto en E.

Con frecuencia aparecen las funciones definidas a continuación.

DEFINICIÓN

Una función f con dominio D es

(i) **par** si $f(-x) = f(x)$ para todo x en D,

(ii) **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en D.

EJEMPLO 7

(a) Si $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$, demostrar que f es una función par.

(b) Si $g(x) = 2x^5 - 7x^3 + 4x$, demostrar que g es una función impar.

SOLUCIÓN Si x es cualquier número real, entonces

(a)
$$f(-x) = 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 5$$
$$= 3x^4 - 2x^2 + 5 = f(x)$$

y por consiguiente f es par.

(b)
$$g(-x) = 2(-x)^5 - 7(-x)^3 + 4(-x)$$
$$= -2x^5 + 7x^3 - 4x$$
$$= -(2x^5 - 7x^3 + 4x) = -g(x)$$

En consecuencia, g es impar. ■

Ejercicios 3.3

1. Si $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, obtenga $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$ y $f(2)$.
2. Si $f(x) = x^3 + 5x^2 - 1$, obtenga $f(2)$, $f(-2)$, $f(0)$ y $f(-1)$.
3. Si $f(x) = \sqrt{x-1} + 2x$, obtenga $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$ y $f(10)$.
4. Si $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, determine $f(1)$, $f(3)$, $f(-2)$ y $f(0)$.

En los Ejercicios 5 a 8, encuentre cada uno de los siguientes valores, donde a, b y h son números reales.

(a) $f(a)$ (b) $f(-a)$ (c) $-f(a)$

(d) $f(a+h)$ (e) $f(a) + f(h)$

(f) $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, donde $h \neq 0$

5. $f(x) = 5x - 2$
6. $f(x) = 3 - 4x$
7. $f(x) = 2x^2 - x + 3$
8. $f(x) = x^3 - 2x$

En los Ejercicios 9 a 12, obtenga los siguientes valores:

(a) $g(1/a)$ (b) $1/g(a)$ (c) $g(a^2)$

(d) $(g(a))^2$ (e) $g(\sqrt{a})$ (f) $\sqrt{g(a)}$

9. $g(x) = 3x^2$
10. $g(x) = 3x - 8$
11. $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$
12. $g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

En los Ejercicios 13 a 20, determine el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ que puede servir de dominio a la función f.

13. $f(x) = \sqrt{3x - 5}$
14. $f(x) = \sqrt{7 - 2x}$
15. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
16. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
17. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3 - 9x}$
18. $f(x) = \dfrac{4x+7}{6x^2 + 13x - 5}$
19. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x^2 - 11x + 12}$
20. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

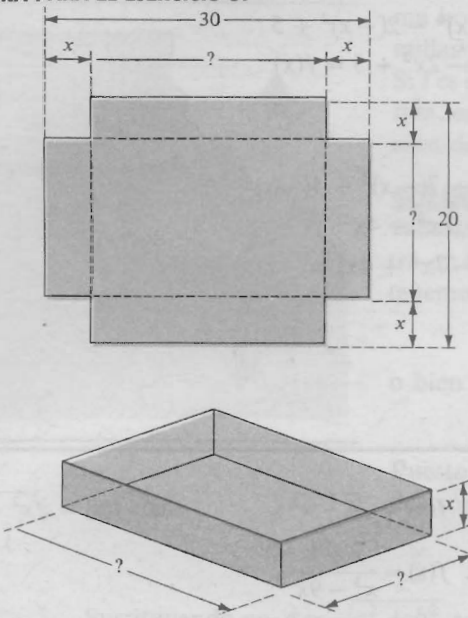
En los Ejercicios 21 a 26, determine el valor de x tal que $f(x) = 4$. Si $a > 0$, ¿para qué valor de x se tendrá $f(x) = a$? Obtenga el contradominio de f.

21. $f(x) = 7x - 5$
22. $f(x) = 3x$
23. $f(x) = \sqrt{x - 3}$
24. $f(x) = 1/x$
25. $f(x) = x^3$
26. $f(x) = \sqrt[3]{x - 4}$

En los Ejercicios 27 a 36, determine si f es par, impar o ninguna de éstas.

27. $f(x) = 3x^3 - 4x$
28. $f(x) = 7x^6 - x^4 + 7$
29. $f(x) = 9 - 5x^2$
30. $f(x) = 2x^5 - 4x^3$
31. $f(x) = 2$
32. $f(x) = 2x^3 + x^2$
33. $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$
34. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
35. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4}$
36. $f(x) = |x| + 5$
37. De una pieza rectangular de cartulina de 20 pulg por 30 pulg, se construye una caja abierta, cortando de las esquinas cuadrados iguales de área x^2 y doblando hacia arriba la cartulina para formar las caras laterales. (Véase la figura.) Exprese el volumen V de la caja en función de x.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 37

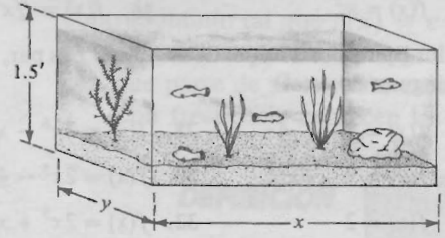


38. Se desea que un acuario de altura 1.5 pie tenga un volumen de 6 pie^3. Si x representa la longitud de la base, y y la anchura (véase la figura).

(a) Exprese y como función de x.

(b) Exprese como función de x el número total de pies cuadrados de vidrio que se requieren para la construcción.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 38

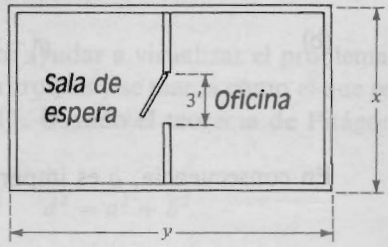


39. Un pequeño edificio de oficinas debe contar con 500 pie^2 de espacio de piso. El plano de un piso simple se muestra en la figura.

(a) Exprese la longitud y del edificio como función del ancho x.

(b) Si el costo de las paredes es de \$100 por metro lineal, exprese el costo C de las paredes como función del ancho x. (No tome en cuenta el espacio de pared sobre la puerta.)

FIGURA PARA EL EJERCICIO 39



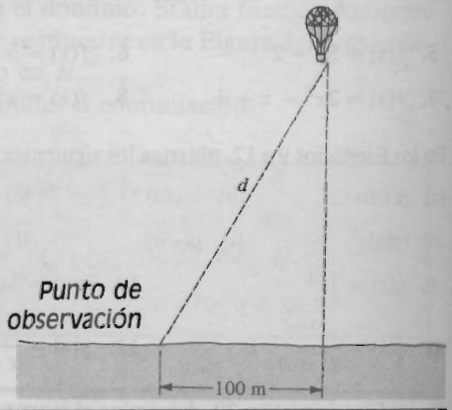
40. Un meteorologista infla un globo esférico con gas helio.

(a) Exprese el área superficial del globo como función del volumen del gas que contiene.

(b) ¿Cuál será el área superficial si el volumen es de 12 pie^3?

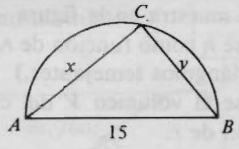
41. Un globo de aire caliente se suelta a la 1:00 P.M. y sube verticalmente con una velocidad de 2 m/s. Un punto de observación se sitúa a 100 m desde un punto en tierra directamente abajo del globo (véase la figura). Si t denota el tiempo (en segundos) después de la 1:00 P.M., exprese la distancia d entre el globo y el punto de observación como función de t.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 41



42. El triángulo ABC está inscrito en un semicírculo de diámetro 15 (véase la figura).

FIGURA PARA EL EJERCICIO 42

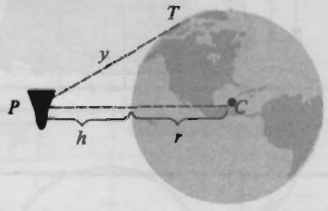


(a) Si x representa la longitud del lado AC, exprese la longitud del lado BC como función de x.

(b) Exprese el área del triángulo ABC como función de x y determine el dominio de esta función.

43. Se traza una tangente a un círculo de radio r desde un punto exterior P que está a h unidades del círculo (véase la figura). Sea y la distancia del punto P al punto de tangencia T.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 43



(a) Exprese y como una función de h. (*Sugerencia:* Si C es el centro del círculo, entonces PT es perpendicular a CT.)

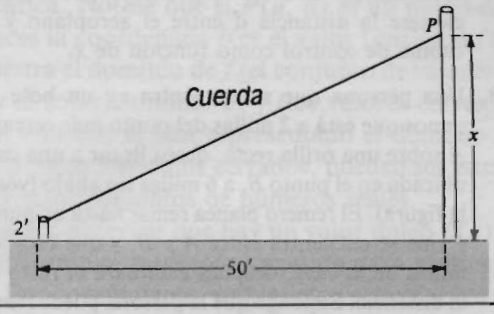
(b) Si r es el radio de la Tierra y h es la altitud a la que se encuentra un trasbordador espacial, se puede deducir una fórmula para la distancia máxima a la Tierra) que un astronauta puede ver desde el trasbordador. En particular si $h = 200$ millas y $r \approx 4\,000$ millas, obtenga el valor aproximado de y.

44. La figura ilustra el aparato que utiliza un acróbata que camina sobre la cuerda. Se colocan dos partes separadas a una distancia de 50 pie, pero el punto P en el que se ata la cuerda debe determinarse.

(a) Exprese la longitud L de la cuerda como función de la distancia x que hay del punto P al piso.

(b) Si la caminata total debe ser de 75 pie, calcule la altura del punto P.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 44

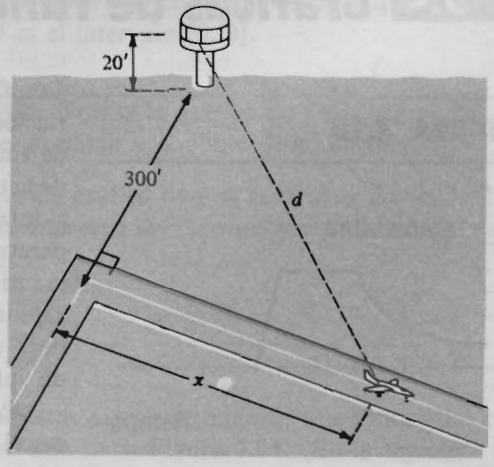


45. Se desea construir un tanque de acero para almacenar gas propano, cuya forma sea un cilindro circular recto de altura 10 pie con una semiesfera fijada en cada extremo. El radio r debe determinarse aún. Exprese el área superficial S del tanque como función de r. (Compare con el Ejemplo 5.)

46. Una compañía vende zapatos para correr, a los distribuidores, a \$20 (dólares) el par si piden menos de 50 pares. Si un distribuidor ordena 50 pares o más (hasta 600), el precio por par se reduce a razón de 2 centavos por el número de pares ordenados. Si A representa la cantidad de dinero recibida cuando se piden x pares, exprese A como función de x.

47. Las posiciones relativas de una pista de aterrizaje y una torre de control de 20 pie de altura se muestran en la figura. El principio de la pista

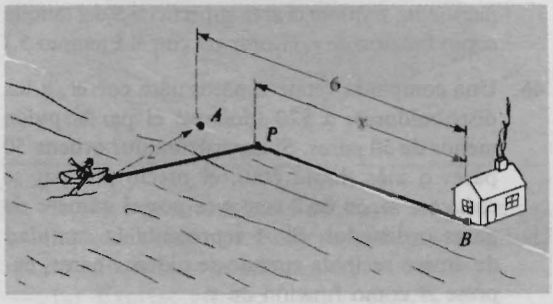
FIGURA PARA EL EJERCICIO 47



se encuentra a una distancia perpendicular de 300 pie de la base de la torre. Si x representa la distancia que un avión ha avanzado por la pista, exprese la distancia d entre el aeroplano y la cabina de control como función de x.

48. Una persona que se encuentra en un bote de remos que está a 2 millas del punto más cercano A sobre una orilla recta, desea llegar a una casa ubicada en el punto B, a 6 millas río abajo (véase la figura). El remero planea remar hasta un punto P que se encuentra entre A y B, y que está a x millas de la casa; después caminará el resto de la distancia. Suponga que la persona puede remar a una velocidad de 3 millas por hora, y caminar a una velocidad de 5 millas por hora. Si T es el tiempo total requerido para llegar a la casa, exprese T como función de x.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 48

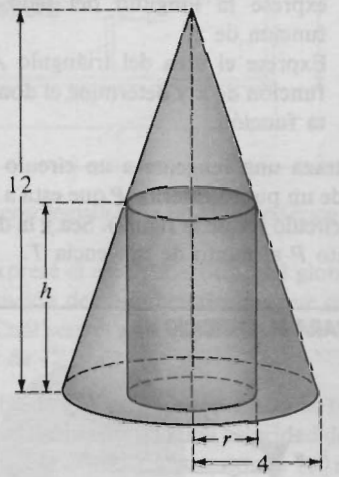


49. Un cilindro rectangular de radio r y altura h está inscrito en un cono de altura 12 y radio de la base 4, como se muestra en la figura.

(a) Exprese h como función de r. (*Sugerencia:* Use triángulos semejantes.)

(b) Exprese el volumen V del cilindro como función de r.

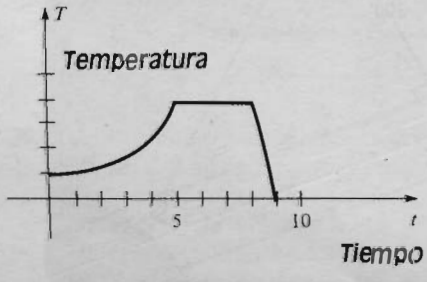
FIGURA PARA EL EJERCICIO 49



50. Considere que un punto $P(x, y)$ se mueve sobre la parábola $y = x^2$. Sea d la distancia del punto $A(3, 1)$ a P. Exprese d como función de x.

3.4 Gráficas de funciones

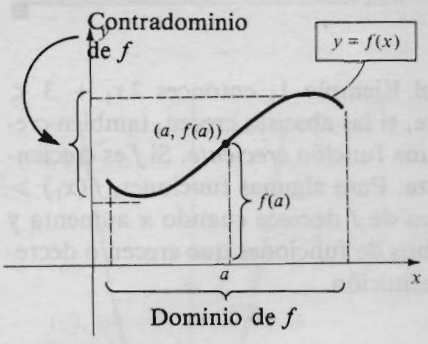
FIGURA 3.18



Con frecuencia, las gráficas se emplean para describir la variación de cantidades físicas. Por ejemplo, un científico puede emplear la Figura 3.18 para mostrar el comportamiento de la temperatura T de cierta solución en diferentes instantes t durante un experimento. La gráfica muestra que la temperatura aumenta gradualmente entre $t = 0$ y $t = 5$, se mantiene constante entre $t = 5$ y $t = 8$, y disminuye rápidamente de $t = 8$ a $t = 9$. Para analizar las variaciones de T es más valiosa una gráfica de este tipo que una tabla de valores numéricos.

Podemos emplear la gráfica de una función f para analizar el comportamiento de $f(x)$ cuando los valores x del dominio varían. La **gráfica de una función** f es la gráfica de la

FIGURA 3.19

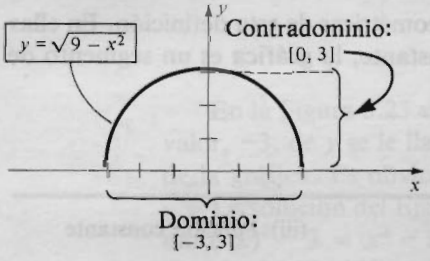


ecuación $y = f(x)$ para x en el dominio de f. Como se muestra en la Figura 3.19, a menudo se marca $y = f(x)$ en el dibujo de la gráfica. Nótese que si $P(a, b)$ es un punto de la gráfica entonces la coordenada b es el valor funcional $f(a)$. La figura muestra el dominio de f (el conjunto de valores posibles de x) y el contradominio de f (los valores correspondientes de y). Aunque se han representado el dominio y el contradominio como intervalos cerrados, pueden ser intervalos infinitos u otros conjuntos de números reales.

Es importante observar que hay un valor único $f(a)$ para cada a en el dominio, pues sólo *un* punto de la gráfica tiene abscisa a. Por consiguiente, *toda recta vertical corta a la gráfica de una función a lo más en un punto*. En consecuencia, la gráfica de la función no puede ser una figura del tipo de una circunferencia, en la que una recta vertical puede cortar a la gráfica en varios puntos.

Las intercepciones x de la gráfica de una función f son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. Estos números se conocen como **ceros** de la función. La intercepción y de la gráfica es $f(0)$, si es que existe.

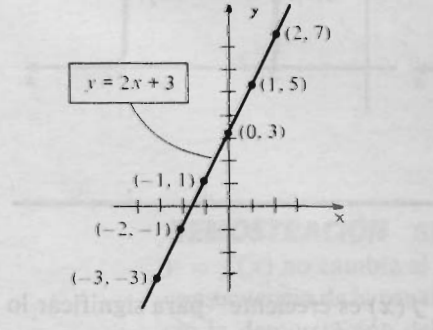
FIGURA 3.20



EJEMPLO 1 Si $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, trazar la gráfica de f y encontrar el dominio y el contradominio de f.

SOLUCIÓN Por definición, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{9 - x^2}$. Sabemos, de nuestro trabajo con circunferencias en la Sección 3.2, que la gráfica de $x^2 + y^2 = 9$ es una circunferencia de radio 3 con centro en el origen. Resolviendo la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ para evaluar y se obtiene $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Se sigue que la gráfica de f es la *mitad superior* de la circunferencia, como se muestra en la Figura 3.20. Refiriéndose a la figura, se observa que el dominio de f es el intervalo cerrado $[-3, 3]$ y que el contradominio de f es el intervalo $[0, 3]$. ■

FIGURA 3.21



EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de f si $f(x) = 2x + 3$ y determine el dominio y el contradominio de f.

SOLUCIÓN La gráfica de f es la de $y = 2x + 3$. En la siguiente tabla aparecen las coordenadas de algunos puntos de la gráfica.

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	3	5	7

Al representar estos puntos se advierte que todos ellos caen sobre la línea recta de la Figura 3.21. (En la siguiente sección, *demostraremos* que la gráfica es una línea recta.)

Puesto que los valores de x y de y pueden ser cualesquiera números reales, el dominio y el contradominio de f son $\mathbb{R}$. ■

Nótese que si $x_1 < x_2$ y f es la función del Ejemplo 1, entonces $2x_1 + 3 < 2x_2 + 3$; es decir $f(x_1) < f(x_2)$. Esto significa que, si las abscisas crecen, también crecen las ordenadas. Si sucede esto, se dice que f es una función *creciente*. Si f es creciente, entonces su gráfica crece cuando x se incrementa. Para algunas funciones, $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$; en este caso, la gráfica de f decrece cuando x aumenta y f es una función *decreciente*. En general, hablaremos de funciones que crecen o decrecen en ciertos intervalos, como en la siguiente definición.

DEFINICIÓN

Sea una función f definida sobre un intervalo I y sean x_1, x_2 números en I.

(i) f es **creciente** en I si $f(x_1) < f(x_2)$, siempre que $x_1 < x_2$.

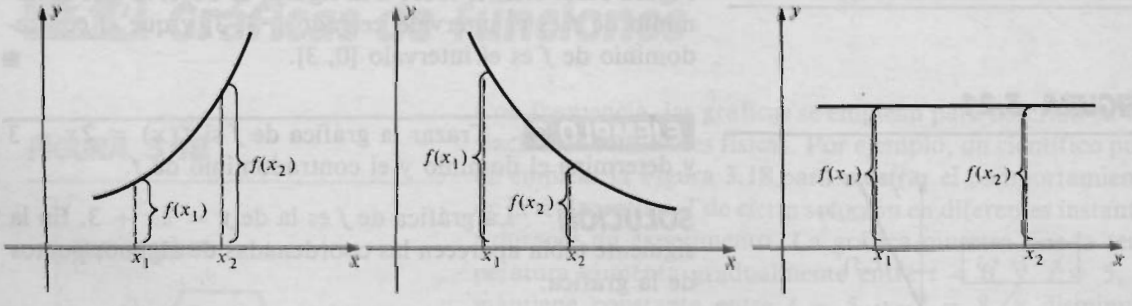
(ii) f es **decreciente** en I si $f(x_1) > f(x_2)$, siempre que $x_1 < x_2$.

(iii) f es **constante** en I si $f(x_1) = f(x_2)$ para todo x_1 y x_2.

En la Figura 3.22 se dan las interpretaciones geométricas de esta definición. En ellas no se indica el intervalo I. Nótese que si f es constante, la gráfica es un segmento de recta horizontal.

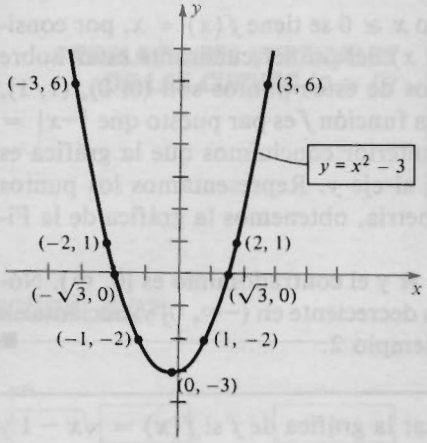
FIGURA 3.22

(i) Función creciente (ii) Función decreciente (iii) Función constante



Se usarán las expresiones "f es creciente" y "$f(x)$ es creciente" para significar lo mismo. Esto se hará también con el término "decreciente".

FIGURA 3.23



EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de f si $f(x) = x^2 - 3$ y encontrar el dominio y el contradominio de f. Determinar los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

SOLUCIÓN Las coordenadas (x, y) de algunos puntos de la gráfica de f se listan en la siguiente tabla, en la que $y = x^2 - 3$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	1	-2	-3	-2	1	6

Las intersecciones con el eje x dan las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, es decir $x^2 - 3 = 0$; ésas son $\pm\sqrt{3}$. La intersección con el eje y es $f(0) = -3$. Representamos estas intercepciones así como los puntos de la tabla, y obtenemos la curva de la Figura 3.23.

Puesto que x puede tomar cualquier valor, el dominio de f es $\mathbb{R}$. El contradominio de f consiste en todos los números reales y tales que $y \geq -3$, y por tanto es el intervalo $[-3, \infty)$.

De la gráfica se observa que f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y que f es creciente en $[0, \infty)$. ■

En la Figura 3.23 vemos que $f(x) = x^2 - 3$ tiene un mínimo en $x = 0$. Al menor valor, -3, de y se le llama **valor mínimo** de f. El punto $(0, -3)$ es el punto más bajo de la gráfica. Es obvio que en este ejemplo, $f(x)$ no tiene un **valor máximo**.

La solución del Ejemplo 3 se puede obtener más rápidamente observando que, como $(-x)^2 - 3 = x^2 - 3$, la gráfica de $y = x^2 - 3$ es simétrica con respecto al eje y. Este hecho también se puede deducir de la parte (i) del siguiente teorema.

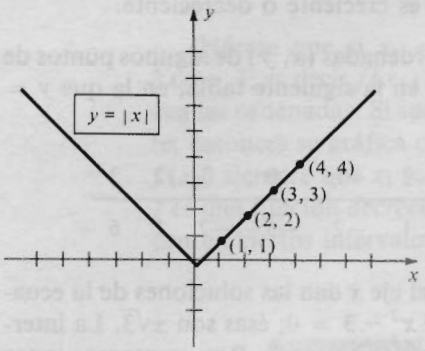
TEOREMA DE SIMETRÍA

(i) La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y.

(ii) La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

DEMOSTRACIÓN Si f es par se tiene $f(-x) = f(x)$ y por consiguiente la ecuación $y = f(x)$ no cambia al sustituir x por $-x$. De aquí que la parte (i) del teorema sea una consecuencia de la prueba de simetría (i) de la Sección 3.2. Se deja al lector como ejercicio la demostración del enunciado (ii) del teorema. □

FIGURA 3.24

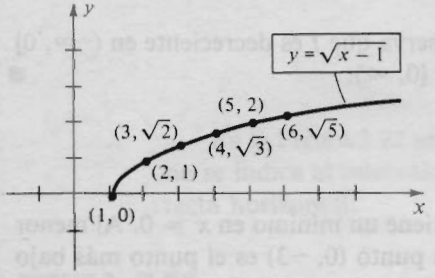


EJEMPLO 4 Trazar la gráfica de f si $f(x) = |x|$ y encontrar el dominio y contradominio de f. Determinar los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

SOLUCIÓN Cuando $x \geq 0$ se tiene $f(x) = x$, por consiguiente, los puntos (x, x) del primer cuadrante están sobre la gráfica de f. Algunos de estos puntos son (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3) y (4, 4). La función f es par puesto que $|-x| = |x|$ y por el teorema anterior concluimos que la gráfica es simétrica con respecto al eje y. Representamos los puntos mencionados y por simetría, obtenemos la gráfica de la Figura 3.24.

El dominio de f es $\mathbb{R}$ y el contradominio es $[0, \infty)$. Nótese que esta función es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$, como la del Ejemplo 2. ■

FIGURA 3.25



EJEMPLO 5 Trazar la gráfica de f si $f(x) = \sqrt{x-1}$ y hallar el dominio y el contradominio de f. Determinar dónde es f creciente o decreciente.

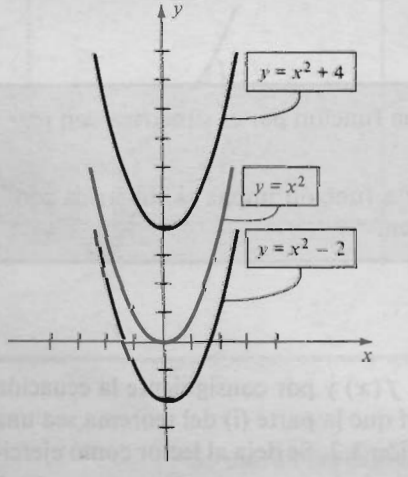
SOLUCIÓN El dominio de f consiste en todos los números reales x tales que $x \geq 1$ y, por ello, es el intervalo $[1, \infty)$. La tabla siguiente da algunos puntos (x, y) de la gráfica, en la que $y = \sqrt{x-1}$.

x	1	2	3	4	5	6
y	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$

Representando estos puntos se obtiene la Figura 3.25.

De la gráfica se observa que el dominio de f es $[0, \infty)$. La función es creciente en su dominio. La intercepción x es 1 y no hay intercepción y. ■

FIGURA 3.26



EJEMPLO 6 Sea $f(x) = x^2 + c$; trazar la gráfica de f para (a) $c = 4$; (b) $c = -2$.

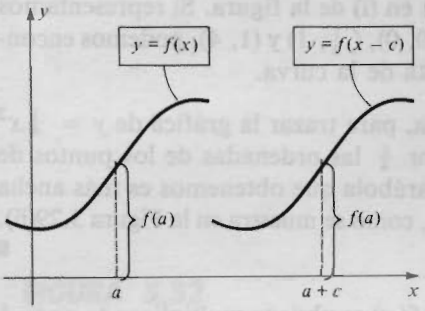
SOLUCIÓN Trazaremos las dos gráficas en el mismo plano coordenado. En la Figura 3.8 tenemos la gráfica de $y = x^2$ y para poderla emplear como referencia, la hemos representado en la Figura 3.26 en color. Para obtener la gráfica de $f(x) = x^2 + 4$ hay que aumentar en 4 unidades la ordenada de cada uno de los puntos de la curva $y = x^2$, como se muestra en la figura (¿Por qué?). Esto equivale a *trasladar* la curva $y = x^2$ *hacia arriba* 4 unidades. Para $c = -2$ disminuimos las ordenadas en 2 unidades, y por consiguiente la curva de $y = x^2 - 2$ está 2 unidades *hacia abajo* de $y = x^2$. Cada una de las gráficas es una parábola simétrica al eje y. Con el objeto de obtener las posiciones correctas de cada parábola es conveniente representar algunos de sus puntos. ■

Las curvas del ejemplo anterior, ilustran **traslaciones verticales** de la parábola $y = x^2$ y son casos especiales de las siguientes reglas generales.

TRASLACIONES VERTICALES DE LAS CURVAS ($c > 0$)

Para trazar la gráfica de:	Traslade la gráfica de $y = f(x)$:
$y = f(x) - c$	c unidades hacia abajo
$y = f(x) + c$	c unidades hacia arriba

FIGURA 3.27



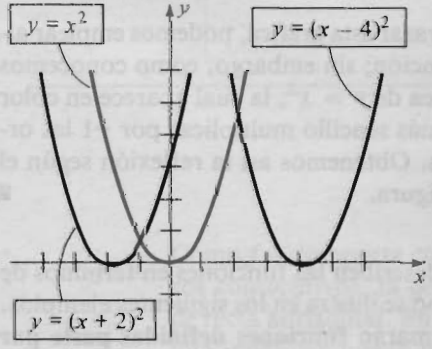
Podemos establecer reglas similares para las **traslaciones horizontales**. En particular, si $c > 0$, consideremos las gráficas de las funciones $y = f(x)$ y $y = f(x - c)$ en un mismo plano coordenado, como se ilustra en la Figura 3.27.

Como $f(a) = f(a + c - c)$, el punto de abscisa a sobre la curva $y = f(x)$ tiene la misma ordenada que aquel cuya abscisa es $a + c$ sobre la gráfica de la función $y = f(x - c)$. Esto implica que podemos obtener la segunda curva trasladando la primera c unidades hacia la derecha. De manera análoga, trazamos la gráfica de la función $y = f(x + c)$ trasladando f a la izquierda c unidades. Enunciamos estas reglas en el siguiente cuadro.

TRASLACIONES HORIZONTALES DE LAS CURVAS ($c > 0$)

Para trazar la gráfica de:	Traslade la gráfica de $y = f(x)$:
$y = f(x - c)$	c unidades a la derecha
$y = f(x + c)$	c unidades a la izquierda

FIGURA 3.28

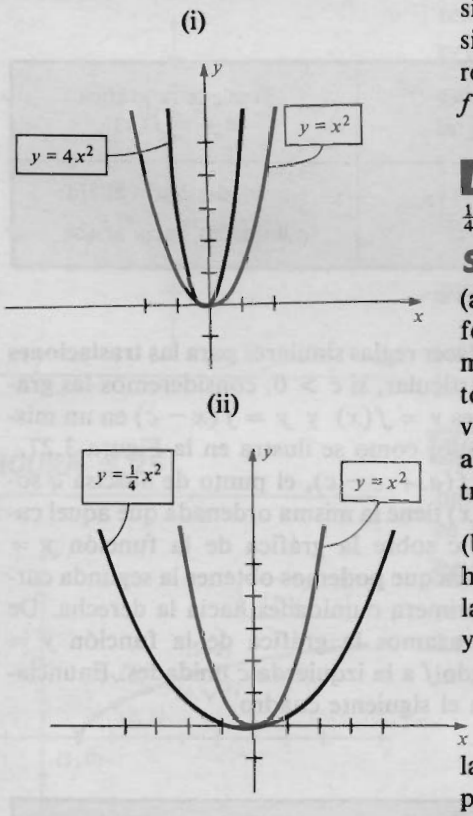


EJEMPLO 7 Trazar la gráfica de f si

(a) $f(x) = (x - 4)^2$ (b) $f(x) = (x + 2)^2$

SOLUCIÓN Hemos representado la parábola $y = x^2$ en color, en la Figura 3.28. De acuerdo con las dos reglas anteriores, la traslación de esta curva 4 unidades hacia la derecha, da la gráfica de la función $y = (x - 4)^2$; la traslación de $y = x^2$ hacia la izquierda 2 unidades, da la gráfica de $y = (x + 2)^2$. Si el lector no está convencido, puede representar varios puntos de cada una de las curvas. ■

FIGURA 3.29



Para trazar la gráfica de $y = cf(x)$ hay que *multiplicar* por c las ordenadas de los puntos de $y = f(x)$. Por ejemplo, si $y = 2f(x)$, tenemos que multiplicar por 2 las ordenadas; si $y = \frac{1}{2}f(x)$, multiplicamos por $\frac{1}{2}$. Si $c > 0$ (y $c \neq 1$) nos referiremos a este proceso como **estiramiento** de la curva $y = f(x)$.

EJEMPLO 8 Trazar la gráfica de (a) $y = 4x^2$; (b) $y = \frac{1}{4}x^2$.

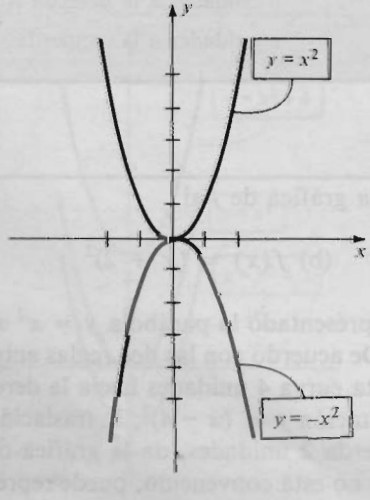
SOLUCIÓN

(a) Para trazar la gráfica de la función $y = 4x^2$ haremos referencia a la curva $y = x^2$ (en color en la Figura 3.29 (i)) y multiplicaremos las ordenadas de cada punto por 4. Con esto obtenemos una parábola más angosta y puntiaguda en el vértice, como se ilustra en (i) de la figura. Si representamos algunos puntos como (0, 0), $(\frac{1}{2}, 1)$ y (1, 4), podemos encontrar la posición correcta de la curva.

(b) De manera análoga, para trazar la gráfica de $y = \frac{1}{4}x^2$ hay que multiplicar por $\frac{1}{4}$ las ordenadas de los puntos de la curva $y = x^2$. La parábola que obtenemos es más ancha y aplanada en el vértice, como se muestra en la Figura 3.29(ii). ■

La curva de $y = -f(x)$ se obtiene multiplicando por -1 las ordenadas de cada uno de los puntos de $y = f(x)$. En particular, cada punto (a, b) de la curva $y = f(x)$, por encima del eje x, determina un punto $(a, -b)$ por debajo del mismo eje. De manera análoga, si (c, d) está abajo del eje x (es decir, $d < 0$), entonces $(c, -d)$ estará por encima del mismo eje. La gráfica de $y = -f(x)$ es una **reflexión** (o **simetría**) de la curva $y = f(x)$ con respecto al eje x.

FIGURA 3.30

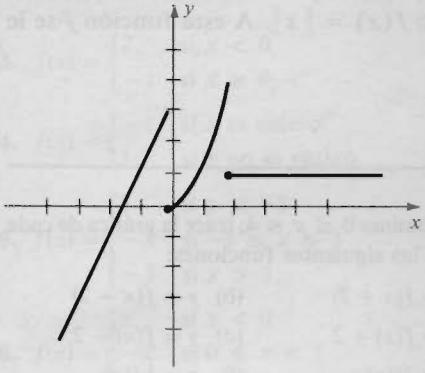


EJEMPLO 9 Trazar la gráfica de la función $y = -x^2$.

SOLUCIÓN Para trazar esta gráfica, podemos emplear algunos puntos de la función; sin embargo, como conocemos perfectamente la gráfica de $y = x^2$, la cual aparece en color en la Figura 3.30, es más sencillo multiplicar por -1 las ordenadas de sus puntos. Obtenemos así la reflexión según el eje x indicada en la figura. ■

Algunas veces se describen las funciones en términos de varias expresiones como se ilustra en los siguientes ejemplos. Tales funciones se llamarán **funciones definidas parte por parte**.

FIGURA 3.31



EJEMPLO 10 Trazar la gráfica de la función definida de la manera siguiente:

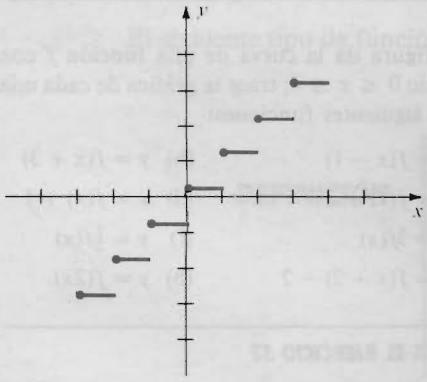
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Si $x < 0$, entonces $f(x) = 2x + 3$. Esto quiere decir que si x es negativa, debemos usar la expresión $2x + 3$ para obtener los valores de $f(x)$. Por lo tanto, si $x < 0$, la gráfica de f coincide con la recta $y = 2x + 3$ de la Figura 3.21 y trazamos la porción de la recta a la izquierda del eje y como se indica en la Figura 3.31.

Si $0 \leq x < 2$, hay que emplear la expresión x^2 para determinar los valores de $f(x)$ y, por consiguiente, esta porción de la gráfica coincide con la parábola $y = x^2$. Trazamos esta parábola entre $x = 0$ y $x = 2$, como se muestra en la Figura 3.31.

Por último, si $x \geq 2$, los valores de f son siempre 1. Esta parte de la gráfica corresponde a la semirrecta horizontal de la Figura 3.31. ■

FIGURA 3.32



EJEMPLO 11 Si x es un número real cualquiera, existen enteros consecutivos n y $n + 1$, tales que $n \leq x < n + 1$. Sea f la función definida de la manera siguiente: si $n \leq x < n + 1$, entonces $f(x) = n$. Trazar la gráfica de f.

SOLUCIÓN Podemos hacer una tabla con las abscisas y ordenadas de los puntos de la gráfica de f, de la manera siguiente:

Valores de x	$f(x)$
...	...
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2
...	...

Como f se comporta como una función constante cuando x está entre dos valores enteros consecutivos, la porción correspondiente de la gráfica entre ellos es un segmento de recta horizontal. En la Figura 3.32, se tiene una parte de la gráfica. La gráfica continúa indefinidamente hacia la derecha y hacia la izquierda. ■

Frecuentemente, se usa el símbolo $[\![x]\!]$ para denotar el mayor entero z tal que $z \leq x$. Por ejemplo, $[\![1.6]\!] = 1$, $[\![\sqrt{5}]\!] = 2$, $[\![\pi]\!] = 3$ y $[\![-3.5]\!] = -4$. Con esta notación se puede definir la función f del Ejemplo 11 como $f(x) = [\![x]\!]$. A esta función f se le llama **función mayor entero**.

Ejercicios 3.4

En cada uno de los Ejercicios 1 a 20, trace la gráfica de f, determine el dominio y el contradominio de f y describa los intervalos en los que f es creciente, decreciente o constante.

1. $f(x) = 5x$
2. $f(x) = -3x$
3. $f(x) = -4x + 2$
4. $f(x) = 4x - 2$
5. $f(x) = 3 - x^2$
6. $f(x) = 4x^2 + 1$
7. $f(x) = 2x^2 - 4$
8. $f(x) = \frac{1}{100}x^2$
9. $f(x) = \sqrt{x + 4}$
10. $f(x) = \sqrt{4 - x}$
11. $f(x) = \sqrt{x} + 2$
12. $f(x) = 2 - \sqrt{x}$
13. $f(x) = 4/x$
14. $f(x) = 1/x^2$
15. $f(x) = |x - 2|$
16. $f(x) = |x + 2|$
17. $f(x) = |x| - 2$
18. $f(x) = |x| + 2$
19. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$
20. $f(x) = x + |x|$

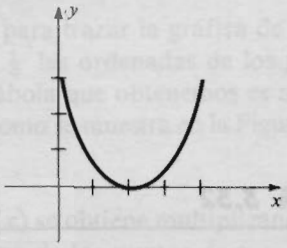
En los Ejercicios 21 a 30, trace las gráficas de f, para los valores dados de c, en un mismo plano coordenado. (Utilice traslaciones verticales y horizontales, estiramientos, reflexiones o simetrías).

21. $f(x) = 3x + c$; $c = 0$, $c = 2$, $c = -1$
22. $f(x) = -2x + c$; $c = 0$, $c = 1$, $c = -3$
23. $f(x) = x^3 + c$; $c = 0$, $c = 1$, $c = -2$
24. $f(x) = -x^3 + c$; $c = 0$, $c = 2$, $c = -1$
25. $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + c$; $c = 0$, $c = 4$, $c = -3$
26. $f(x) = c - |x|$; $c = 0$, $c = 5$, $c = -2$
27. $f(x) = 3(x - c)$; $c = 0$, $c = 2$, $c = 3$
28. $f(x) = -2(x - c)^2$; $c = 0$, $c = 3$, $c = 1$
29. $f(x) = (x + c)^3$; $c = 0$, $c = 2$, $c = -2$
30. $f(x) = c\sqrt{9 - x^2}$; $c = 0$, $c = 2$, $c = 3$

31. Si la figura corresponde a la curva de una función f con dominio $0 \leq x \leq 4$; trace la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

(a) $y = f(x + 2)$ (b) $y = f(x - 2)$
(c) $y = f(x) + 2$ (d) $y = f(x) - 2$
(e) $y = 2f(x)$ (f) $y = \frac{1}{2}f(x)$
(g) $y = -2f(x)$ (h) $y = f(x - 3) + 1$

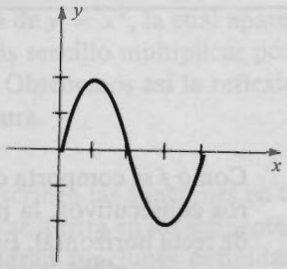
FIGURA PARA EL EJERCICIO 31



32. Si la figura da la curva de una función f con dominio $0 \leq x \leq 4$; trace la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

(a) $y = f(x - 1)$ (b) $y = f(x + 3)$
(c) $y = f(x) - 2$ (d) $y = f(x) + 1$
(e) $y = 3f(x)$ (f) $y = \frac{1}{2}f(x)$
(g) $y = f(x + 2) - 2$ (h) $y = f(2x)$

FIGURA PARA EL EJERCICIO 32



En cada uno de los Ejercicios 33 a 40, trace la gráfica de f.

33. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \text{ es entero} \\ 1 & \text{si } x \text{ no es entero} \end{cases}$

35. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -3 \\ -x & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ -3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ -2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 & \text{si } |x| < 1 \\ 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{1 - x} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

41. Si $[\![x]\!]$ denota la función ayor entero, trace las siguientes gráficas:

(a) $f(x) = [\![x - 3]\!]$ (b) $f(x) = 2[\![x]\!]$

(c) $f(x) = -[\![x]\!]$

42. Explique por qué la gráfica de la ecuación $y^2 = x$ no es la gráfica de una función.

3.5 Funciones lineales

El siguiente tipo de función es de gran importancia en matemáticas y sus aplicaciones.

DEFINICIÓN

f es una **función lineal** si

$$f(x) = ax + b$$

en donde a y b son números reales y $a \neq 0$.

Se utiliza el término "lineal" porque la gráfica de f es una línea recta, como lo veremos posteriormente en esta sección. Primero, presentaremos algunos conceptos fundamentales sobre líneas rectas. Todas las rectas a las que nos referiremos están en un plano coordenado.*

* En el Capítulo 11, Sección 11.1, se da una descripción complementaria de lo referente a la recta.

DEFINICIÓN

Sean l una recta no paralela al eje y, y $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos diferentes de l. La **pendiente** m de l se define por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Si l es paralela al eje y, su pendiente no está definida.

Puntos típicos P_1 y P_2 de una recta l se dan en la Figura 3.33. El numerador $y_2 - y_1$ en la fórmula para m, mide el cambio en la dirección vertical al pasar de P_1 a P_2 y puede ser negativo, positivo o cero. El denominador $x_2 - x_1$ mide el cambio horizontal al ir de P_1 a P_2. El denominador puede ser positivo o negativo pero nunca cero, debido a que l no es paralela al eje y. Se tiene que

$$\text{pendiente de } l = \frac{\text{desnivel de } P_1 \text{ a } P_2}{\text{corrimiento de } P_1 \text{ a } P_2}.$$

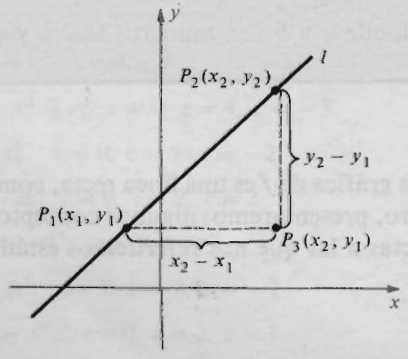
Para obtener la pendiente de una recta, no importa a cuál de los puntos consideremos como P_1 y a cuál como P_2, ya que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

En consecuencia, podemos suponer que los puntos están numerados de manera que $x_1 < x_2$, como en la Figura 3.33. En este caso, $x_2 - x_1 > 0$ y por lo tanto la pendiente es positiva, negativa o cero si $y_2 > y_1$, $y_2 < y_1$ o bien $y_2 = y_1$, respectivamente. La pendiente de la recta que se muestra en (i) de la Figura 3.33 es positiva, mientras que la de (ii) es negativa.

FIGURA 3.33

(i) Pendiente positiva



(ii) Pendiente negativa

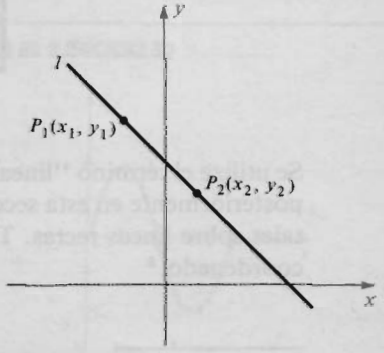
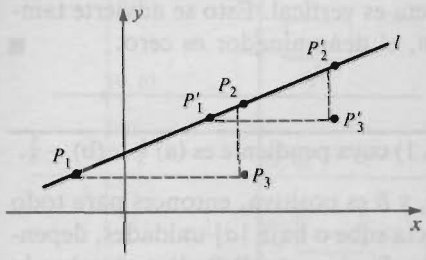


FIGURA 3.34



Una **recta horizontal** es una paralela al eje x. Nótese que una recta es horizontal si y sólo si su pendiente es cero. Una **recta vertical** es una paralela al eje y. La pendiente de una recta vertical no está definida.

Es importante notar que la definición de pendiente no depende de los dos puntos que se eligen sobre l, ya que si se usan otros puntos $P_1'(x_1', y_1')$ y $P_2'(x_2', y_2')$, entonces, como se ve en la Figura 3.34, el triángulo con vértices P_1', P_2' y $P_3'(x_2', y_1')$ es semejante al triángulo con vértices P_1, P_2 y $P_3(x_2, y_1)$. Como los lados de ambos triángulos son proporcionales, concluimos que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}.$$

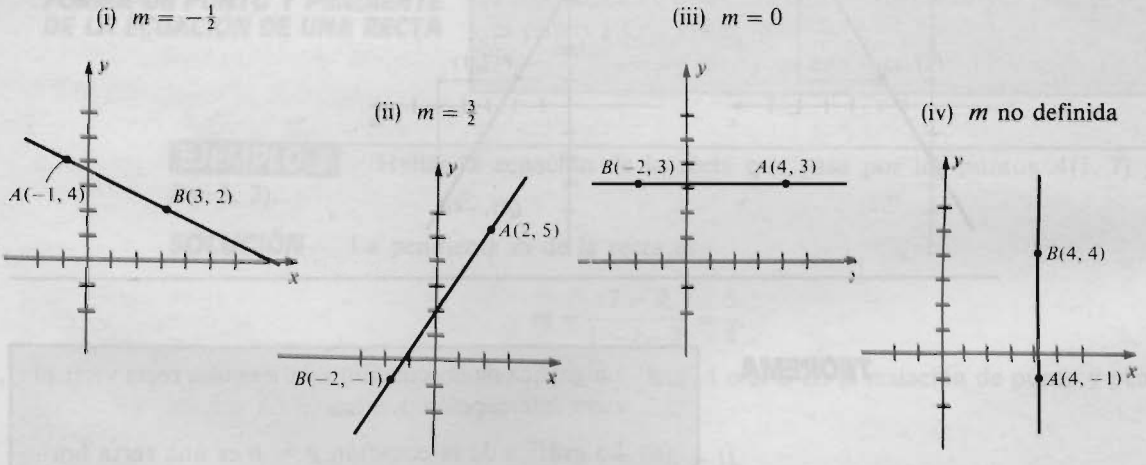
EJEMPLO 1 Trazar las rectas que pasan por los pares de puntos siguientes y encontrar sus pendientes

(a) $A(-1, 4)$ y $B(3, 2)$ (b) $A(2, 5)$ y $B(-2, -1)$

(c) $A(4, 3)$ y $B(-2, 3)$ (c) $A(4, -1)$ y $B(4, 4)$

SOLUCIÓN Las rectas se indican en la Figura 3.35.

FIGURA 3.35



Por la definición de pendiente

(a) $$m = \frac{2 - 4}{3 - (-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

(b) $$m = \frac{5 - (-1)}{2 - (-2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

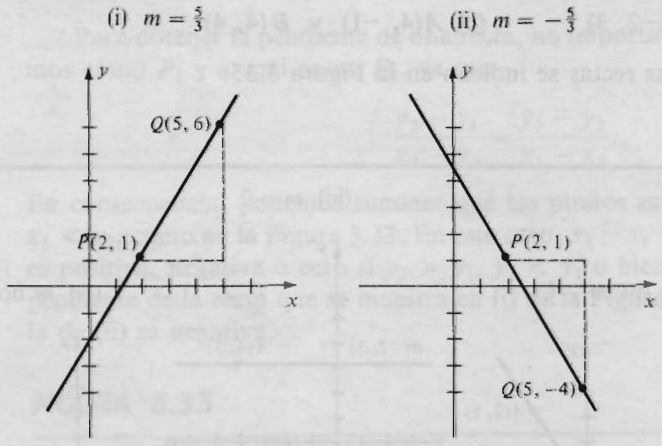
(c) $$m = \frac{3-3}{-2-4} = \frac{0}{-6} = 0$$

(d) La pendiente no está definida puesto que la recta es vertical. Esto se advierte también observando que si se utiliza la fórmula de m, el denominador es cero. ■

EJEMPLO 2 Trazar la recta que pasa por $P(2, 1)$ cuya pendiente es (a) $\frac{5}{3}$; (b) $-\frac{5}{3}$.

SOLUCIÓN Si la pendiente de una recta es a/b, y b es positiva, entonces para todo cambio de b unidades en dirección horizontal, la recta sube o baja $|a|$ unidades, dependiendo si a es positivo o negativo, respectivamente. Si el punto $P(2, 1)$ está sobre la recta y $m = \frac{5}{3}$, podemos obtener otro punto si se recorre 3 unidades a la derecha de P y luego 5 unidades hacia arriba. Con esto obtenemos el punto $Q(5, 6)$, y la recta queda determinada [véase la Figura 3.36(i)]. De manera análoga, si $m = -\frac{5}{3}$, nos trasladamos 3 unidades a la derecha y 5 unidades hacia abajo, lo cual da el punto $Q(5, -4)$ como se muestra en la Figura 3.36(ii).

FIGURA 3.36



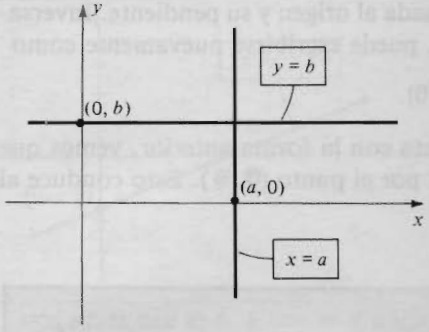
TEOREMA

(i) La gráfica de la ecuación $x = a$ es una recta vertical cuya intercepción x es a.

(ii) La gráfica de la ecuación $y = b$ es una recta horizontal cuya intercepción y es b.

DEMOSTRACIÓN Podemos considerar la ecuación $x = a$, donde a es un número real, como una ecuación en dos variables, x y y, ya que la podemos escribir en la forma $x + (0)y = a$. $(a, -2)$, $(a, 1)$ y $(a, 3)$ son algunas soluciones de esta ecuación. Evidentemente, todas las soluciones son pares de la forma (a, y), donde y toma cualquier valor y a es fijo.

FIGURA 3.37

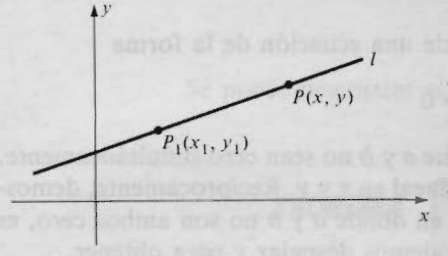


De aquí concluimos que $x = a$ es una recta paralela al eje y cuya intersección con el eje x es a, como se ve en la Figura 3.37. Esto demuestra la parte (i) del teorema. La parte (ii) del teorema se demuestra en forma similar. □

Determinaremos ahora la ecuación de la recta l con pendiente m que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ (existe una sola recta que verifique estas dos condiciones). Si $P(x, y)$ es cualquier punto con $x \neq x_1$ (Figura 3.38), entonces P está sobre l si y sólo si m es la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P, es decir, si y sólo si

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

FIGURA 3.38



Podemos escribir esta ecuación en la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Nótese que (x_1, y_1) es también una solución de la ecuación anterior y por lo tanto, los puntos de l son precisamente aquéllos que corresponden a las soluciones. Ésta es la ecuación de la recta llamada de **forma de punto y pendiente.**

FORMA DE PUNTO Y PENDIENTE DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

La ecuación de una recta con pendiente m que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ es

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

EJEMPLO 3 Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, 7)$ y $B(-3, 2)$.

SOLUCIÓN La pendiente m de la recta es

$$m = \frac{7 - 2}{1 - (-3)} = \frac{5}{4}.$$

Podemos sustituir las coordenadas del punto A o el B en la ecuación de punto y pendiente. Utilizando $A(1, 7)$,

$$y - 7 = \tfrac{5}{4}(x - 1),$$

que es equivalente a

$$4y - 28 = 5x - 5, \quad \text{o bien} \quad 5x - 4y + 23 = 0. \qquad \blacksquare$$

La ecuación de la recta $y = mx - mx_1 + y_1$ que también puede escribirse $y - y_1 = m(x - x_1)$, es de la forma

$$y = mx + b$$

en donde $b = -mx_1 + y_1$. El número real b es la intercepción y (u ordenada al origen) de la recta, lo cual se puede ver haciendo $x = 0$. La ecuación $y = mx + b$ es la ecuación de la recta l donde se especifica su ordenada al origen y su pendiente. Inversamente, una ecuación de la forma $y = mx + b$, puede escribirse nuevamente como

$$y - b = m(x - 0).$$

Comparando esta forma de la ecuación de la recta con la forma anterior, vemos que la gráfica es una recta con pendiente m que pasa por el punto $(0, b)$. Esto conduce al siguiente resultado.

FORMA DE PENDIENTE E INTERCEPCIÓN DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

La gráfica de la ecuación $y = mx + b$ es una recta con pendiente m e intercepción y igual a b.

Hemos visto que toda recta es la gráfica de una ecuación de la forma

$$ax + by + c = 0$$

en donde a, b, c son números reales, siempre que a y b no sean cero simultáneamente. Una ecuación de esta forma se llama **ecuación lineal** en x y y. Recíprocamente, demostraremos que la gráfica de $ax + by + c = 0$, en donde a y b no son ambos cero, es siempre una recta. Por una parte, si $b \neq 0$, podemos despejar y para obtener,

$$y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right),$$

que es la ecuación de una recta con pendiente $-a/b$ y ordenada al origen $-c/b$. Por otra parte, si $b = 0$ pero $a \neq 0$, obtenemos $x = -c/a$, que es la ecuación de una recta vertical cuya intercepción x es $-c/a$. Esto conduce al siguiente teorema.

TEOREMA

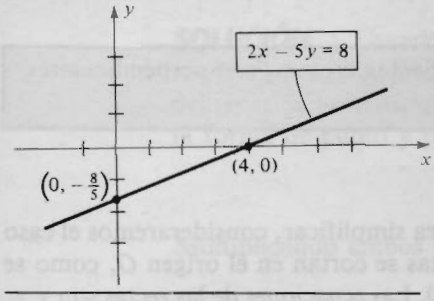
La gráfica de la ecuación lineal $ax + by + c = 0$ es una recta y, recíprocamente, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

Para simplificar, emplearemos el término *la recta* $ax + by + c = 0$, en lugar de la expresión más precisa *la recta con ecuación* $ax + by + c = 0$.

EJEMPLO 4 Trazar la gráfica de la ecuación $2x - 5y = 8$.

SOLUCIÓN De acuerdo con el teorema anterior, la gráfica es una recta y por consiguiente, basta determinar dos de sus puntos. Determinaremos las intersecciones con los ejes. Haciendo $y = 0$ en la ecuación dada, obtenemos que la intercepción x es 4; reem-

FIGURA 3.39



plazando x por 0, obtenemos $y = -\frac{8}{5}$, que es la intercepción y. Esto da la recta de la Figura 3.39.

Otro método para resolver este ejercicio consiste en expresar la ecuación dada en la forma $y = mx + b$. Para eso despejamos primero el término que contiene a y:

$$5y = 2x - 8.$$

Después se dividen ambos lados de esta ecuación entre 5

$$y = \frac{2}{5}x + \left(\frac{-8}{5}\right),$$

que es de la forma $y = mx + b$. Por consiguiente, la pendiente es $m = \frac{2}{5}$ y la ordenada al origen, $b = -\frac{8}{5}$. Ahora es posible trazar la recta que pasa por el punto $(0, -\frac{8}{5})$ y cuya pendiente es $\frac{2}{5}$. ■

Se puede demostrar el siguiente teorema.

TEOREMA

> Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

Esta propiedad se utiliza en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, -7)$ y es paralela a la recta $6x + 3y - 4 = 0$.

SOLUCIÓN Expresemos la ecuación dada en la forma de pendiente e intercepción. Escribimos primero

$$3y = -6x + 4$$

y dividimos luego ambos lados entre 3,

$$y = -2x + \tfrac{4}{3}.$$

Esta última ecuación indica que la pendiente es -2. Como las rectas paralelas tienen la misma pendiente, la línea requerida también tiene pendiente -2. Mediante la forma de punto y pendiente obtenemos

$$y + 7 = -2(x - 5).$$

Que es equivalente a

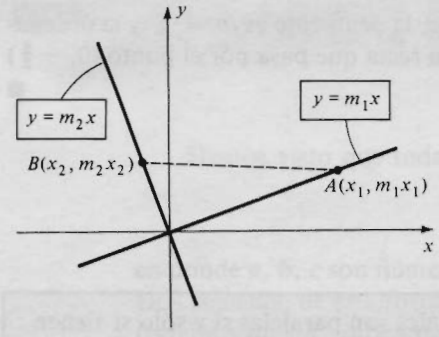
$$y + 7 = -2x + 10 \quad \text{o bien} \quad 2x + y - 3 = 0.$$ ■

El teorema siguiente especifica condiciones para rectas perpendiculares entre sí.

TEOREMA

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1m_2 = -1$.

FIGURA 3.40



Para simplificar, consideraremos el caso especial donde las rectas se cortan en el origen O, como se ilustra en la Figura 3.40. Las ecuaciones de las rectas son $y = m_1x$, $y = m_2x$. Si elegimos dos puntos $A(x_1, m_1x_1)$ y $B(x_2, m_2x_2)$ diferentes de O, como se muestra en la figura, entonces las rectas son perpendiculares, si y sólo si el ángulo AOB es recto. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo AOB, se obtiene

$$[d(A, B)]^2 = [d(O, B)]^2 + [d(O, A)]^2$$

o sea:

$$(m_2x_2 - m_1x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 = (m_2x_2)^2 + x_2^2 + (m_1x_1)^2 + x_1^2.$$

Haciendo las operaciones indicadas y simplificando, se obtiene

$$-2m_1m_2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 0.$$

Dividiendo ambos lados entre $-2x_1x_2$ vemos que las rectas son perpendiculares si y sólo si $m_1m_2 + 1 = 0$, o bien $m_1m_2 = -1$.

La demostración es semejante cuando las rectas se cortan en *cualquier* punto (a, b). □

Una forma conveniente para recordar las condiciones de perpendicularidad es notar que m_1 y m_2 deben ser *recíprocos negativos* uno del otro, es decir, $m_1 = -1/m_2$ y $m_2 = -1/m_1$.

EJEMPLO 6 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, -7)$ y que es perpendicular a la recta $6x + 3y - 4 = 0$.

SOLUCIÓN La pendiente m de la recta es -2 (ver el Ejemplo 5). Por lo tanto, la pendiente m' de la recta buscada es el recíproco negativo de -2, es decir, $m' = -[1/(-2)] = \frac{1}{2}$. Por consiguiente, la ecuación es

$$y + 7 = \tfrac{1}{2}(x - 5),$$

que equivale a

$$2y + 14 = x - 5, \quad \text{o bien} \quad x - 2y - 19 = 0. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 7 Hallar una ecuación para la perpendicular bisectriz del segmento de recta que va de $A(1, 7)$ a $B(-3, 2)$.

SOLUCIÓN Usando la fórmula para el punto medio, el punto medio M del segmento AB es $(-1, \frac{9}{2})$. Puesto que la pendiente de AB es $\frac{5}{4}$ (véase el Ejemplo 3), se sigue del teorema anterior que la pendiente de la perpendicular bisectriz es $-\frac{4}{5}$. Aplicando la forma de punto y pendiente:

$$y - \tfrac{9}{2} = -\tfrac{4}{5}(x + 1).$$

Multiplicando ambos lados por 10 y simplificando se obtiene $8x + 10y - 37 = 0$. ■

El siguiente teorema justifica la terminología que se ha empleado en la definición del comienzo de esta sección.

TEOREMA La gráfica de una función lineal es una recta.

DEMOSTRACIÓN Si f es lineal podemos escribir

$$f(x) = ax + b$$

para constantes a y b. Ya que la gráfica de f es la misma que la de la ecuación $y = ax + b$, la conclusión se deduce a partir de la forma de pendiente e intercepción. □

Si y es una función lineal de x, entonces $y = ax + b$ para algunas constantes a y b, y se dice que x y y están **relacionadas linealmente**. Las relaciones lineales entre variables aparecen frecuentemente en las aplicaciones. El siguiente ejemplo es una ilustración de ello. Otras aplicaciones se encuentran en los Ejercicios 41 a 52.

EJEMPLO 8 La relación entre la temperatura T del aire (en °F) y la altitud h (en pies sobre el nivel del mar) es aproximadamente lineal. Cuando la temperatura al nivel del mar es de 60°F, si la altitud aumenta 5 000 pie, la temperatura del aire decrece alrededor de 18°F.

(a) Expresar T como función de h.

(b) ¿Cuál es la temperatura del aire a una altitud de 15 000 pie?

SOLUCIÓN

(a) Si T es una función lineal de h, entonces

$$T = ah + b$$

para constantes a y b. Puesto que $T = 60$ cuando $h = 0$, se observa que

$$60 = a(0) + b \quad \text{o bien} \quad b = 60.$$

Entonces,
$$T = ah + 60.$$

Además, dado que si $h = 5\,000$, entonces $T = 60 - 18 = 42$, sustituyendo estos valores en la fórmula $T = ah + 60$, se obtiene

$$42 = a(5000) + 60 \quad \text{o sea} \quad 5000a = -18.$$

Por lo tanto,
$$a = -\frac{18}{5000} = -\frac{9}{2500},$$

y la fórmula (aproximada) para T es

$$T = -\frac{9}{2500}h + 60.$$

(b) Usando la fórmula para T obtenida en la parte (a), la temperatura (aproximada) cuando $h = 15\,000$ es

$$T = -\frac{9}{2500}(15\,000) + 60 = -54 + 60 = 6\,^{\circ}\text{F}. \quad \blacksquare$$

Ejercicios 3.5

En cada uno de los Ejercicios 1 a 4 represente los puntos A y B y encuentre la pendiente de la recta que pasa por A y B.

1. $A(-4, 6)$, $B(-1, 18)$
2. $A(6, -2)$, $B(-3, 5)$
3. $A(-1, -3)$, $B(-1, 2)$
4. $A(-3, 4)$, $B(2, 4)$
5. Compruebe que los puntos $A(-3, 1)$, $B(5, 3)$ y $C(3, 0)$ y $D(-5, -2)$ son los vértices de un paralelogramo.
6. Muestre que $A(2, 3)$, $B(5, -1)$, $C(0, -6)$ y $D(-6, 2)$ son los vértices de un trapecio.
7. Pruebe que los puntos $A(6, 15)$, $B(11, 12)$, $C(-1, -8)$ y $D(-6, -5)$ son los vértices de un rectángulo.
8. Demuestre que los puntos $A(1, 4)$, $B(6, -4)$ y $C(-15, -6)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.
9. Si los tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(-1, -3)$, $B(4, 2)$, $C(-7, 5)$, encuentre el cuarto vértice.
10. Si $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ y $D(x_4, y_4)$ son los vértices de un cuadrilátero, demuestre que los segmentos de recta que unen los puntos medios de los lados adyacentes forman un paralelogramo.

En cada uno de los Ejercicios 11 a 20 obtenga la ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

11. Pasa por $A(2, -6)$, pendiente $\frac{1}{2}$.
12. Pendiente -3, intercepción y igual a 5.
13. Pasa por $A(-5, -7)$, $B(3, -4)$.
14. Intercepción x igual a -4, intercepción y igual a 8.
15. Pasa por $A(8, -2)$, intercepción y igual a 8.
16. Pendiente 6, intercepción x igual a -2.
17. Pasa por $A(10, -6)$, paralela (a) al eje y, (b) al eje x.
18. Pasa por $A(-5, 1)$, perpendicular (a) al eje y, (b) al eje x.
19. Pasa por $A(7, -3)$, perpendicular a la recta cuya ecuación es $2x - 5y = 8$.
20. Pasa por $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$, paralela a la recta cuya ecuación es $x + 3y = 1$.
21. Dados $A(3, -1)$ y $B(-2, 6)$, encontrar una ecuación para la perpendicular bisectriz del segmento de recta AB.
22. Encontrar una ecuación para la recta que biseca el segundo y el cuarto cuadrantes.

23. Obtener las ecuaciones de las alturas de un triángulo cuyos vértices son $A(-3, 2)$, $B(5, 4)$, $C(3, -8)$ y encontrar el punto en el que se intersecan las alturas.

24. Hallar las ecuaciones para las medianas del triángulo del Ejercicio 23 y su punto de intersección.

En cada uno de los Ejercicios 25 a 34 encuentre la pendiente y la intercepción y (u ordenada al origen) de la recta dada y trace su gráfica.

25. $3x - 4y + 8 = 0$

26. $2y - 5x = 1$

27. $x + 2y = 0$

28. $8x = 1 - 4y$

29. $y = 4$

30. $x + 2 = \frac{1}{2}y$

31. $5x + 4y = 20$

32. $y = 0$

33. $x = 3y + 7$

34. $x - y = 0$

35. Encuentre el valor del número real k tal que el punto $P(-1, 2)$ esté sobre la recta $kx + 2y - 7 = 0$.

36. Encuentre el valor del número real k tal que la recta $5x + ky - 3 = 0$ tenga ordenada al origen -5.

37. Si las intersecciones de la recta l con los ejes x y y son a y b, respectivamente, demuestre que la ecuación de l puede tomar la forma $(x/a) + (y/b) = 1$.

(Esta es la **forma de intercepciones** para la ecuación de una recta.) Exprese la Ecuación $4x - 2y = 6$ en dicha forma.

38. Demuestre que una ecuación de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está dada por

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1).$$

(Esta es la **forma de dos puntos** de la ecuación de una recta.) Por medio de la ecuación anterior, encuentre la ecuación de la recta que pasa por $A(7, -1)$ y $B(4, 6)$.

39. Encuentre todos los valores de r tales que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(r, 4)$ y $(1, 3 - 2r)$ sea menor que 5.

40. Encuentre todos los valores de t tales que la pendiente de la recta que pasa por $(t, 3t + 1)$ y $(1 - 2t, t)$ sea mayor que 4.

41. Hace seis años se compró una casa por \$59 000 (dólares). Este año fue valuada en \$95 000. Suponiendo que el valor de la casa está relacionado linealmente con el tiempo, encuentre una fórmula que especifique el valor de la casa para cualquier tiempo después de la fecha de compra. ¿Cuándo valía la casa \$73 000?

42. La ley de Charles para los gases establece que si la presión permanece constante, entonces la relación entre el volumen V que ocupa el gas y su temperatura T en grados Celsius está dada por $V = V_0(1 + \frac{1}{273}T)$.

(a) ¿Cuál es el significado de V_0?

(b) ¿Qué incremento en la temperatura se necesita para aumentar el volumen de V_0 a $2V_0$?

(c) Trace la gráfica de la ecuación en el plano TV para el caso $V_0 = 100$ y $T \geq 273$.

43. La resistencia eléctrica R (en ohms, Ω) para un alambre de metal puro está relacionada linealmente con su temperatura T (en °C) mediante la fórmula

$$R = R_0(1 + aT)$$

para constantes a y $R_0 > 0$.

(a) ¿Cuál es el significado de R_0?

(b) En el cero absoluto ($T = -273°C$), $R = 0$. Calcule a.

(c) A 0° C un alambre de plata tiene una resistencia de 1.25 Ω. ¿A qué temperatura se duplica la resistencia?

44. El punto de congelación del agua es 0°C o 32°F. Su punto de ebullición es 100°C o 212°F. Utilizando esta información, encuentre una relación lineal entre la temperatura en °F y la temperatura en °C. ¿Qué aumento de la temperatura en °F corresponde a un aumento en la temperatura de 1°C?

45. Se permite a quienes pagan impuestos depreciar la propiedad en renta sobre un periodo de 15 años. Entonces si y denota el valor de la propiedad después de x años, y si la misma tiene un valor inicial de \$60 000 (dólares), los puntos (0, 60 000) y (15, 0) están en la gráfica de $y = f(x)$. Un método común de depreciación es la *depreciación lineal*, en la que se ajusta una recta a que pase por esos dos puntos. (A este método se la llama también *depreciación en línea recta.*)

(a) Exprese a y como función lineal de x.

(b) ¿Cuál es la depreciación anual?

46. Una parte de maquinaria agrícola, cuyo valor inicial era de \$40 000 (dólares), se deprecia sobre

23. Obtener las ecuaciones de las alturas de un triángulo cuyos vértices son $A(-3, 2)$, $B(5, 4)$, $C(3, -8)$ y encontrar el punto en el que se intersecan las alturas.

24. Hallar las ecuaciones para las medianas del triángulo del Ejercicio 23 y su punto de intersección.

En cada uno de los Ejercicios 25 a 34 encuentre la pendiente y la intercepción y (u ordenada al origen) de la recta dada y trace su gráfica.

25. $3x - 4y + 8 = 0$
26. $2y - 5x = 1$
27. $x + 2y = 0$
28. $8x = 1 - 4y$
29. $y = 4$
30. $x + 2 = \frac{1}{2}y$
31. $5x + 4y = 20$
32. $y = 0$
33. $x = 3y + 7$
34. $x - y = 0$

35. Encuentre el valor del número real k tal que el punto $P(-1, 2)$ esté sobre la recta $kx + 2y - 7 = 0$.

36. Encuentre el valor del número real k tal que la recta $5x + ky - 3 = 0$ tenga ordenada al origen -5.

37. Si las intersecciones de la recta l con los ejes x y y son a y b, respectivamente, demuestre que la ecuación de l puede tomar la forma $(x/a) + (y/b) = 1$.

(Esta es la **forma de intercepciones** para la ecuación de una recta.) Exprese la Ecuación $4x - 2y = 6$ en dicha forma.

38. Demuestre que una ecuación de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está dada por

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1).$$

(Esta es la **forma de dos puntos** de la ecuación de una recta.) Por medio de la ecuación anterior, encuentre la ecuación de la recta que pasa por $A(7, -1)$ y $B(4, 6)$.

39. Encuentre todos los valores de r tales que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(r, 4)$ y $(1, 3 - 2r)$ sea menor que 5.

40. Encuentre todos los valores de t tales que la pendiente de la recta que pasa por $(t, 3t + 1)$ y $(1 - 2t, t)$ sea mayor que 4.

41. Hace seis años se compró una casa por \$59 000 (dólares). Este año fue valuada en \$95 000. Suponiendo que el valor de la casa está relacionado linealmente con el tiempo, encuentre una fórmula que especifique el valor de la casa para cualquier tiempo después de la fecha de compra. ¿Cuándo valía la casa \$73 000?

42. La ley de Charles para los gases establece que si la presión permanece constante, entonces la relación entre el volumen V que ocupa el gas y su temperatura T en grados Celsius está dada por $V = V_0(1 + \frac{1}{273}T)$.
   (a) ¿Cuál es el significado de V_0?
   (b) ¿Qué incremento en la temperatura se necesita para aumentar el volumen de V_0 a $2V_0$?
   (c) Trace la gráfica de la ecuación en el plano TV para el caso $V_0 = 100$ y $T \geq 273$.

43. La resistencia eléctrica R (en ohms, Ω) para un alambre de metal puro está relacionada linealmente con su temperatura T (en °C) mediante la fórmula

$$R = R_0(1 + aT)$$

para constantes a y $R_0 > 0$.
   (a) ¿Cuál es el significado de R_0?
   (b) En el cero absoluto ($T = -273$°C), $R = 0$. Calcule a.
   (c) A 0° C un alambre de plata tiene una resistencia de 1.25 Ω. ¿A qué temperatura se duplica la resistencia?

44. El punto de congelación del agua es 0°C o 32°F. Su punto de ebullición es 100°C o 212°F. Utilizando esta información, encuentre una relación lineal entre la temperatura en °F y la temperatura en °C. ¿Qué aumento de la temperatura en °F corresponde a un aumento en la temperatura de 1°C?

45. Se permite a quienes pagan impuestos depreciar la propiedad en renta sobre un periodo de 15 años. Entonces si y denota el valor de la propiedad después de x años, y si la misma tiene un valor inicial de \$60 000 (dólares), los puntos (0, 60 000) y (15, 0) están en la gráfica de $y = f(x)$. Un método común de depreciación es la *depreciación lineal*, en la que se ajusta una recta a que pase por esos dos puntos. (A este método se la llama también *depreciación en línea recta*.)
   (a) Exprese a y como función lineal de x.
   (b) ¿Cuál es la depreciación anual?

46. Una parte de maquinaria agrícola, cuyo valor inicial era de \$40 000 (dólares), se deprecia sobre



su tiempo de vida útil de 10 años. Al final de los 10 años, el equipo tiene un *valor en libras* de $2 000.

(a) Usando *depreciación lineal* (véase el Ejercicio 45), exprese el valor y (en dólares) como función de la edad x (en años).

(b) ¿Cuál es la depreciación anual?

47. El peso esperado (en toneladas largas) de una ballena adulta se relaciona con su longitud (en pies) mediante la ecuación lineal

$$W = 1.70L - 42.8.$$

(a) Unos investigadores marinos encontraron una ballena de 30 pie. Calcule su peso.

(b) Si el error al estimar la longitud puede ser hasta de 2 pie, ¿cuál es el error correspondiente a la estimación del peso?

48. Las ballenas azules recién nacidas miden aproximadamente 24 pie y pesan 3 toneladas. Estas ballenas jóvenes son amamantadas durante 7 meses y, cuando se destetan, miden la impresionante cantidad de 53 pie y pesan 23 toneladas.

(a) Si t denota la edad de la ballena (en meses) y L su longitud (en pies), exprese a L como una función lineal de t. De acuerdo con este modelo lineal, ¿cuánto aumenta la longitud cada día? (Use 1 mes = 30 días.)

(b) Exprese a W como una función lineal de t. ¿Cuál es el aumento diario de peso?

(c) Exprese a W como una función lineal de L.

49. El dueño de una concesión para venta de helados debe pagar a la compañía que los produce $500 (dólares) mensuales más 10% de las ganancias. Además, el concesionario tiene gastos fijos de $400 mensuales por conceptos tales como instalaciones y personas empleadas. Suponga que 50% del ingreso es ganancia neta.

(a) Exprese el sueldo mensual M del dueño como función del ingreso mensual R.

(b) ¿Cuánto debe vender para no perder únicamente?

50. Se han sugerido varias reglas para modificar las dosis de medicamento para adulto y así encontraron la dosis para niños pequeños. Sea a la dosis para adulto (en mg), y t la edad del niño (en años). Algunas reglas típicas son las siguientes:

$$y = \frac{t+1}{24}a \qquad \text{(Regla de Cowling)}$$

y

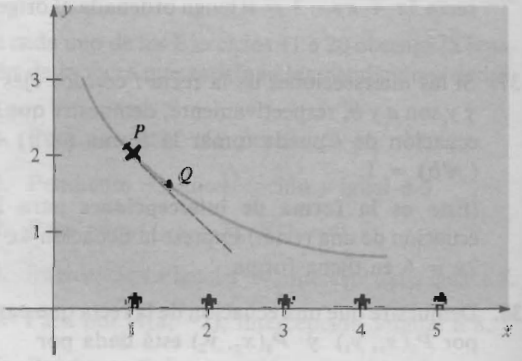
$$y = \frac{2}{25}ta \qquad \text{(Regla de Friend)}$$

(a) Grafique estas dos ecuaciones lineales en el mismo sistema de ejes para $0 \le t \le 12$.

(b) ¿Para qué edad aproximadamente dan las dos reglas la misma recomendación?

51. En un sencillo juego de video para niños, unos aviones vuelan de izquierda a derecha siguiendo la curva $y = 1 + (1/x)$ y pueden disparar balas en la dirección de la tangente a la curva, contra objetivos colocados sobre el eje x en $x = 1, 2, 3, 4, 5$. Utilizando cálculo se puede demostrar que la pendiente de la recta tangente al punto $P(1, 2)$ es $m = -1$, mientras que la tangente a $Q(\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$ tiene pendiente $m = -\frac{4}{9}$. Si un jugador dispara cuando el avión está en P, ¿le pegará a algún blanco? ¿Qué pasa si el jugador dispara en Q?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 51

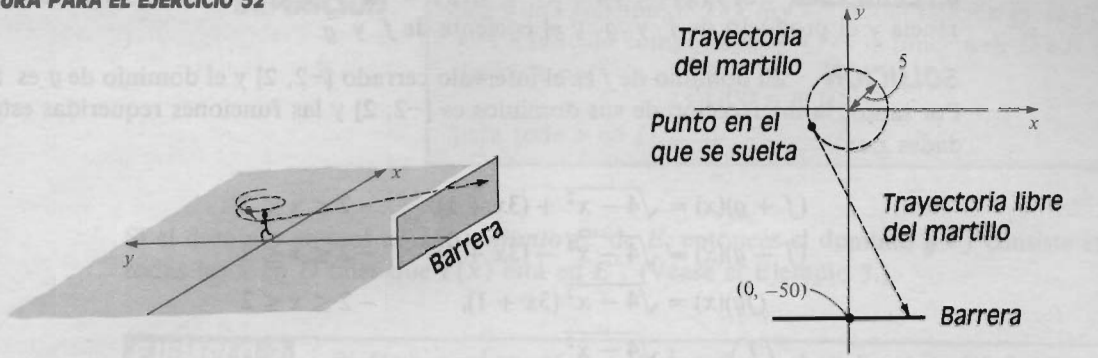


52. Un atleta lanzador de martillo practica en un pequeño campo de entrenamiento. El martillo gira en un círculo de radio igual a 5 pie y, cuando el lanzador lo suelta, pega contra una barrera alta colocada a 50 pie del centro del área de lanzamiento. Se introduce un sistema de ejes coordenados como se muestra en la figura (no están a escala).

(a) Si el martillo se suelta en $(-4, -3)$ y viaja en la dirección tangencial, ¿en dónde golpeará a la barrera?

(b) Si se desea que el martillo golpee a la pantalla en $(0, -50)$, ¿en qué punto de la circunferencia debe soltarse?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 52



3.6 Operaciones sobre funciones

A menudo se definen las funciones en términos de sumas, diferencias, productos y cocientes de varias expresiones. Por ejemplo si

$$h(x) = x^2 + \sqrt{5x + 1},$$

podemos considerar a $h(x)$ como una suma de valores de las funciones f y g que son más sencillas y que están definidas mediante

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{5x + 1}.$$

Es natural referirse a la función h como la *suma* de f y de g.

En general supóngase que f y g son funciones *cualesquiera*. Sea I *la intersección de sus dominios*; es decir, los números que son *comunes* a ambos dominios. La **suma** de f y g es la función h definida por

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

en la que x está en I.

Es conveniente denotar a h mediante el símbolo $f + g$. Puesto que f y g son funciones y no números, el signo + utilizado entre f y g no debe considerarse como la adición de números reales. Se emplea para indicar que el valor de x para $f + g$ es $f(x) + g(x)$; esto es

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

De la misma manera, la **diferencia** $f - g$ y el **producto** fg de f y g se define mediante

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{y} \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

en la que x está en I. Finalmente, el **cociente** f/g está dado por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

en donde x está en I y $g(x) \neq 0$.

EJEMPLO 1 Si $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = 3x + 1$, encontrar la suma, la diferencia y el producto de f y g, y el cociente de f y g.

SOLUCIÓN El dominio de f es el intervalo cerrado $[-2, 2]$ y el dominio de g es $\mathbb{R}$. Por tanto, la intersección de sus dominios es $[-2, 2]$ y las funciones requeridas están dadas por

$$(f + g)(x) = \sqrt{4 - x^2} + (3x + 1), \qquad -2 \le x \le 2$$
$$(f - g)(x) = \sqrt{4 - x^2} - (3x + 1), \qquad -2 \le x \le 2$$
$$(fg)(x) = \sqrt{4 - x^2}\,(3x + 1), \qquad -2 \le x \le 2$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{3x + 1}, \qquad -2 \le x \le 2, \quad x \ne -\tfrac{1}{3}.$$ ■

Una función f es una **función polinomial** si $f(x)$ es un polinomio (véanse las págs. 24 y 25). Una función polinomial debe ser considerada como la suma de funciones cuyos valores son de la forma cx^k, en donde c es un número real y k es un entero no negativo.

Una función f se llama **algebraica** si puede expresarse en términos de suma, resta, producto, cociente o raíces de funciones polinomiales. Por ejemplo, si

$$f(x) = 5x^4 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{x(x^2 + 5)}{\sqrt{x^3 + \sqrt{x}}},$$

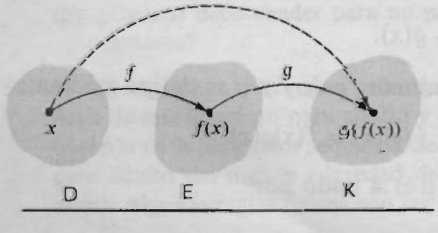
entonces f es una función algebraica. Las funciones que no son algebraicas se denominan **trascendentales**. Las funciones exponenciales y logarítmicas consideradas en el Capítulo 5 son ejemplos de funciones trascendentales.

Concluiremos esta sección describiendo un importante método que usa dos funciones, f y g, para obtener una tercera función. Supóngase que D, E y K son conjuntos de números reales, y sea f una función de D a E, y g una función de E a K. Usando la notación de flecha tenemos

$$D \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} K$$

Usaremos f y g para definir una función de D a K.

FIGURA 3.41



Para todo x en D, el número $f(x)$ está en E. Como el dominio de g es E, debemos encontrar el número $g(f(x))$ en K. Asociando $g(f(x))$ con x obtenemos una función de D a K llamada *función composición* (o **función compuesta**) de g por f. Esto se ilustra gráficamente en la Figura 3.41, en donde los trazos indican la correspondencia anteriormente definida de D a K.

A veces se usa el símbolo operacional o que denota una función composición g o f. La siguiente definición resume este análisis.

DEFINICIÓN

Sea f una función de D a E y sea g una función de E a K. La **función composición** $g \circ f$ es la función de D a K definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

para toda x en D.

Si el dominio de g es un *subconjunto* E' de E, entonces el dominio $g \circ f$ consiste en todas las x en D tales que $f(x)$ está en E'. (Véase el Ejemplo 3.)

EJEMPLO 2 Si $f(x) = x^3$ y $g(x) = 5x^2 + 2x + 1$, hallar $(g \circ f)(x)$.

SOLUCIÓN Por definición,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3).$$

Como $g(x^3)$ significa que x se puede sustituir por x^3 en la expresión de $g(x)$, tenemos

$$g(x^3) = 5(x^3)^2 + 2(x^3) + 1.$$

En consecuencia, $$(g \circ f)(x) = 5x^6 + 2x^3 + 1.$$ ■

EJEMPLO 3 Si las funciones f y g se definen por $f(x) = x - 2$ y $g(x) = 5x + \sqrt{x}$, hallar $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.

SOLUCIÓN Las sustituciones formales dan lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{(definición de } g \circ f) \\
&= g(x - 2) && \text{(definición de } f) \\
&= 5(x - 2) + \sqrt{x - 2} && \text{(definición de } g) \\
&= 5x - 10 + \sqrt{x - 2} && \text{(simplificación)}
\end{aligned}$$

El dominio de f es el conjunto de todos los números reales; sin embargo, la última igualdad implica que $(g \circ f)(x)$ es un número real sólo si $x \geq 2$. Así, el dominio de la función composición $g \circ f$ está en el intervalo $[2, \infty]$. ■

Dados f y g, es posible también encontrar $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Si $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$, determinar $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

SOLUCIÓN

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \qquad \text{(definición de } f \circ g)$$

$$= f(3x + 5) \qquad \text{(definición de } g\text{)}$$
$$= (3x + 5)^2 - 1 \qquad \text{(definición de } f\text{)}$$
$$= 9x^2 + 30x + 24 \qquad \text{(simplificación)}$$

En forma similar

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \text{(definición de } f \circ g\text{)}$$
$$= g(x^2 - 1) \qquad \text{(definición de } g\text{)}$$
$$= 3(x^2 - 1) + 5 \qquad \text{(definición de } f\text{)}$$
$$= 3x^2 + 2 \qquad \text{(simplificación)}$$ ■

Vimos en el Ejemplo 4 que $f(g(x))$ y $g(f(x))$ no siempre son lo mismo, esto es, $f \circ g \neq g \circ f$. En algunos casos puede suceder que la igualdad *sí ocurra*. El de mayor importancia es aquel en que $f(g(x))$ y $g(f(x))$ no solamente son idénticas, sino ambas son iguales a x. Por supuesto, f y g deben ser funciones muy especiales para que esto suceda. En la siguiente sección indicaremos la forma en que estas funciones serán restringidas.

En ciertas aplicaciones es necesario expresar una función y como una función del tiempo t. El siguiente ejemplo ilustra que a veces es más fácil introducir una tercera variable x, y después expresar a x como función de t —esto es, $x = g(t)$. A continuación se expresa a y como una función de x —esto es $y = f(x)$— y finalmente formar la función composición dada por $y = f(x) = f(g(t))$.

EJEMPLO 5 Un globo esférico de juguete se infla con gas helio. Si el radio del globo cambia a razón de 1.5 cm/s expresar el volumen V del globo como una función del tiempo.

SOLUCIÓN Denótese por x el radio del globo. Si se supone que inicialmente el radio es cero, después de t segundos

$$x = 1.5\,t \qquad \text{(radio del globo después de } t \text{ segundos).}$$

Como ilustración, nótese que después de 1 s el radio es de 1.5 cm; después de 2 s el radio es de 3.0 cm; después de 3 s es de 4.5 cm, y así sucesivamente.

En seguida se puede escribir

$$V = \tfrac{4}{3}\pi x^3 \qquad \text{(volumen de la esfera de radio } x\text{).}$$

Esta es una relación en forma de composición de funciones, en la que V es una función de x, y x es una función de t. Sustituyendo se obtiene:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi x^3 = \tfrac{4}{3}\pi(1.5t)^3 = \tfrac{4}{3}\pi(\tfrac{3}{2}t)^3 = \tfrac{4}{3}\pi(\tfrac{27}{8}t^3).$$

Simplificando resulta la fórmula siguiente para V como función del tiempo t:

$$V = \tfrac{9}{2}\pi t^3.$$ ■

Ejercicios 3.6

En los Ejercicios 1 a 6, determine la suma, la diferencia y el producto de f y g y el cociente de f entre g.

1. $f(x) = 3x^2,\ g(x) = 1/(2x - 3)$
2. $f(x) = \sqrt{x + 3},\ g(x) = \sqrt{x + 3}$
3. $f(x) = x + (1/x),\ g(x) = x - (1/x)$
4. $f(x) = x^3 + 3x,\ g(x) = 3x^2 + 1$
5. $f(x) = 2x^3 - x + 5,\ g(x) = x^2 + x + 2$
6. $f(x) = 7x^4 + x^2 - 1,\ g(x) = 7x^4 - x^3 + 4x$

En los Ejercicios 7 a 24, determine $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

7. $f(x) = 3x + 2,\ g(x) = 2x - 1$
8. $f(x) = x + 4,\ g(x) = 5x - 3$
9. $f(x) = 4x^2 - 5,\ g(x) = 3x$
10. $f(x) = 7x + 1,\ g(x) = 2x^2$
11. $f(x) = 3x^2 + 2x,\ g(x) = 2x - 1$
12. $f(x) = 5x + 7,\ g(x) = 4 - x^2$
13. $f(x) = x - 1,\ g(x) = x^3$
14. $f(x) = x^3 + 5x,\ g(x) = 4x$
15. $f(x) = x^2 + 9x,\ g(x) = \sqrt{x + 9}$
16. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1},\ g(x) = x^3 + 1$
17. $f(x) = \dfrac{1}{2x - 5},\ g(x) = \dfrac{1}{x^2}$
18. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1},\ g(x) = x - 1$
19. $f(x) = |x|,\ g(x) = -5$
20. $f(x) = 7,\ g(x) = 10$
21. $f(x) = x^2,\ g(x) = 1/x^2$
22. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1},\ g(x) = x + 1$
23. $f(x) = 2x - 3,\ g(x) = \dfrac{x + 3}{2}$
24. $f(x) = x^3 - 1,\ g(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

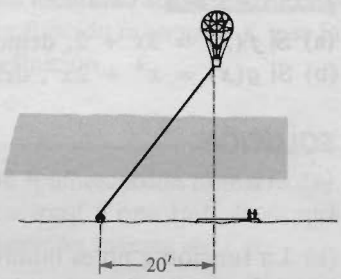
Use el método del Ejemplo 5 para resolver los Ejercicios 25 a 30.

25. En un campo seco empezó un incendio que se propaga en la forma de un círculo. Si el radio de este círculo aumenta a razón de 6 pie/min, exprese el área total del incendio como función del tiempo t (en minutos).

26. Un cable de 100 pie de longitud y de diámetro de 4 pulg está sumergido en el mar. Debido a la corrosión, el área superficial del cable disminuye a razón de 750 pulg^2/año. Exprese el diámetro del cable como función del tiempo. (No considere la corrosión en los extremos del cable.)

27. Un globo de aire caliente sube verticalmente conforme se suelta una cuerda atada a su base a razón de 5 pie/s. La polea que suelta la cuerda está a 20 pie de la platafora en la que los pasajeros abordan el globo. Exprese la altura del aeróstato como función del tiempo.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 27



28. Se llama diámetro d de un cubo a la distancia entre dos vértices opuestos. Exprese d como función de la arista x del cubo. (*Sugerencia:* Primero exprese la diagonal y de una cara como función de x.)

29. Considere el Ejercicio 44 de la Sección 3.3. El alambrista sube por la cuerda a una velocidad constante de 1 pie/s. Si la cuerda está atada a una altura de 30 pie sobre el poste, exprese la altura h a la que el alambrista se encuentra del piso, como función del tiempo t. (*Sugerencia:* Denote

por d la distancia recorrida sobre el alambre. Exprese primero a d como función de t y después a h como función de d.)

30. Considere el Ejercicio 45 de la Sección 3.3. Cuando el aeroplano ha recorrido 500 pie de la pista de aterrizaje, ha alcanzado una velocidad de 68 pie/s (o 100 mi/h) y la mantendrá constante hasta el despegue. Exprese la distancia del avión a la torre de control como función del tiempo t (en segundos). (*Sugerencia:* En la figura, exprese en primer lugar x como función de t.)

3.7 Funciones inversas

Una función f puede tener el mismo valor para diferentes números en su dominio. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces $f(2) = 4$ y $f(-2) = 4$, pero $2 \neq -2$. Para definir a la *inversa de una función*, es esencial que distintos números en el dominio den *siempre* diferentes valores de f. Tales funciones se llaman *biunívocas* (o *inyectivas* o *uno a uno*).

DEFINICIÓN Una función f con dominio D y contradominio E es una **función biunívoca** (o **uno a uno**, si siempre que $a \neq b$ en D, entonces $f(a) \neq f(b)$ en E.

EJEMPLO 1

(a) Si $f(x) = 3x + 2$, demostrar que f es biunívoca.
(b) Si $g(x) = x^4 + 2x^2$, demostrar que g no es biunívoca.

SOLUCIÓN

(a) Si $a \neq b$, entonces $3a \neq 3b$ y, por lo tanto, $3a + 2 \neq 3b + 2$, o bien $f(a) \neq f(b)$. Entonces, f es uno a uno.

(b) La función g no es biunívoca puesto que números diferentes del dominio pueden tener el mismo valor. Por ejemplo, a pesar de que $-1 \neq 1$, tanto $g(-1)$ como $g(1)$ son iguales a 3. ■

TEOREMA

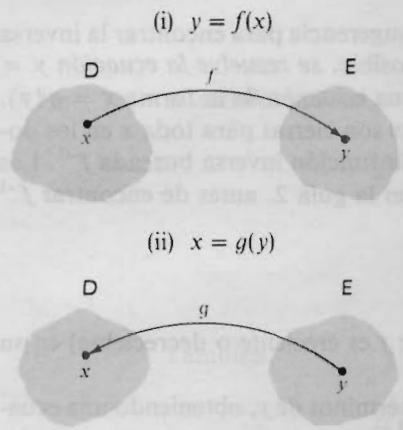
(i) Si f es una función creciente en su dominio, entonces f es uno a uno o biunívoca.

(ii) Si f es una función decreciente en su dominio, entonces f es uno a uno.

DEMOSTRACIÓN Supóngase que f es una función creciente. Si a y b están en el dominio de f y $a \neq b$, entonces $a < b$ o bien $b < a$, y por lo tanto, $f(a) < f(b)$ o bien

$f(b) < f(a)$, respectivamente. Por tanto, $f(a) \neq f(b)$, es decir, f es biunívoca. Para (ii) puede hacerse una demostración similar. □

FIGURA 3.42



Supóngase que f es biunívoca con dominio D y contradominio E. Entonces, para cada número y en E, existe *exactamente un* número x en D tal que $f(x) = y$, como lo muestra la flecha en la Figura 3.42(i). Puesto que x es *único*, se puede definir una función g de E a D mediante la regla siguiente:

$$g(y) = x.$$

(Véase la Figura 3.42(ii). En palabras, g *revierte la correspondencia* dada por f. Puesto que

$$g(y) = x \quad \text{y} \quad f(x) = y$$

para x en D y y en E, se observa que, por sustitución

$$g(f(x)) = x \quad \text{y} \quad f(g(y)) = y.$$

Las últimas dos ecuaciones pueden escribirse como

$$(g \circ f)(x) = x \quad \text{y} \quad (f \circ g)(y) = y,$$

lo que significa que $g \circ f$ y $f \circ g$ son funciones identidad sobre D y E, respectivamente (véase pág. 126); debido a esto se llama a g la *función inversa* de f, y se la denota mediante f^{-1}, como se indica en la siguiente definición.

DEFINICIÓN

Sea f una función biunívoca con dominio D y contradominio E. Una función f^{-1} con dominio D y contradominio E se llama **función inversa de f** si

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ en } D,$$

y

$$f(f^{-1}(x)) = y \quad \text{para todo } y \text{ en } E.$$

El -1 en la notación f^{-1} no se debe confundir con un exponente; es decir, $f^{-1}(y)$ *no significa* $1/[f(y)]$. El recíproco $1/[f(y)]$ puede denotarse por $[f(y)]^{-1}$.

Es importante notar que *una función f que crece o decrece en su dominio tiene una función inversa*, puesto que por el teorema anterior, tales funciones son biunívocas.

Cuando consideramos funciones en las secciones anteriores, normalmente x denotaba un número arbitrario en el dominio. Similarmente, para la función inversa f^{-1}

podríamos considerar $f^{-1}(x)$, *en la que x está en el dominio E* de f^{-1}. En este caso, las dos fórmulas de la definición se escriben como

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en } D$$

y

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en } E.$$

Los diagramas de la Figura 3.42 contienen una sugerencia para encontrar la inversa de una función biunívoca en ciertos casos. Si es posible, *se resuelve la ecuación* $y = f(x)$ *para evaluar x en términos de y*, obteniendo una ecuación de la forma $x = g(y)$. Si las dos condiciones $g(f(x)) = x$ y $f(g(x)) = x$ son ciertas para toda x en los dominios de f y de g, respectivamente, entonces g es la función inversa buscada f^{-1}. Las siguientes tres guías resumen este procedimiento; en la guía 2, antes de encontrar f^{-1} se escribe $x = f^{-1}(y)$ en vez de $x = g(y)$.

GUÍAS: Obtener f^{-1} en casos simples

1. Verificar que f es una función biunívoca (o que f es creciente o decreciente) en su dominio.
2. Resolver la ecuación $y = f(x)$ para evaluar x en términos de y, obteniendo una ecuación de la forma $x = f^{-1}(y)$.
3. Verificar las dos condiciones

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(x)) = x$$

para toda x en los dominios de f y de f^{-1}, respectivamente.

El éxito de este método depende de la naturaleza de la ecuación $y = f(x)$, puesto que debe ser posible resolver para x en términos de y. A esto es a lo que nos referimos por "casos simples" en el encabezado de las guías. ■■■

EJEMPLO 2 Si $f(x) = 3x - 5$, hallar la función inversa de f.

SOLUCIÓN Se seguirán las tres guías. Primero, nótese que la gráfica de la función lineal f es una recta de pendiente 3 y por tanto f es creciente sobre todo $\mathbb{R}$. Entonces la función inversa f^{-1} existe. Más aún, puesto que el dominio y el contradominio de f es $\mathbb{R}$, lo mismo es válido para f^{-1}.

Como en la guía 2, se considera

$$y = 3x - 5$$

y luego se resuelve para determinar x en función de y, obteniendo

$$x = \frac{y + 5}{3}.$$

Ahora formalmente se hace

$$f^{-1}(y) = \frac{y + 5}{3}.$$

Como el símbolo usado para la variable es irrelevante, podemos también escribir

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}.$$

Finalmente, se verifica que las dos condiciones

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(x)) = x$$

se satisfacen. Así,

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}(3x-5) && \text{(definición de } f\text{)} \\ &= \frac{(3x-5)+5}{3} && \text{(definición de } f^{-1}\text{)} \\ &= x && \text{(simplificación)} \end{aligned}$$

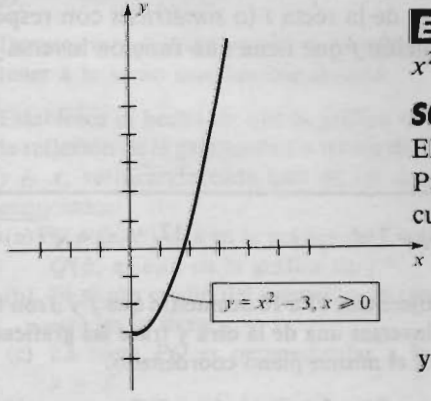
También,

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= f\left(\frac{x+5}{3}\right) && \text{(definición de } f^{-1}\text{)} \\ &= 3\left(\frac{x+5}{3}\right) - 5 && \text{(definición de } f\text{)} \\ &= x && \text{(simplificación)} \end{aligned}$$

Esto prueba que la función inversa de f está dada por

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}. \qquad \blacksquare$$

FIGURA 3.43



EJEMPLO 3 Hallar la función inversa de f si $f(x) = x^2 - 3$ y $x \geq 0$.

SOLUCIÓN La gráfica de f se muestra en la Figura 3.43. El dominio D es $[0, \infty)$ y el contradominio E es $[-3, \infty)$. Puesto que f es creciente en D, tiene una función inversa f^{-1} cuyo dominio es E y cuyo contradominio es D.

Como en la guía 2, se considera la ecuación

$$y = x^2 - 3.$$

y se resuelve para evaluar x, lo que da

$$x = \pm\sqrt{y+3}.$$

Como x es no negativo, descartamos $x = -\sqrt{y+3}$ y sea

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y+3}, \quad \text{o equivalentemente,} \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}.$$

Finalmente se verifica que $f^{-1}(f(x)) = x$ para x en $D = [0, \infty)$ y que $f(f^{-1}(x)) = x$ para x en $E = [-3, \infty)$. Por lo tanto,

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2 - 3) = \sqrt{(x^2 - 3) + 3} = \sqrt{x^2} = x \quad \text{si } x \geq 0,$$

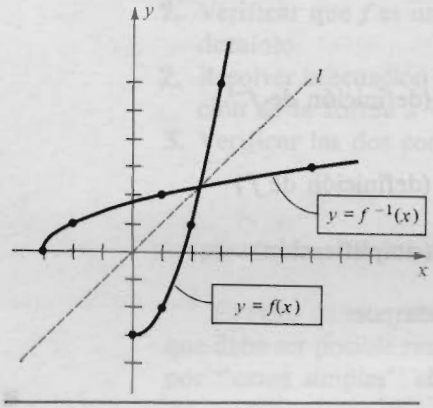
y

$$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x + 3}) = (\sqrt{x + 3})^2 - 3 = (x + 3) - 3 = x \quad \text{si } x \geq -3.$$

Lo anterior prueba que la función inversa está dada por

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 3} \quad \text{para} \quad x \geq -3. \qquad \blacksquare$$

FIGURA 3.44



Existe una interesante relación entre la gráfica de una función f y su función inversa f^{-1}. Primero tomemos en cuenta que $b = f(a)$ significa lo mismo que $a = f^{-1}(b)$. Estas ecuaciones implican que el punto (a, b) está en la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1}. Como ilustración, en el Ejemplo 3 encontramos que las funciones f y f^{-1} dadas por

$$f(x) = x^2 - 3 \quad \text{y} \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x + 3}$$

son funciones inversas una de la otra, a condición que x sea adecuadamente restringida. Algunos puntos en la gráfica de f son $(0, -3)$, $(1, -2)$, $(2, 1)$ y $(3, 6)$. Los puntos correspondientes en la gráfica de f^{-1} son $(-3, 0)$, $(-2, 1)$, $(1, 2)$ y $(6, 3)$. Las gráficas de f y f^{-1} se han trazado en los mismos ejes coordenados de la Figura 3.44. Si la página se doblara sobre la recta l que biseca los cuadrantes I y III (como se indica con línea de trazos en la figura), se vería que las gráficas de f y f^{-1} coinciden. Nótese que una ecuación para l es $y = x$. Se dice que las dos gráficas son *reflexiones* una de la otra a través de la recta l (o *simétricas* con respecto a l). Esto es común en las gráficas de toda función f que tiene una función inversa f^{-1}. (Véase el Ejercicio 34.)

Ejercicios 3.7

En los Ejercicios 1 a 12 determine si la función f es biunívoca.

1. $f(x) = 2x + 9$
2. $f(x) = 1/(7x + 9)$
3. $f(x) = 5 - 3x^2$
4. $f(x) = 2x^2 - x - 3$
5. $f(x) = \sqrt{x}$
6. $f(x) = x^3$
7. $f(x) = |x|$
8. $f(x) = 4$
9. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
10. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
11. $f(x) = 1/x$
12. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

En los Ejercicios 13 a 16 demuestre que f y g son funciones inversas una de la otra y trace las gráficas de f y g en el mismo plano coordenado.

13. $f(x) = 7x + 5; \quad g(x) = (x - 5)/7$
14. $f(x) = x^2 - 1, \ x \geq 0; \quad g(x) = \sqrt{x + 1}, \ x \geq -1$
15. $f(x) = \sqrt{2x - 4}, \ x \geq 2; \quad g(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 4), \ x \geq 0$

16. $f(x) = x^3 + 1; \quad g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

En los Ejercicios 17 a 30 encuentre la función inversa de f.

17. $f(x) = 4x - 3$

18. $f(x) = 9 - 7x$

19. $f(x) = \dfrac{1}{2x + 5}, \quad x > -\frac{5}{2}$

20. $f(x) = \dfrac{1}{3x - 1}, \quad x > \frac{1}{3}$

21. $f(x) = 9 - x^2, \quad x \geq 0$

22. $f(x) = 4x^2 + 1, \quad x \geq 0$

23. $f(x) = 5x^3 - 2$

24. $f(x) = 7 - 2x^3$

25. $f(x) = \sqrt{3x - 5}, \quad x \geq \frac{5}{3}$

26. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2$

27. $f(x) = \sqrt[3]{x} + 8$

28. $f(x) = (x^3 + 1)^5$

29. $f(x) = x$

30. $f(x) = -x$

31. (a) Demuestre que la función lineal $f(x) = ax + b$, en donde $a \neq 0$, tiene función inversa y determine $f^{-1}(x)$.

(b) ¿Tiene inversa una función constante? Explique.

32. Sea f una función uno a uno con dominio D y contradominio E. Demuestre que f^{-1} es una función uno a uno con dominio E y contradominio D.

33. Demuestre que una función biunívoca f puede tener a lo sumo una función inversa.

34. Establezca el hecho de que la gráfica de f^{-1} es la reflexión de la gráfica de f a través de la recta $y = x$, verificando cada uno de los siguientes enunciados:

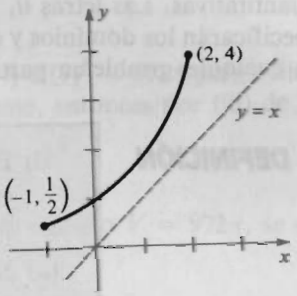
(a) Si $P(a, b)$ está en la gráfica de f, entonces $Q(b, a)$ está en la gráfica de f^{-1}.

(b) El punto medio del segmento de recta PQ está en la recta $y = x$.

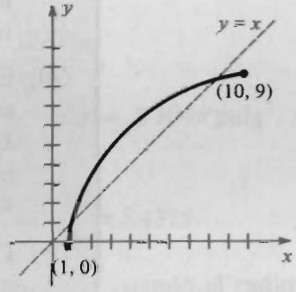
(c) La recta PQ es perpendicular a la recta $y = x$.

En los Ejercicios 35 a 38 se muestran las gráficas de funciones biunívocas (o uno a uno). Use la propiedad de la reflexión para trazar la gráfica de f^{-1}. Halle el dominio y el contradominio de (a) f; (b) f^{-1}.

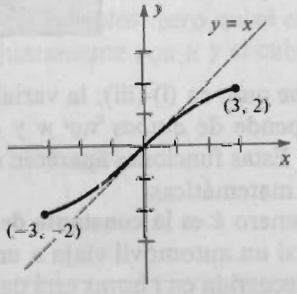
35.



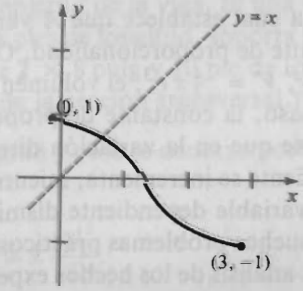
36.



37.



38.



3.8 Variación

A continuación, daremos la terminología empleada para describir relaciones entre variables cuantitativas. Las letras u, v y w de la siguiente definición denotan variables. No se especificarán los dominios y contradominios de las variables, pues deben ser evidentes en cualquier problema particular.

DEFINICIÓN

(i) El enunciado u **varía directamente con** v, o u **es directamente proporcional a** v, significa que $u = kv$, para algún número real k.

(ii) Si n es un número real positivo, entonces el enunciado u **varía directamente con la** n**-ésima potencia de** v, o bien u **es directamente proporcional a la** n**-ésima potencia de** v, significa que $u = kv^n$, para un número real k.

(iii) El enunciado u **varía inversamente con** v, o bien u **es inversamente proporcional a** v, significa que $u = k/v$, en donde k es un número real. Si $u = k/v^n$ para algún número real positivo n, entonces u **es inversamente proporcional a la** n**-ésima potencia de** v.

(iv) El enunciado u **varía conjuntamente con** v **y** w significa que $u = kvw$, para algún número real k. Si $u = kv^n w^m$, donde n y m son números reales positivos, entonces u **varía conjuntamente con la** n**-ésima potencia de** v **y la** m**-ésima potencia de** w.

Nótese que, en (i)-(iii), la variable u es una función de la variable v. En (iv) la variable depende de *ambas* v *y* w y determina lo que se conoce como función de *dos* variables. Estas funciones aparecen en muchas aplicaciones y se estudian en cursos avanzados de matemáticas.

El número k es la **constante de variación** o la **constante de proporcionalidad**. Por ejemplo, si un automóvil viaja a una velocidad de 50 millas por hora, entonces la distancia d recorrida en t horas está dada por $d = 50t$. La distancia d es directamente proporcional al tiempo t y la constante de proporcionalidad es igual a 50.

Para ilustrar el inciso (ii) tomaremos la fórmula $A = \pi r^2$, para el área de un círculo, la cual establece que A varía directamente con el cuadrado del radio r; π es la constante de proporcionalidad. Otro ejemplo es la fórmula del volumen de la esfera de radio r, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; el volumen V es directamente proporcional al cubo del radio. En este caso, la constante de proporcionalidad es igual a $\frac{4}{3}\pi$.

Nótese que en la variación directa (i) la variable dependiente aumenta cuando la independiente se incrementa, mientras que en la variación inversa (iii), el valor absoluto de la variable dependiente disminuye cuando la independiente aumenta.

En muchos problemas prácticos se determina la constante de proporcionalidad mediante un análisis de los hechos experimentales, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Se sabe que si la temperatura permanece constante, entonces la presión de un gas encerrado en un recipiente es inversamente proporcional al volumen. La presión de cierto gas dentro de un globo esférico de 9 pulg de radio es de 20 libras por pulgada cuadrada (lb/pulg^2). Si el radio del globo aumenta a 12 pulg, determinar la nueva presión del gas.

SOLUCIÓN El volumen original es $\frac{4}{3}\pi(9)^3 = 972\pi$ pulg^3. Si denotamos la presión y el volumen por P y V, respectivamente, entonces por (iii) de la definición se tiene:

$$P = \frac{k}{V}$$

para un número real k. Como $P = 20$ cuando $V = 972\pi$, se obtiene:

$$20 = \frac{k}{972\pi}$$

y por lo tanto, $k = 20(972\pi) = 19\,440\pi$. En consecuencia, una fórmula para P será

$$P = \frac{19440\pi}{V}.$$

Si el radio es 12 pulg, entonces $V = \frac{4}{3}(12)^3\pi = 2\,304\pi$ pulg^3. Al sustituir el valor de V en la ecuación anterior, se obtiene:

$$P = \frac{19440\pi}{2304\pi} = \frac{135}{16} = 8.4375.$$

Por lo tanto, la presión es de 8.4375 lb/pulg^2 cuando el radio es de 12 pulg. ■

Es factible que se den combinaciones de los diferentes tipos de variaciones. No es conveniente discutir todas las situaciones posibles, pero quizá el siguiente ejemplo sea suficiente. Si una variable s varía conjuntamente con u y el cubo de v, e inversamente con el cuadrado de w, entonces

$$s = k\frac{uv^3}{w^2},$$

en donde k es un número real.

EJEMPLO 2 El peso que puede soportar una viga con sección transversal rectangular varía proporcionalmente al ancho y al cuadrado del alto de la sección transversal y es inversamente proporcional a la longitud de la viga. Si una viga que tiene una sección transversal de 2 × 4 pulgadas y 8 pies de longitud, soporta una carga de 500 libras (lb), ¿qué peso soportará una viga de 2 × 8 pulg y 10 pie de longitud? (Desde luego, el ancho es la dimensión *más corta* de la sección transversal.)

SOLUCIÓN Si el ancho, alto, longitud y peso se denotan por w, d, l y W, respectivamente, se tiene

$$W = k\frac{wd^2}{l}.$$

De acuerdo con los datos del problema

$$500 = k\frac{2(4^2)}{8}.$$

Al despejar k obtenemos que su valor es 125, y por consiguiente la fórmula para W está dada por

$$W = 125\left(\frac{wd^2}{l}\right).$$

Para responder a la pregunta hacemos $w = 2$, $d = 8$ y $l = 10$ y obtenemos

$$W = 125\left(\frac{2 \cdot 8^2}{10}\right) = 1\,600 \text{ lb}.$$

■

Ejercicios 3.8

En los Ejercicios 1 a 8, exprese cada enunciado como una fórmula y determine la constante de proporcionalidad a partir de las condiciones dadas.

1. a es directamente proporcional a v. Si $v = 30$, entonces $a = 12$.
2. s varía directamente con t. Si $t = 10$, entonces $s = 18$.
3. r varía directamente con s e inversamente con t. Si $s = -2$ y $t = 4$, entonces $r = 7$.
4. w varía directamente con z e inversamente con la raíz cuadrada de u. Si $z = 2$ y $u = 9$, entonces $w = 6$.
5. y es directamente proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional al cubo de z. Si $x = 5$ y $z = 3$, entonces $y = 25$.
6. q es inversamente proporcional a la suma de x y y. Si $x = 0.5$ y $y = 0.7$, entonces $q = 1.4$.
7. c varía conjuntamente con el cuadrado de a y el cubo de b. Si $a = 7$ y $b = -2$, entonces $c = 16$.
8. r varía conjuntamente con s y v e inversamente con el cubo de p. Si $s = 2$, $v = 3$ y $p = 5$, entonces $r = 40$.
9. La presión en un punto de un líquido es directamente proporcional a la distancia de la superficie del líquido al punto. La presión a una profundidad de 2 pie en un tanque de aceite es de 118 lb/pie^2. Determine la presión a una profundidad de 5 pie.
10. La ley de Hooke establece que la fuerza requerida para estirar un resorte x unidades desde su posición natural es directamente proporcional a x. Si un peso de 4 lb estira un resorte cuya longitud natural es 10 pulg hasta una longitud de 10.3 pulg, ¿cuál es el peso que dará lugar a una longitud de 11.5 pulg?
11. La resistencia eléctrica de un cable varía directamente con su longitud e inversamente con el cuadrado de su diámetro. Si un cable de 100 pie de longitud y 0.01 pulg de diámetro tiene una resistencia de 25 Ω (ohms), encuentre la resistencia de un cable del mismo material que tiene un diámetro de 0.015 pulg y 50 pie de longitud.
12. La iluminación E de la fuente luminosa varía inversamente con el cuadrado de la distancia d a partir de la fuente. Si la iluminación que produce un potente reflector es de 1 000 000 bujías a 50 pie, ¿cuál es su intensidad a una distancia de una milla?
13. El periodo de un péndulo simple, es decir, el tiempo requerido para una oscilación completa, varía directamente con la raíz cuadrada de su longitud. Si el periodo de un péndulo de 2 pie de longitud es de 1.5 segundos (s), determine el periodo de un péndulo de 6 pie de longitud.
14. En fisiología se acostumbra usar un cilindro circular como un modelo sencillo de una extremidad humana.

(a) Demuestre que el volumen V de un cilindro varía conjuntamente con la longitud L y el cuadrado de la circunferencia C.

(b) La fórmula obtenida en (a) se puede usar para aproximar el volumen de una extremidad humana a partir de mediciones de la longitud y de la circunferencia. Suponga que la circunferencia (promedio) del antebrazo de un hombre es de 22 cm y que su longitud es de 27 cm. Aproxime el volumen del antebrazo.

15. La tercera ley de Kepler establece que el periodo T de un planeta, es decir, el tiempo que tarda en dar una vuelta completa alrededor del Sol, es directamente proporcional a la potencia $\frac{3}{2}$ de la distancia promedio al Sol. Para el planeta Tierra $T = 365$ días y $d = 93$ millones de millas. Venus está a 67 millones de millas del Sol. Estime el periodo de Venus.

16. Un motociclista acróbata ha efectuado un salto de 150 pie. Su velocidad a la salida de la rampa era de 70 mi/h. Se sabe, por física, que el alcance de un proyectil es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad. Si el motociclista puede alcanzar una velocidad de salida de la rampa de 80 mi/h y mantener el equilibrio adecuado, calcule el alcance posible de tal salto.

17. La policía puede estimar, algunas veces, la velocidad V a la que viajaba un automóvil antes de frenar a partir de la longitud L de las marcas de las llantas sobre el pavimento. Suponga que en una superficie seca $L = 50$ pie cuando $V = 35$ mi/h. Suponiendo que la velocidad es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud de las marcas, estime la velocidad inicial si la longitud de las marcas es de 150 pie.

18. La ley de Coulomb en electricidad asevera que la fuerza F de atracción entre dos partículas con cargas opuestas varía conjuntamente con las magnitudes Q_1 y Q_2 de las cargas, e inversamente con el cuadrado de la distancia d entre las partículas.

(a) Obtenga una fórmula para F.

(b) ¿Cuál es el efecto de reducir la distancia entre las cargas en un factor de $\frac{1}{4}$?

19. El peso umbral W de una persona se define como aquel peso no saludable a partir del cual la mortalidad aumenta significativamente. Para varones de edad media, este peso es directamente proporcional a la tercera potencia de la estatura h. Para un varón de 6 pie de altura, W es de alrededor de 200 lb. Estime el peso umbral para un individuo de 5 pie 6 pulg de altura.

20. La ley del gas ideal establece que el volumen que ocupa un gas es conjuntamente proporcional al número n de moles del gas, y a la temperatura T (en grados Kelvin), e inversamente proporcional a la presión P (en atmósferas). ¿Cuál es el efecto sobre el volumen de duplicar el número de moles y de reducir tanto la temperatura como la presión en un factor de $\frac{1}{2}$?

21. La ley de Poiseuille establece que la intensidad del flujo sanguíneo F (en litros por minuto) a través de las arterias principales es conjuntamente proporcional a la cuarta potencia del radio R y a la presión sanguínea P. Cuando se hace ejercicio pesado, la intensidad normal de flujo en ocasiones se triplica. Si el radio aumenta en 10% aproximadamente, ¿cuánto más rápido, aproximadamente, debe bombear el corazón?

22. Suponga que se pescan 200 truchas, se marcan y se sueltan en la población general de un lago. Sea y el número de peces marcados que se recuperan más adelante cuando se captura una muestra n de truchas. La validez del método de *recaptura de marcados* para estimar la población total de truchas del lago se basa en la suposición de que y es directamente proporcional a n. Si se recuperan 10 truchas marcadas de una muestra de 300, estime la población total de peces de esta clase en el lago.

3.9 Repaso

Defina o discuta cada uno de los siguientes conceptos.

1. Par ordenado.
2. Sistema coordenado rectangular en un plano.
3. Ejes coordenados.
4. Cuadrantes.
5. Coordenadas de un punto.
6. Fórmula de la distancia.

7. Fórmula del punto medio.
8. Gráfica de una ecuación en x y y.
9. Pruebas de simetría.
10. Ecuación de una circunferencia.
11. Círculo unitario.
12. Pendiente de una recta.
13. Forma de punto y pendiente.
14. Forma de pendiente e intercepción.
15. Ecuación lineal en x y y.
16. Función.
17. Dominio y contradominio de una función.
18. Función biunívoca o uno a uno.
19. Función identidad.
20. Función constante.
21. Función par.
22. Función impar.
23. Gráfica de una función.
24. Función lineal.
25. Función creciente.
26. Función decreciente.
27. Traslación vertical de una curva.
28. Traslación horizontal de una curva.
29. Estiramiento de una curva.
30. Reflexiones o simetrías de una curva.
31. Función composición (o compuesta) de dos funciones.
32. Inversa de una función.
33. Variación.

Ejercicios 3.9

1. Represente los puntos $A(3, 1)$, $B(-5, -3)$ y $C(4, -1)$ y demuestre que son los vértices de un triángulo rectángulo. ¿Cuál es el área del triángulo?
2. Dados los puntos $P(-5, 9)$ y $Q(-8, -7)$, (a) determine el punto medio del segmento PQ, (b) encuentre el punto T tal que Q es el punto medio de PT.
3. Describa en un plano coordenado el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $y/x < 0$.
4. Determine la pendiente de la recta que pasa por $C(11, -5)$ y $D(-8, 6)$.
5. Demuestre que $A(-3, 1)$, $B(1, -1)$, $C(4, 1)$ y $D(3, 5)$ son los vértices de un trapecio.
6. Halle la ecuación de la circunferencia con centro $C(7, -4)$ que pasa por el punto $Q(-3, 3)$.
7. Determine la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $x = 4$ con centro $C(-5, -1)$.
8. Exprese $8x + 3y - 24 = 0$ en la forma de pendiente e intercepción.
9. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $A(\ ,\ )$ y que es (a) paralela a la recta $6x + 2y + 5 = 0$ y (b) perpendicular a $6x + 2y + 5 = 0$.
10. Determine la ecuación de la recta cuya intercepción x es -3 y que pasa por el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 26 = 0$.

En los Ejercicios 11 a 21, trace las gráficas de las ecuaciones dadas.

11. $2y + 5x - 8 = 0$
12. $x = 3y + 4$
13. $x + 5 = 0$
14. $2y - 7 = 0$
15. $y = \sqrt{1 - x}$
16. $3x - 7y^2 = 0$
17. $9y^2 + 2x = 0$
18. $y^2 = 16 - x^2$
19. $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 64 = 0$
20. $x^2 + y^2 - 8x = 0$
21. $y - x^2 = 1$
22. Determine el dominio y el contradominio de f si:
    (a) $f(x) = \sqrt{3x - 4}$ (b) $f(x) = 1/(x + 3)^2$
23. Si $f(x) = x/\sqrt{x} + 3$, encuentre:
    (a) $f(1)$ (b) $f(-1)$ (c) $f(0)$
    (d) $f(-x)$ (e) $-f(x)$ (f) $f(x^2)$
    (g) $(f(x))^2$

En cada uno de los Ejercicios 24 a 30 trace la gráfica de f y determine los intervalos en donde la función es creciente o decreciente.

24. $f(x) = |x + 3|$

25. $f(x) = \dfrac{1 - 3x}{2}$

26. $f(x) = \sqrt{2 - x}$

27. $f(x) = 1 - \sqrt{x + 1}$

28. $f(x) = 9 - x^2$

29. $f(x) = 1000$

30. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 6 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

31. Mediante traslaciones, estiramientos o reflexiones (simetrías), trace las gráficas de las siguientes funciones.

(a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = \sqrt{x + 4}$

(c) $y = \sqrt{x} + 4$ (d) $y = 4\sqrt{x}$

(e) $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$ (f) $y = -\sqrt{x}$

32. Determine si f es una función par, impar o ninguna de las dos.

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 4x}$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 3x^2 + 5}$

En cada uno de los Ejercicios 33 y 34 realice la obtención de $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

33. $f(x) = 2x^2 - 5x + 1,\ g(x) = 3x + 2$

34. $f(x) = \sqrt{3x + 2},\ g(x) = 1/x^2$

En los Ejercicios 35 y 36 determine $f^{-1}(x)$ y trace las gráficas de f y f^{-1} en un mismo plano coordenado.

35. $f(x) = 10 - 15x$

36. $f(x) = 9 - 2x^2,\ x \le 0$

37. Si la altura y el radio de un cilindro son iguales, exprese el volumen V en función de la circunferencia C de la base.

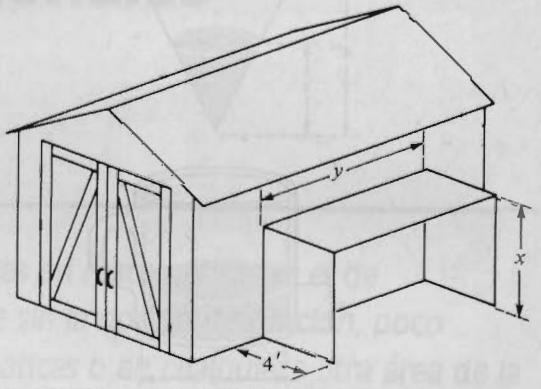
38. Una compañía planea fabricar un recipiente con forma de cilindro circular recto, abierto por la parte superior y con capacidad de 24π pulg^3. Si el material de la base cuesta 30 centavos (de dólar) por pulg^2 y el de la parte lateral curva cuesta 1 centavos por pulg^2, exprese el costo total C del material como función del radio r de la base del recipiente.

39. Se desea añadir a una bodega existente un cobertizo rectangular de almacenamiento como se muestra en la figura. El cobertizo tendrá dos lados verticales de 4 pie de ancho y un techo plano. El techo se hará de estaño, que cuesta \$5 (dólares) por pie^2, mientras que las partes laterales se harán de madera terciada, que cuesta \$2 por pie^2.

(a) Si se dispone de \$400 para la construcción, exprese la longitud y como función de la altura x.

(b) Exprese el volumen interior V del cobertizo nuevo como una función de x.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 39



40. Hace 5 años la población de una pequeña comunidad era de 15 000 personas. Debido al desarrollo industrial, la población creció a 21 000. Suponiendo que la población está relacionada linealmente con el tiempo t, exprese a P como función de t. ¿Cuándo llegará la población a 30 000?

41. Actualmente un automóvil da 20 millas por galón de gasolina, pero necesita una afinación que costará \$50 (dólares). La afinación mejorará el rendimiento de la gasolina en un 10%.

(a) Si la gasolina cuesta \$1.25 por galón, obtenga una función lineal que dé el costo C de manejar x millas sin la afinación.

(b) Encontrar una función lineal que dé el costo C de manejar x millas después de la afinación.

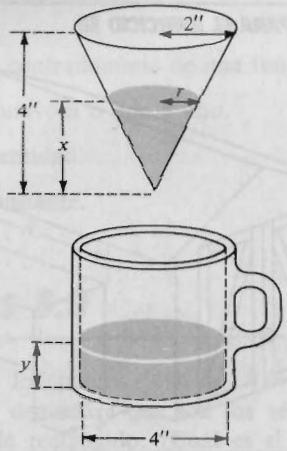
(c) ¿Cuántas millas debe ser conducido el automóvil para que por la afinación, se empiece a ahorrar dinero?

42. El agua contenida en un filtro cónico de papel gotea a una taza, como se muestra en la figura. Suponga que se vacían 5 pulg^3 de agua en el filtro. Sea x la altura del agua en dicho filtro y y la altura del agua en la taza.

(a) Exprese el radio r (véase la figura) como función de x. (*Sugerencia:* Use triángulos semejantes.)

(b) Exprese la altura y del agua en la taza como función de x. (*Sugerencia:* ¿Cuál es la suma de los dos volúmenes que se muestran en la figura?

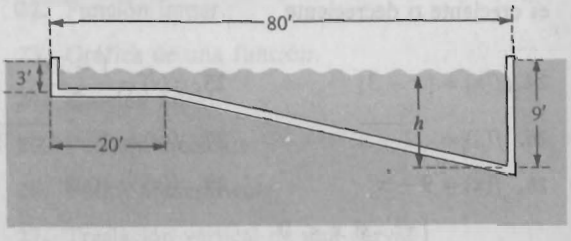
FIGURA PARA EL EJERCICIO 42



43. En la figura se muestra una de las secciones transversales de una piscina rectangular con dimensiones de 80 pie por 40 pie. El tanque se está llenando de agua a razón de 10 pie^3/min.

(a) Exprese el volumen V como función de la profundidad h en el extremo profundo para $0 \le h \le 6$ y después para $6 \le h \le 9$.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 43



(b) Exprese V como función del tiempo t. Después exprese a h como función de t.

44. Determine una fórmula que exprese el hecho de que w varía conjuntamente con x y el cuadrado de y, e inversamente con z; se sabe que $w = 30$ cuando $x = 3$, $y = 2$ y $z = 5$.

45. La potencia P generada por una rueda de viento es conjuntamente proporcional al área barrida por las aspas y a la tercera potencia de la velocidad del viento v. Suponga que el diámetro del área circular barrida por las aspas es de 10 pie, y que $P = 3\,000$ watts (W) cuando $v = 20$ mi/h. Determine la potencia generada cuando la velocidad del viento es de 30 mi/h.

46. En cierto distrito, el número promedio diario de llamadas telefónicas entre dos ciudades es directamente proporcional a cada una de sus poblaciones, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. La distancia entre Crestview y Cedar City es de 25 millas (mi) y sus poblaciones son de 10 000 y 5 000, respectivamente. Los registros telefónicos indican un promedio de 2 000 llamadas diarias entre las dos ciudades. Estime el número de comunicaciones entre Crestview y Palmas, una ciudad de 15 000 personas situada a 100 millas de Crestview.

CAPÍTULO 4

Funciones polinomiales y funciones racionales

Uno de los conceptos más útiles en matemáticas es el de función. ■ Puede decirse que sin la noción de función, poco progreso se realizaría en matemáticas o en cualquiera otra área de la ciencia. ■ En las primeras secciones de este capítulo consideraremos los sistemas coordenados en dos dimensiones. ■ El resto del capítulo se dedica al estudio de las funciones y sus gráficas.

4.1 Funciones cuadráticas

Dentro de las funciones más importantes de las matemáticas se encuentran las que a continuación se definen:

DEFINICIÓN

Una función f se llama **función polinomial** si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

en donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales y los exponentes son enteros no negativos.

Si en la definición anterior $a_n \neq 0$, se dice que f es de **grado** n. Nótese que una función polinomial de grado 1 es una función lineal. Como se ve en la siguiente definición, cuando f es de grado 2 se le llama *función cuadrática.*

DEFINICIÓN

Una función f es una **función cuadrática** si

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

en donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

Si $b = c = 0$ en la definición precedente, entonces $f(x) = ax^2$ y su gráfica es una parábola con vértice en el origen, que abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$ (Figuras 3.29 y 3.30). Si $b = 0$ y $c \neq 0$, entonces

$$f(x) = ax^2 + c,$$

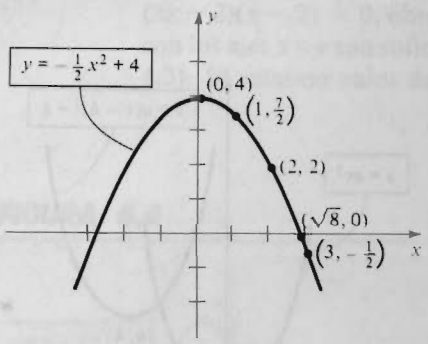
y recordando lo estudiado en la Sección 3.4 respecto a la traslación vertical, la gráfica es una parábola con vértice en el punto $(0, c)$ sobre el eje y. En la Figura 3.26 se ilustran algunas gráficas típicas. El siguiente ejemplo es otra ilustración.

EJEMPLO 1 Trazar la gráfica de f si $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$.

SOLUCIÓN La gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2$ es similar a la gráfica de $y = -x^2$ que aparece en la Figura 3.30, pero es algo más ancha. La gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ se puede encontrar trasladando la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2$ cuatro unidades hacia arriba. En la siguiente tabla, se dan las coordenadas de algunos de los puntos de la gráfica.

x	0	1	2	$\sqrt{8}$	3
y	4	$\frac{7}{2}$	2	0	$-\frac{1}{2}$

FIGURA 4.1



Si representamos estos puntos y consideramos la simetría respecto al eje y, obtenemos la Figura 4.1. ■

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $b \neq 0$, entonces podemos emplear la técnica de completar el cuadrado para cambiar la forma de $f(x)$ a

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

en donde h y k son números reales. Esta técnica se ilustrará en el siguiente ejemplo. Como se verá, la gráfica de f puede obtenerse fácilmente de este nuevo método.

EJEMPLO 2 Expresar $f(x)$ en la forma $a(x - h)^2 + k$ si $f(x) = 3x^2 + 24x + 50$.

SOLUCIÓN Antes de completar el cuadrado *es de suma importancia factorizar el coeficiente de x^2 de los primeros dos términos* de $f(x)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 24x + 50 \\ &= 3(x^2 + 8x \quad\quad) + 50. \end{aligned}$$

Para completar el cuadrado de la expresión dentro del paréntesis, sumamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, esto es, $(\frac{8}{2})^2$, o sea 16; sin embargo, si sumamos 16 a la expresión entre paréntesis, entonces, debido al factor 3, en realidad estamos sumando 48 a $f(x)$. Por esto, debemos compensar restando 48; obtenemos así:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 + 8x \quad\quad) + 50 \\ &= 3(x^2 + 8x + 16) + 50 - 48 \\ &= 3(x + 4)^2 + 2, \end{aligned}$$

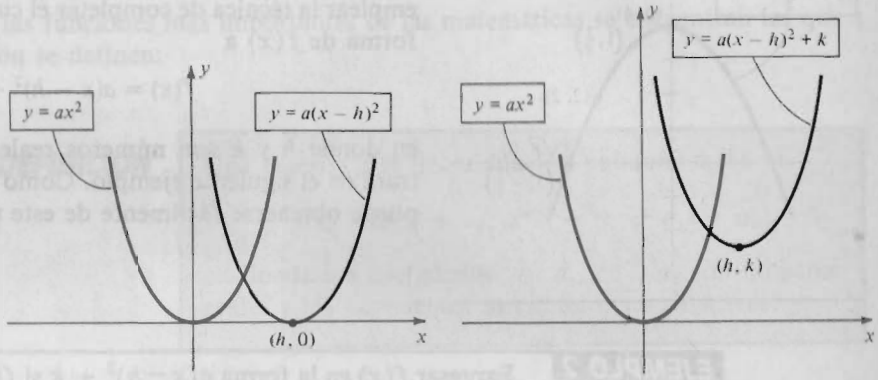
que tiene la forma deseada con $a = 3$, $h = -4$ y $k = 2$. ■

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces, completando el cuadrado como se hizo en el Ejemplo 2, vemos que la gráfica de f es la misma que la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = a(x - h)^2 + k.$$

Si recordamos lo estudiado en la Sección 3.4, sabemos que la gráfica de $y = a(x - h)^2$ se puede obtener mediante la traslación de la gráfica $y = ax^2$ hacia la derecha o hacia la izquierda, dependiendo de que h sea positiva o negativa, respectivamente. Por consiguiente, la gráfica de $y = a(x - h)^2$ es una parábola con vértice en $(h, 0)$ y eje paralelo al eje y. Una gráfica típica se muestra en la Figura 4.2(i) para a y h positivas. Como la gráfica de $y = a(x - h)^2 + k$ se puede obtener por una traslación *vertical* de la gráfica de $y = a(x - h)^2$ de k unidades, se sigue que *la gráfica de una función cuadrática f es una parábola* con vértice en (h, k) y eje vertical. La Figura 4.2(ii) ilustra una posibilidad para la gráfica. Obsérvese que puesto que (h, k) es el punto más bajo (o el más

FIGURA 4.2



alto) de la parábola, $f(x)$ tiene su mínimo (o su máximo) valor en $x = h$. Este valor es $f(h) = k$.

Se ha derivado entonces la siguiente ecuación de la parábola con vértice en (h, x) y eje vertical:

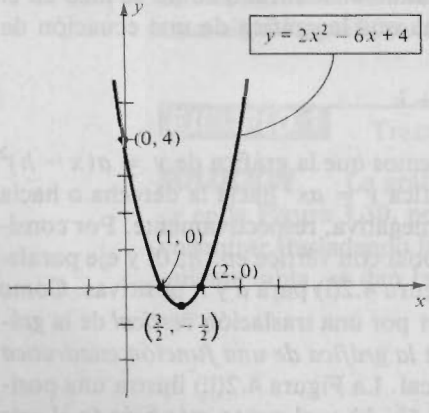
ECUACIÓN ESTÁNDAR DE LA PARÁBOLA (EJE VERTICAL)

$$y - k = a(x - h)^2$$

Esta parábola abre hacia arriba si $a > 0$, o hacia abajo si $a < 0$.

EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de f si $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$ y hallar el valor mínimo de $f(x)$.

FIGURA 4.3



SOLUCIÓN La gráfica de f es una parábola igual a la de la ecuación $y = 2x^2 - 6x + 4$. Procedemos a completar el cuadrado; esto es,

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 6x + 4 \\ &= 2(x^2 - 3x \quad) + 4 \\ &= 2(x^2 - 3x + \tfrac{9}{4}) + (4 - \tfrac{9}{2}) \\ &= 2(x - \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Si escribimos la ultima ecuación en la forma

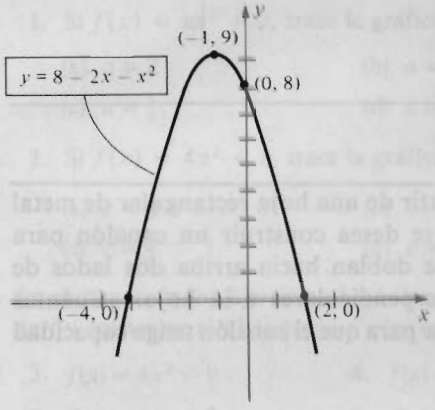
$$y + \tfrac{1}{2} = 2(x - \tfrac{3}{2})^2$$

y la comparamos con la ecuación estándar de la parábola, tenemos que $h = \frac{3}{2}$ y $k = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto, el vértice (h, k) de la parábola es $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. Como $a = 2 > 0$, enton-

ces la parábola abre hacia arriba. La intercepción y es $f(0) = 4$. Para obtener las intersecciones con el eje x, resolvemos $2x^2 - 6x + 4 = 0$ o la ecuación equivalente $(2x - 2)(x - 2) = 0$, obteniendo $x = 1$ y $x = 2$. El vértice junto con las intersecciones con los ejes x y y son suficientes para obtener una gráfica razonablemente precisa (Figura 4.3). El mínimo valor de f, el cual ocurre en el vértice, es $f(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{2}$. ■

EJEMPLO 4 Trazar la gráfica de f si $f(x) = 8 - 2x - x^2$, y hallar el máximo valor de $f(x)$.

FIGURA 4.4



SOLUCIÓN Sabemos que la gráfica es una parábola de eje vertical. Hagamos $y = f(x)$ y encontremos el vértice completando el cuadrado; esto es

$$\begin{aligned} y &= -x^2 - 2x + 8 \\ &= -(x^2 + 2x) + 8 \\ &= -(x^2 + 2x + 1) + 8 + 1 \\ &= -(x + 1)^2 + 9. \end{aligned}$$

Si ahora escribimos $y - 9 = -(x + 1)^2$

y comparamos con la ecuación estándar, tenemos que $h = -1$, $k = 9$, y por lo tanto, el vértice es $(-1, 9)$. Como $a = -1 < 0$, la parábola abre hacia abajo. Para obtener las intersecciones con el eje x, resolvemos la ecuación $8 - 2x - x^2 = 0$. Ya sea por factorización o usando la fórmula cuadrática, obtenemos $x = -4$ y $x = 2$. La intersección con el eje y es 8. Esta información da la gráfica de la Figura 4.4; f alcanza su máximo valor en el vértice y éste es, $f(-1) = 9$. ■

Las intercepciones x de la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ son las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c$ y por lo tanto son $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$. Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y no iguales, y la gráfica, dos intercepciones x. Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución (doble) y la gráfica es tangente al eje x. Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales y la gráfica carece de intercepciones x. En la Figura 4.5 se han ilustrado los tres casos para $a > 0$. Una situación similar se presenta si $a < 0$, pero en este caso las parábolas abren hacia abajo.

Algunos problemas aplicados pueden resolverse encontrando valores máximos o mínimos de funciones cuadráticas. El siguiente ejemplo dará una ilustración.

FIGURA 4.5

$y = ax^2 + bx + c$

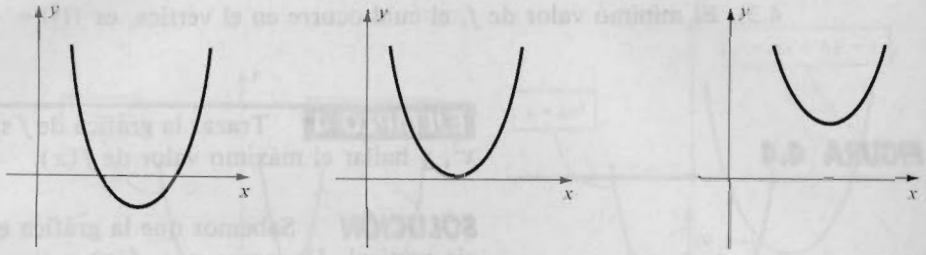
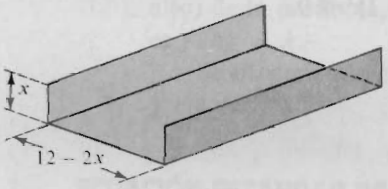


FIGURA 4.6



EJEMPLO 5 A partir de una hoja rectangular de metal de 12 pulg de ancho, se desea construir un canalón para desaguar la lluvia, y se doblan hacia arriba dos lados de manera que queden perpendiculares a la hoja. ¿Cuántas pulgadas se deben doblar para que el canalón tenga capacidad máxima?

SOLUCIÓN La Figura 4.6 muestra el canalón, en donde, si x denota el número de pulgadas que se deben doblar en cada lado, entonces el ancho de la base del canalón es de $12 - 2x$ pulgadas. (¿Por qué?). La capacidad será máxima cuando el área del rectángulo cuyos lados son de longitud x y $12 - 2x$ tenga su máximo valor. Si $f(x)$ denota esta área, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= x(12 - 2x) \\ &= 12x - 2x^2 \\ &= -2x^2 + 12x. \end{aligned}$$

Podemos encontrar el valor maximo de $f(x)$ completando el cuadrado; esto es,

$$\begin{aligned} f(x) &= -2(x^2 - 6x) \\ &= -2(x^2 - 6x + 9) + 18 \\ &= -2(x - 3)^2 + 18. \end{aligned}$$

La gráfica de f es la gráfica de la ecuación

$$y = -2(x - 3)^2 + 18 \quad \text{o bien} \quad y - 18 = -2(x - 3)^2$$

y por lo tanto es una parábola que abre hacia abajo. El mayor valor de $y = f(x)$ se presenta en el vértice (3, 18); es decir en $x = 3$. Entonces, para tener capacidad máxima deben doblarse 3 pulg. ■

Las parábolas (y por lo tanto las funciones cuadráticas) tienen muchas aplicaciones en el mundo físico. Se puede mostrar que si se lanza un proyectil y sobre éste únicamente actúa la fuerza de la gravedad —esto es, si no hay resistencia del aire ni otros factores externos— entonces la trayectoria del proyectil será una parábola. Las propiedades de las parábolas se utilizan en el diseño de espejos para telescopios y reflectores. También se utilizan en la construcción de antenas para radar.

Ejercicios 4.1

1. Si $f(x) = ax^2 + 2$, trace la gráfica de f para:
   (a) $a = 2$ (b) $a = 5$
   (c) $a = \frac{1}{2}$ (d) $a = -3$

2. Si $f(x) = 4x^2 + c$, trace la gráfica de f para:
   (a) $c = 2$ (b) $c = 5$
   (c) $c = \frac{1}{2}$ (d) $c = -3$

En cada uno de los Ejercicios 3 a 6, trace la gráfica de f y encuentre el vértice.

3. $f(x) = 4x^2 - 9$
4. $f(x) = 2x^2 + 3$
5. $f(x) = 9 - 4x^2$
6. $f(x) = 16 - 9x^2$

En los Ejercicios 7 a 10 use la fórmula cuadrática para encontrar los ceros de f.

7. $f(x) = 4x^2 - 11x - 3$
8. $f(x) = 25x^2 + 10x + 1$
9. $f(x) = 9x^2 - 12x + 4$
10. $f(x) = 10x^2 + x - 21$

En los Ejercicios 11 a 14 utilice la técnica de completar el cuadrado para expresar la función $f(x)$ en la forma $a(x - h)^2 + k$ y encuentre el valor máximo o mínimo de $f(x)$.

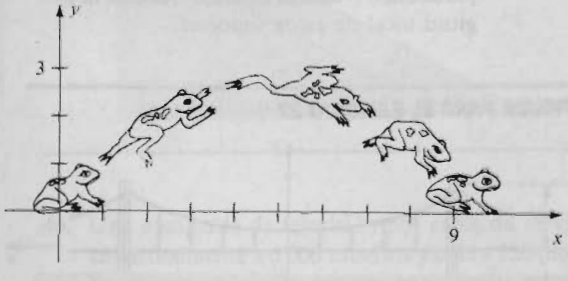
11. $f(x) = 2x^2 - 16x + 23$
12. $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$
13. $f(x) = -5x^2 - 10x + 3$
14. $f(x) = -2x^2 - 12x - 12$

En cada uno de los Ejercicios 15 a 24, trace la gráfica de f y encuentre el valor máximo o mínimo de $f(x)$.

15. $f(x) = x^2 + 5x + 4$
16. $f(x) = x^2 - 6x$
17. $f(x) = 8x - 12 - x^2$
18. $f(x) = 10 + 3x - x^2$
19. $f(x) = x^2 + x + 3$
20. $f(x) = x^2 + 2x + 5$
21. $f(x) = 3x^2 - 12x + 16$
22. $f(x) = 2x^2 + 12x + 13$
23. $f(x) = -5x^2 - 10x - 4$
24. $f(x) = -3x^2 + 24x - 42$

25. Los animales que saltan siguen, al brincar, trayectorias parabólicas. La figura muestra el salto de una rana superpuesta a un sistema coordenado rectangular. La longitud del salto es de 9 pie y la altura máxima es de 3 pie. Halle una función cuadrática f que especifique la trayectoria de la rana.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 25



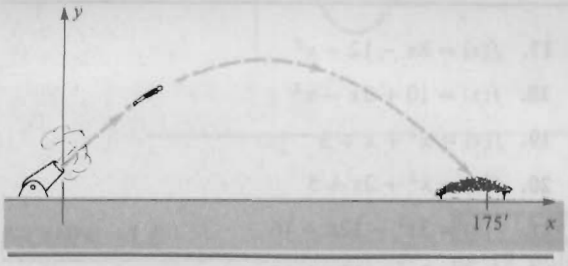
26. En la década de 1940, Emmanuel Zacchini realizaba regularmente el acto de la bala humana en el circo Ringling Brothers y Barnum & Bailey. La punta del cañón se levantaba a 15 pie del suelo y la distancia horizontal total que recorría era de 175 pie. Cuando el cañón se apunta a un ángulo

de 45°, la ecuación del tiro parabólico tiene la forma $y = ax^2 + x + c$ (véase la figura).

(a) Obtener los valores de a y de c que corresponden a la información proporcionada.

(b) Calcule la altura máxima alcanzada por la bala humana.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 26

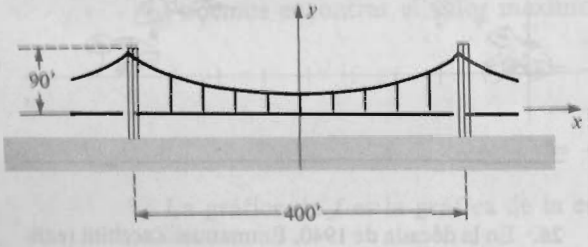


27. El peso de un tramo de puente colgante está distribuido uniformemente entre dos torres gemelas colocadas a una distancia de 400 pie una de la otra y cuya altura es de 90 pie sobre el viaducto horizontal (véase la figura). El cable que pende entre los extremos de dos torres tiene la forma de una parábola y su punto central más bajo está a una altura de 10 pie sobre el camino. Suponga que se introducen ejes coordenados como los que se muestran en la figura.

(a) Obtenga la ecuación de la parábola.

(b) Para soportar el puente se usan nueve cables verticales igualmente espaciados fijos al parabólico (véase la figura). Obtener la longitud total de estos soportes.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 27

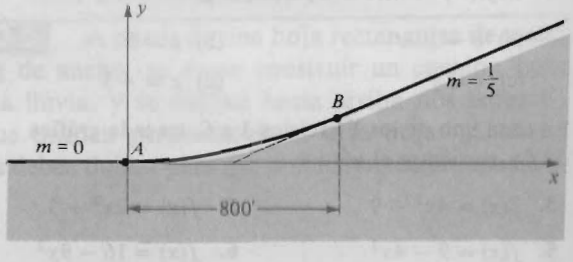


28. Unos ingenieros de vialidad están diseñando un tramo que enlazará una carretera horizontal con otra que asciende con un 20% de pendiente (es decir, de 1 a 5), como se muestra en la figura. La transición debe llevarse a cabo suavemente sobre una distancia horizontal de 800 pie utilizando un tramo de carretera de perfil parabólico para conectar los puntos A y B. Si la ecuación del segmento parabólico es $y = ax^2 + bx + c$, puede demostrarse que la pendiente de la recta tangente en el punto $P(x, y)$ a la parábola está dada por $m = 2ax + b$.

(a) Obtenga la ecuación de la parábola que tiene una recta tangente de pendiente 0 en A y una de pendiente $\frac{1}{5}$ en B.

(b) Hallar las coordenadas de B.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 28



29. Obtenga la ecuación de una parábola con eje vertical y que pasa por los puntos $A(2, 3)$, $B(-1, 6)$ y $C(1, 0)$.

30. Muestre que existe exactamente una recta de pendiente dada m que corta a la parábola $x^2 = 4py$ en exactamente un punto y que su ecuación es $y = mx - pm^2$.

31. Una persona, de pie en el techo de un edificio lanza un objeto directamente hacia arriba con una velocidad de 144 pie/s. La altura sobre el objeto $s(t)$, en pies, después de t segundos, está dada por $s(t) = -16t^2 + 144t + 100$. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza? ¿Cuál es la altura del edificio?

32. Un cohete de juguete se dispara directamente hacia arriba con una velocidad v_0 (en pie/s) y su altura $s(t)$ sobre el piso en pies, después de t segundos, está dada por $s(t) = -16t^2 + v_0t$.

(a) El cohete llega al suelo después de 12 s (segundos). ¿Cuál es la velocidad inicial v_0?

(b) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el cohete?

33. La tasa de aumento de peso y (en libras por mes) de los bebés está relacionada con su peso actual x (en libras) mediante la fórmula $y = cx(21 - x)$, para una constante $c > 0$. Para qué peso es máxima la tasa de crecimiento?

34. El rendimiento de gasolina y (en millas por galón) de un pequeño automóvil económico está relacionado con la velocidad v (en mi/h) mediante la fórmula

$$y = -\tfrac{1}{30}v^2 + 2.5v \quad \text{para } 0 < v < 70$$

¿Cuál es la velocidad más económica en el caso de un viaje largo?

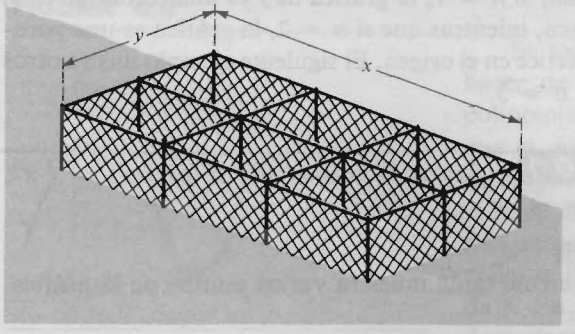
35. Para construir seis jaulas de un zoológico se necesitan 1 000 pie de enrejado. El diseño de las jaulas se muestra en la figura.

(a) Exprese el ancho y como una función de la longitud x.

(b) Exprese el área total A limitada por el enrejado como función de x.

(c) Halle las dimensiones que hacen máxima el área citada.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 35



36. Un hombre desea cercar un terreno rectangular y después colocar otras dos cercas paralelas a alguno de los lados para subdividirlo en tres lotes rectangulares. Si dispone únicamente de 1 000 yardas de cerca, ¿con qué dimensiones obtendrá el área máxima?

37. Un alambre de 24 pulgadas de largo se dobla en la forma de un rectángulo con ancho x y longitud y.

(a) Exprese a y como función de x.

(b) Exprese el área A del rectángulo como función de x.

(c) Demuestre que el área es máxima si el rectángulo es un cuadrado.

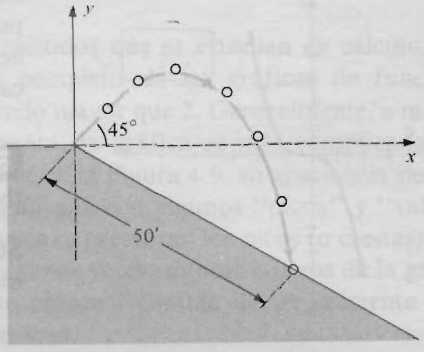
38. Una empresa comercial vende zapatos para correr, a distribuidores, a un precio de \$20 (dólares) el par si se ordenan menos de 50 pares. Si un distribuidor pide 50 o más pares (hasta 600), el precio por par se reduce a razón de 2 centavos por el número de pares ordenados. ¿Qué tamaño de pedido producirá la máxima cantidad de dinero a la negociación?

39. Un muchacho lanza una pelota de béisbol desde la parte más alta de una colina como se ilustra en la figura. La pelota, que fue lanzada a un ángulo de 45°, toca tierra 50 pie colina abajo; la loma está definida mediante la recta $4y + 3x = 0$. Usando cálculo puede demostrarse que la trayectoria de la bola está dada por la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ para a y c constantes.

(a) Despreciando la altura del lanzador, obtenga una ecuación para la trayectoria.

(b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota desde el suelo?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 39



40. Una compañía de televisión por cable da servicio actualmente a 5 000 usuarios y cobra \$20 (dólares) mensuales. Un estudio de mercado indica que por cada disminución de \$1 en la tarifa mensual, se suscribirán 500 nuevos clientes. Sea $R(x)$ el ingreso total mensual cuando la tarifa es x dólares mensuales.

(a) Determine la función ingreso R.

(b) Trace la gráfica de R y encuentre el valor de x que resulta en un ingreso máximo mensual.

4.2 Gráficas de funciones polinomiales de grado mayor que 2

Supongamos que f sea una función polinomial de grado n; esto es,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

para $a_n \neq 0$. El dominio de f es $\mathbb{R}$. Si el grado es non, entonces el contradominio de f también es $\mathbb{R}$; sin embargo, si el grado es par, entonces el contradominio es un intervalo infinito de la forma $(-\infty, a]$ o bien $[a, \infty)$. Las gráficas de esta sección ilustran estos hechos.

Recuérdese que si $f(c) = 0$, entonces c es un **cero** de f o bien de $f(x)$. También se conoce a c como **solución** o **raíz** de la ecuación $f(x) = 0$. Los ceros de f son las intercepciones x de la gráfica de f.

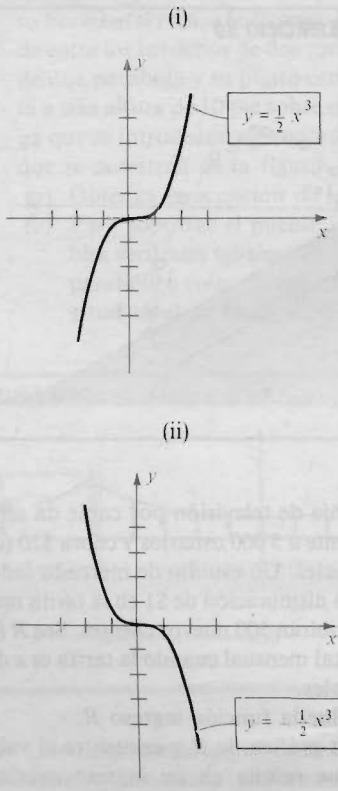
Si una función polinomial es de grado cero (0), entonces $f(x) = a$ para algún número real a diferente de cero, y la gráfica es una recta horizontal. Las gráficas de las funciones polinomiales de grado 1 (funciones lineales) son rectas. Las gráficas de las funciones polinomiales de grado 2 (funciones cuadráticas) son parábolas. En esta sección estudiaremos las gráficas de las funciones polinomiales de grado mayor que 2.

Si f es de grado n y todos los coeficientes excepto a_n son cero, entonces

$$f(x) = ax^n, \qquad \text{en donde} \qquad a = a_n \neq 0$$

En este caso, si $n = 1$, la gráfica de f es una recta que pasa por el origen, mientras que si $n = 2$, la gráfica es una parábola con vértice en el origen. El siguiente ejemplo ilustra otros casos con $n = 3$.

FIGURA 4.7



EJEMPLO 1 Trazar la gráfica de f si (a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$, (b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$.

SOLUCIÓN

(a) La siguiente tabla muestra varios puntos de la gráfica $y = \frac{1}{2}x^3$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
y	0	$\frac{1}{16} \approx 0.06$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{16} \approx 1.7$	4	$\frac{125}{16} \approx 7.8$

Como f es una función impar, la gráfica de f es simétrica respecto al origen (ver Sección 3.2) y por lo tanto, los puntos $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16})$, $(-1, -\frac{1}{2})$, etc., son también puntos de la gráfica. La gráfica aparece en (i) de la Figura 4.7.

(b) Si $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$, la gráfica se puede obtener a partir de la del inciso (a) multiplicando las ordenadas por -1. Esto equivale, como se muestra en (ii) de la Figura 4.7, a reflejar la gráfica a través del eje x. ■

En general, si $f(x) = ax^3$, entonces un aumento en el valor numérico del coeficiente a tendrá como consecuencia que la gráfica crezca o decrezca más tajantemente. Por ejemplo, si $f(x) = 10x^3$, tenemos $f(1) = 10, f(2) = 80$ y $f(-2) = -80$. El efecto que causará un exponente mayor, manteniendo constante el valor de a, será también que la gráfica crezca o decrezca más rápidamente; por ejemplo, $f(x) = \frac{1}{2}x^5$.

Si $f(x) = ax^n$ y n es un entero *par*, entonces la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y, como se ilustra en la Figura 4.8 para el caso $|a| = 1$. Nótese que al aumentar el valor del exponente, la gráfica se aplana más en el origen. También crece (o decrece) más rápidamente a medida que $|x|$ crece a través de valores mayores que 1.

FIGURA 4.8

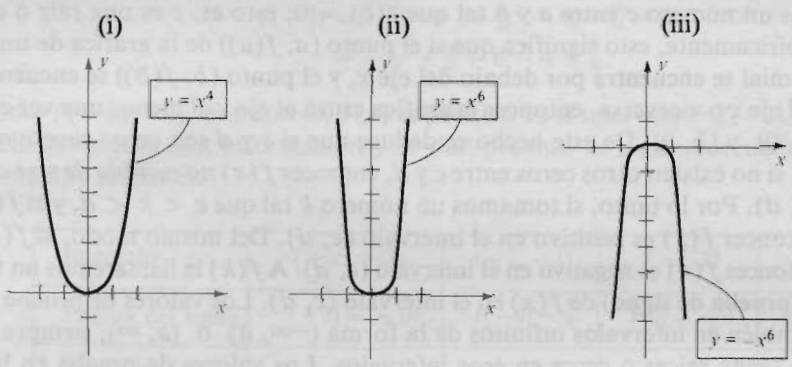
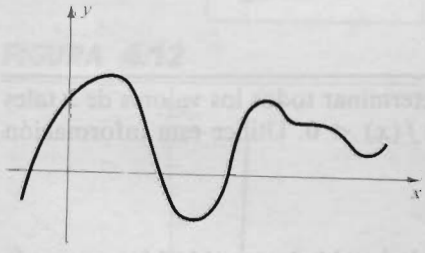


FIGURA 4.9



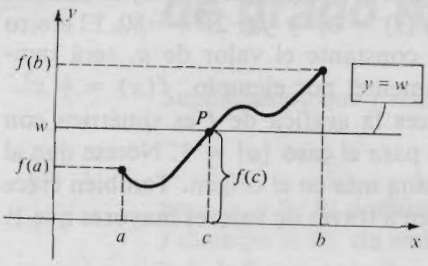
Se requieren métodos que se estudian en cálculo para hacer un análisis completo de las gráficas de funciones polinomiales de grado mayor que 2. Generalmente, a medida que el grado aumenta, la gráfica es más complicada. Sin embargo, como se ve en la Figura 4.9, su apariencia siempre es la de una curva alisada con algunos "picos" y "valles". Los puntos en los que se presentan los picos (o crestas) y los valles se llaman, algunas veces, **puntos críticos** de la gráfica de f. En un punto crítico f cambia de ser creciente a ser decreciente, o viceversa.

Una forma elemental para obtener un esquema aproximado, consiste en representar muchos puntos y ajustar una curva a la figura resultante. Este procedimiento es generalmente muy tedioso. La obtención de las gráficas por este método implica el uso de una propiedad de las funciones polinomiales llamada **continuidad**. La continuidad se estudia ampliamente en cálculo y significa que un pequeño cambio en x produce un pequeño cambio en el valor de la función $f(x)$. El siguiente teorema especifica otra propiedad muy importante de las funciones polinomiales. Su demostración requiere métodos matemáticos avanzados.

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO PARA FUNCIONES POLINOMIALES

Si f es una función polinomial y $f(a) \neq f(b)$ para $a < b$, entonces f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$ en el intervalo $[a, b]$.

FIGURA 4.10



El teorema del valor intermedio establece que si w es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número c entre a y b tal que $f(c) = w$. Si se considera que la gráfica de una función polinomial f se prolonga de manera ininterrumpida desde el punto $(a, f(a))$, hasta el punto $(b, f(b))$, como se ve en la Figura 4.10, entonces, para todo número w entre $f(a)$ y $f(b)$, es evidente que una recta horizontal que corte al eje y en w deberá cortar la gráfica en al menos un punto P. La abscisa c de P es un número tal que $f(c) = w$.

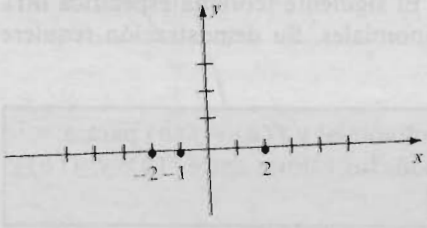
Un corolario al teorema del valor intermedio es que si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, entonces existe al menos un número c entre a y b tal que $f(c) = 0$; esto es, c es una raíz o cero de f. Geométricamente, esto significa que si el punto $(a, f(a))$ de la gráfica de una función polinomial se encuentra por debajo del eje x, y el punto $(b, f(b))$ se encuentra por encima del eje x o viceversa, entonces la gráfica cruza al eje x al menos una vez entre los puntos $(a, 0)$ y $(b, 0)$. De este hecho se deduce que si c y d son ceros *sucesivos* de $f(x)$, esto es, si no existen otros ceros entre c y d, entonces $f(x)$ *no cambia de signo en el intervalo* (c, d). Por lo tanto, si tomamos un número k tal que $c < k < d$, y si $f(k)$ es positivo, entonces $f(x)$ es positivo en el intervalo (c, d). Del mismo modo, si $f(k)$ es negativo, entonces $f(x)$ es negativo en el intervalo (c, d). A $f(k)$ la llamaremos un **valor de prueba** (o **prueba de signo**) de $f(x)$ en el intervalo (c, d). Los valores de prueba se pueden usar también en intervalos infinitos de la forma $(-\infty, a)$ o (a, ∞), siempre y cuando $f(x)$ no tenga raíces o ceros en esos intervalos. Los valores de prueba en la obtención de gráficas se usan en forma similar a como se utilizaron para las desigualdades en la Sección 2.7.

EJEMPLO 2 Si $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$, determinar todos los valores de x tales que $f(x) > 0$, y todos los valores de x tales que $f(x) < 0$. Utilice esta información para trazar la gráfica de f.

SOLUCIÓN El significado geométrico de las desigualdades establecidas es que la gráfica se encuentra sobre el eje x para valores de x tales que $f(x) > 0$, mientras que si $f(x) < 0$ la gráfica se encuentra debajo del eje x. Podemos factorizar $f(x)$ agrupando términos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3 + x^2) - (4x + 4) \\ &= x^2(x + 1) - 4(x + 1) \\ &= (x^2 - 4)(x + 1) \\ &= (x + 2)(x - 2)(x + 1) \end{aligned}$$

FIGURA 4.11



Se deduce de la última ecuación que los ceros de $f(x)$ (las intercepciones x de la gráfica) son -2, -1 y 2. Los correspondientes puntos de la gráfica (Figura 4.11) dividen al eje x en cuatro partes y se consideran los cuatro intervalos abiertos siguientes:

$$(-\infty, -2), \quad (-2, -1), \quad (-1, 2), \quad \text{y} \quad (2, \infty).$$

Se puede determinar el signo de $f(x)$ en cada uno de estos intervalos mediante una prueba de signo adecuada. Por lo tanto, si escogemos -3 en el intervalo $(-\infty, -2)$, entonces

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^3 + (-3)^2 - 4(-3) - 4 \\ &= -27 + 9 + 12 - 4 = -10. \end{aligned}$$

Siendo negativo $f(-3) = -10$, $f(x)$ es negativo en el intervalo $(-\infty, -2)$.

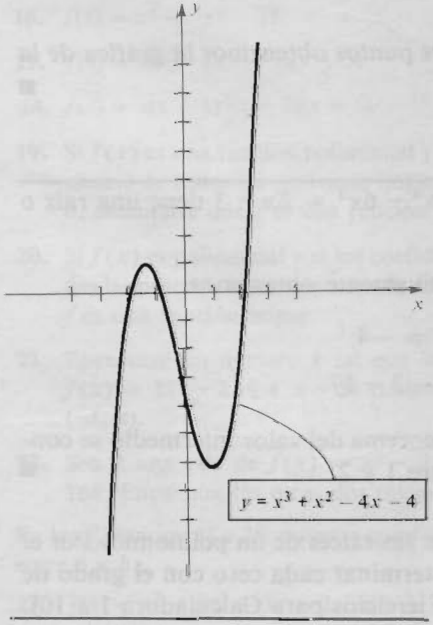
Si escogemos $-\frac{3}{2}$ en el intervalo $(-2, -1)$, la correspondiente prueba de signo es

$$\begin{aligned} f(-\tfrac{3}{2}) &= (-\tfrac{3}{2})^3 + (-\tfrac{3}{2})^2 - 4(-\tfrac{3}{2}) - 4 \\ &= -\tfrac{27}{8} + \tfrac{9}{4} + 6 - 4 = \tfrac{7}{8}. \end{aligned}$$

Como $f(-\frac{3}{2}) = \frac{7}{8}$ es positivo, $f(x)$ es positivo en el intervalo $(-2, -1)$. En la siguiente tabla se resume esta información y se dan pruebas de signo adecuadas para los dos intervalos restantes.

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
Prueba del signo	$f(-3) = -10$	$f(-\frac{3}{2}) = \frac{7}{8}$	$f(0) = -4$	$f(3) = 20$
Signo de $f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Posición de la gráfica	Por debajo del eje x	Por encima del eje x	Por debajo del eje x	Por encima del eje x

FIGURA 4.12



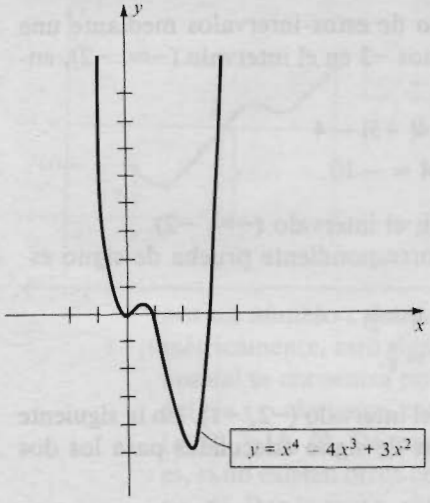
Si usamos esta información, así como la representación de varios puntos, obtenemos la gráfica de la Figura 4.12. Para localizar los puntos máximos y mínimos se requiere el uso de métodos desarrollados en cálculo. ■

La gráfica de toda función polinomial de grado 3 tiene la forma de una S, semejante a la que aparece en la Figura 4.12. O, si el coeficiente de x^3 es negativo, tiene una versión invertida de la gráfica. Sin embargo, a veces la gráfica puede tener sólo una intercepción x, o la forma en S puede ser alargada, como en la Figura 4.7.

EJEMPLO 3 Sea $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$. Determinar todos los valores de x tales que $f(x) > 0$, y todas las x tales que $f(x) < 0$. Trazar la gráfica de f.

SOLUCIÓN Se seguirán los mismos pasos que se emplea-

FIGURA 4.13



ron en la solución del Ejemplo 2. Por consiguiente, empezamos por factorizar $f(x)$, obteniendo:

$$f(x) = x^2(x^2 - 4x + 3)$$
$$= x^2(x - 1)(x - 3).$$

Las raíces o ceros de $f(x)$, esto es, las intersecciones de la gráfica con el eje x, son (en orden *ascendente*)

$$0, \quad 1, \quad \text{y} \quad 3.$$

Los puntos correspondientes al eje x en cuatro partes y se consideran los intervalos abiertos

$$(-\infty, 0), \quad (0, 1), \quad (1, 3), \quad (3, \infty).$$

Después se determina el signo de $f(x)$ en cada intervalo utilizando valores de prueba adecuados. La siguiente tabla muestra un resumen de los resultados. El lector debe verificar cuidadosamente todos los resultados.

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
Prueba del signo	$f(-1) = 8$	$f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$	$f(2) = -4$	$f(4) = 48$
Signo de $f(x)$	+	+	−	+
Posición de la gráfica	Por encima del eje x	Por encima del eje x	Por debajo del eje x	Por encima del eje x

Con esta información y la representación de varios puntos obtenemos la gráfica de la Figura 4.13. ■

EJEMPLO 4 Demostrar que $f(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 2x - 3$ tiene una raíz o cero entre 1 y 2.

SOLUCIÓN Reemplazando x por 1 y 2 respectivamente obtenemos

$$f(1) = 1 + 2 - 6 + 2 - 3 = -4$$
$$f(2) = 32 + 32 - 48 + 4 - 3 = 17.$$

Como $f(1)$ y $f(2)$ tienen signos contrarios, por el teorema del valor intermedio se concluye que $f(c) = 0$ para algún número real c entre 1 y 2. ■

Este ejemplo muestra un método para localizar las raíces de un polinomio. Por el método de *aproximaciones sucesivas*, podemos determinar cada cero con el grado de exactitud que se desee (véanse, por ejemplo, los Ejercicios para Calculadora 1 a 10).

Ejercicios 4.2

1. Sea $f(x) = ax^3 + 2$. Trazar la gráfica de f para:

(a) $a = 2$ (b) $a = 4$

(c) $a = \frac{1}{4}$ (d) $a = -2$

2. Sea $f(x) = 2x^3 + c$. Trazar la gráfica de f para:

(a) $c = 2$ (b) $c = 4$

(c) $c = \frac{1}{4}$ (d) $c = -2$

En cada uno de los Ejercicios 3 a 18, determine todos los valores de x tales que $f(x) > 0$, y todas las x tales que $f(x) < 0$. Trazar la gráfica de f.

3. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4$

4. $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - 16$

5. $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + 2$

6. $f(x) = 1 - x^5$

7. $f(x) = x^3 - 9x$

8. $f(x) = 16x - x^3$

9. $f(x) = -x^3 - x^2 + 2x$

10. $f(x) = x^3 + x^2 - .12x$

11. $f(x) = (x + 4)(x - 1)(x - 5)$

12. $f(x) = (x + 2)(x - 3)(x - 4)$

13. $f(x) = x^4 - 16$

14. $f(x) = 16 - x^4$

15. $f(x) = -x^4 - 3x^2 + 4$

16. $f(x) = x^4 - 7x^2 - 18$

17. $f(x) = x(x - 2)(x + 1)(x + 3)$

18. $f(x) = x(x + 1)^2(x - 3)(x - 5)$

19. Si $f(x)$ es una función polinomial y si los coeficientes de todas las potencias impares de x son 0, demuestre que f es una función par.

20. Si $f(x)$ es polinomial y si los coeficientes de todas las potencias pares de x son 0, demuestre que f es una función impar.

21. Encuentre un número k tal que la gráfica de $f(x) = 3x^3 - kx^2 + x - 5k$ contenga al punto $(-1, 4)$.

22. Sea 2 una raíz de $f(x) = x^3 - 2x^2 - 16x + 16k$. Encuentre las otras dos raíces.

En los Ejercicios 23 a 28, muestre que f tiene un cero entre a y b.

23. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$; $a = 3$, $b = 4$

24. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3$; $a = -3$, $b = -2$

25. $f(x) = -x^4 + 3x^3 - 2x + 1$; $a = 2$, $b = 3$

26. $f(x) = 2x^4 + 3x - 2$; $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4}$

27. $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$; $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$

28. $f(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 9x - 6$; $a = 3$, $b = 4$

29. El polinomio de Legendre de tercer grado aparece en la solución de problemas de transferencia de calor en física e ingeniería. Trace la gráfica de P después de encontrar en dónde $P(x) > 0$ y $P(x) < 0$.

$$P(x) = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

30. El polinomio de Chebyshev de cuarto grado aparece en los estudios de estadística. Encuentre dónde es $f(x) > 0$. (*Sugerencia:* Haga $z = x^2$ y use la Fórmula Cuadrática.)

$$f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

31. Se va a construir una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón cuyas dimensiones son 20 × 30 pulgadas, cortando en cada esquina cuadrados idénticos de área x^2 y doblando hacia arriba los lados (véase el Ejercicio 37 de la Sección 3.3). Demuestre que el volumen de la caja está dado por el polinomio de tercer grado

$$V(x) = x(20 - 2x)(30 - 2x).$$

¿Para qué valores positivos de x es $V(x) > 0$? Trace la gráfica de V para $x > 0$.

32. Se va a construir la armazón de una caja para mudanzas con 24 pies de listones de madera de 2 × 2 pulgadas.

(a) Si la caja tendrá extremos cuadrados de lado igual a x pies, exprese el volumen V del cajón como función de x. (Véase la figura.)

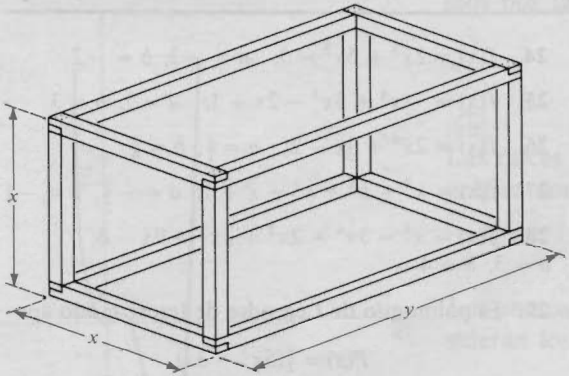
(b) Trace la gráfica de V para $x > 0$.

33. Un meteorólogo halló que la temperatura T (en °F) en un cierto día frío de invierno estaba dada por

$$T = 0.05t(t - 12)(t - 24)$$

en la que t es el tiempo (en horas) y $t = 0$ corresponde a las 6 A.M.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 32



(a) ¿A qué hora era $T > 0$ y a qué hora era $T < 0$? Trace una gráfica que muestre a la temperatura T para $0 \le t \le 24$.
(b) Muestre que la temperatura era de 32°F a alguna hora entre las 12 del mediodía y la 1 P.M. (*Sugerencia:* Use el teorema del valor intermedio.)

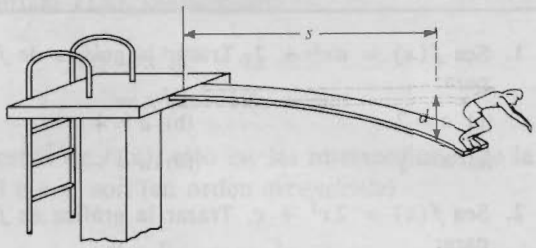
34. Un clavadista se para en la orilla de un trampolín antes de un clavado. Se sabe que la deflexión d del trampolín en la posición a s pies desde el extremo fijo, está dada por el polinomio de tercer grado

$$d = cs^2(3L - s) \quad \text{para} \quad 0 \le s \le L,$$

en la que L es la longitud del trampolín y c es una constante positiva que depende del peso del clavadista y de las propiedades físicas del trampolín (véase la figura). Suponga que el trampolín tiene 10 pie de longitud.

(a) Si la deflexión en el extremo libre es de 1 pie, calcule c.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 34



(b) Muestre que la deflexión es de $\frac{1}{2}$ pie en algún punto entre $s = 6.5$ y $s = 6.6$.

35. En una isla pequeña se introdujo un hato de 100 venados. Al principio, la manada empezó a crecer rápidamente, pero, después de un tiempo, los recursos de la isla empezaron a escasear y la población decreció. Suponga que el número de venados $N(t)$ a los t años está dado por

$$N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100.$$

(a) Determine los valores positivos de t para los cuales $N(t) > 0$. ¿Se extingue la población? Si es así, ¿cuándo ocurre eso?
(b) Trace la gráfica de N para $t > 0$.

36. Mediante el cálculo puede demostrarse que la rapidez R a la que crece (o decrece) la población de venados del Ejercicio 35 en el tiempo t está dada por

$$R = -4t^3 + 42t \text{ (venados por año)}$$

(a) ¿Cuándo deja de crecer la población?
(b) Calcule los valores positivos de t para los que $R > 0$.

Ejercicios para Calculadora 4.2

Si la raíz o cero de un polinomio se encuentra entre dos enteros, entonces se puede determinar el valor aproximado de la raíz con cualquier grado de exactitud si se emplea un método de *aproximaciones sucesivas*. Este método se ilustra en el Ejercicio 1.

1. Sea $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
(a) Muestre que f tiene una raíz entre 1 y 2.
(b) Incrementando los valores de x de 0.10 en 0.10, compruebe que f tiene una raíz entre 1.5 y 1.6.
(c) Compruebe, mediante incrementos centesimales del valor de x, que f tiene una raíz entre 1.53 y 1.54.

En el inciso (c) del Ejercicio 1, se dice que una raíz de $x^3 - 3x + 1$ ha sido *separada entre centésimas sucesivas* en el intervalo [1, 2]. En los Ejercicios 2 a 6,

separe entre centésimos sucesivos una raíz de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

2. $f(x) = x^3 + 5x - 3$; $a = 0$, $b = 1$
3. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 1$; $a = 2$, $b = 3$
4. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 8x + 2$; $a = 3$, $b = 4$
5. $f(x) = x^5 - 2x^2 + 4$; $a = -2$, $b = -1$
6. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 10x - 25$; $a = 2$, $b = 3$

En los Ejercicios 7 a 10, separe entre milésimos sucesivos una raíz de $f(x)$ en el intervalo de $[a, b]$.

7. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 1$; $a = 1$, $b = 2$
8. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 2x - 5$; $a = 2$, $b = 3$
9. $f(x) = x^5 + x^2 - 9x - 3$; $a = -2$, $b = -1$
10. $f(x) = x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 + 6x - 2$; $a = -4$, $b = -3$

4.3 Propiedades de la división

En la discusión siguiente se usarán los símbolos $f(x)$ y $g(x)$ para representar los polinomios en x. Si un polinomio $g(x)$ es un factor de un polinomio $f(x)$, se dice entonces que $f(x)$ es **divisible** entre $g(x)$. Por ejemplo, el polinomio $x^4 - 16$ es divisible entre $x^2 - 4$, entre $x^2 + 4$, entre $x + 2$, y entre $x - 2$, pero $x^2 + 3x + 1$ no es un factor de $x^4 - 16$. Sin embargo, mediante la *división larga* se puede escribir

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 + 3x + 1 & x^2 - 3x + 8 \\
\hline
 & x^4 \qquad\qquad\quad -16 \\
 & x^4 + 3x^3 + x^2 \\
\hline
 & \quad -3x^3 - x^2 \\
 & \quad -3x^3 - 9x^2 - 3x \\
\hline
 & \qquad\quad 8x^2 + 3x - 16 \\
 & \qquad\quad 8x^2 + 24x + 8 \\
\hline
 & \qquad\quad -21x - 24
\end{array}
$$

El polinomio $x^2 - 3x + 8$ es el **cociente** y $-21x - 24$ es el **residuo**.

Nótese que el procedimiento de la división larga termina en cuanto se llega a un polinomio (el residual) que es 0 o su grado es menor en 1 que el del divisor. El resultado de esta división se puede expresar como

$$\frac{x^4 - 16}{x^2 + 3x + 1} = (x^2 - 3x + 8) + \left(\frac{-21x - 24}{x^2 + 3x + 1}\right).$$

y al multiplicar por $x^2 + 3x + 1$ en ambos miembros,

$$x^4 - 16 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 3x + 8) + (-21x - 24).$$

Este ejemplo ilustra el teorema que enunciamos (sin demostración) a continuación.

ALGORITMO DE LA DIVISIÓN PARA POLINOMIOS

Si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios y si $g(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

en donde $r(x) = 0$ o bien el grado de $r(x)$ es menor que el de $g(x)$. El polinomio $q(x)$ se llama **cociente** y $r(x)$ se llama **residuo** de la división de $f(x)$ entre $g(x)$.

Un caso especial interesante ocurre cuando se divide $f(x)$ entre un polinomio lineal de la forma $x - c$, en donde c es un número real. Si $x - c$ es un factor de $f(x)$, entonces

$$f(x) = (x - c)q(x)$$

para algún polinomio $q(x)$; es decir, el residuo $r(x)$ es 0. Si $x - c$ no es un factor de $f(x)$, entonces el grado del residuo $r(x)$ es menor que el grado del divisor $x - c$, y por lo tanto $r(x)$ debe ser de grado 0. Esto significa que el residuo es un número real distinto de cero. Por consiguiente, para cualquier caso tenemos

$$f(x) = (x - c)q(x) + d$$

en donde d es un número real (posiblemente $d = 0$). Si en $f(x) = (x - c)q(x) + d$ sustituimos x por c, obtenemos

$$f(c) = (c - c)q(c) + d,$$

que se reduce a $f(c) = d$. Con esto queda demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA DEL RESIDUO (O RESTO)

Si un polinomio $f(x)$ es divisible entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$. Utilizar el teorema del residuo para determinar $f(2)$.

SOLUCIÓN Según el teorema del residuo, $f(2)$ es el residuo cuando se divide $f(x)$ entre $x - 2$. Si efectuamos la división usual, obtenemos

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x - 1 \\ \hline x - 2 & x^3 - 3x^2 + x + 5 \\ & \underline{x^3 - 2x^2} \\ & \quad -x^2 + x \\ & \quad \underline{-x^2 + 2x} \\ & \qquad -x + 5 \\ & \qquad \underline{-x + 2} \\ & \qquad\quad 3 \end{array}$$

y por lo tanto, $f(2) = 3$. Para comprobar sustituimos directamente: $f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 2 + 5 = 3$. ■

TEOREMA DEL FACTOR

Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x - c$ si y sólo si $f(c) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Por el teorema del residuo, $f(x) = (x - c)q(x) + f(c)$ para algún cociente $q(x)$. Si $f(c) = 0$, entonces $f(x) = (x - c)\,q(x)$; esto es, $x - c$ es un factor de $f(x)$. Recíprocamente, si $x - c$ es un factor del polinomio entonces el residuo resultante al dividir $f(x)$ por $x - c$ debe ser 0, y por lo tanto, por el teorema del residuo, debe ser $f(c) = 0$. □

Como se muestra en el siguiente ejemplo, el teorema anterior se puede utilizar para encontrar los factores de un polinomio.

EJEMPLO 2 Demostrar que $x - 2$ es un factor del polinomio

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2.$$

SOLUCIÓN Como $f(2) = 8 - 16 + 6 + 2 = 0$, se concluye que $x - 2$ es un factor de $f(x)$. Otro método de solución hubiera sido dividir $f(x)$ entre $x - 2$ y demostrar que el residuo es cero. El cociente de esta división será otro factor de $f(x)$. ■

EJEMPLO 3 Obtener un polinomio $f(x)$ de tercer grado cuyas raíces o ceros sean 2, −1 y 3.

SOLUCIÓN Por el teorema anterior, $f(x)$ tiene los factores $x - 2$, $x + 1$ y $x - 3$. Entonces,

$$f(x) = a(x - 2)(x + 1)(x - 3)$$

en donde a puede tomar cualquier valor distinto de cero. Si $a = 1$, al multiplicar obtenemos

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6.$$ ■

Para aplicar el Teorema del Residuo es necesario dividir entre $x - c$ al polinomio dado. Para simplificar el trabajo se puede emplear un método conocido como **división abreviada** o **sintética**. Las siguientes reglas indican cómo proceden. El método puede justificarse haciendo una comparación cuidadosa (y larga) con el método de la división usual.

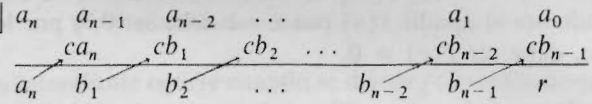
División sintética de $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ entre $x - c$

1. Se comienza con el esquema siguiente, poniendo ceros en los lugares del polinomio dado en los que no hay coeficientes:

$$\begin{array}{c|cccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline & a_n & & & & & \end{array}$$

2. Multiplíquese a_n por c y colóquese el producto ca_n debajo de a_{n-1} como lo indica la flecha en el esquema siguiente. (Esta flecha, y las otras, se usan solamente para

ayudar a hacer más claras estas reglas.) Enseguida se efectúa la suma $b = a_{n-1} + ca_n$ y se coloca abajo de la línea, como se muestra.



3. Multiplíquese b_1 por c y colóquese el producto cb_1 abajo de a_{n-2} como se indica con otra flecha. Después se obtiene la suma $b_2 = a_{n-2} + cb_1$ y se escribe abajo de la línea, como se muestra.

4. Se continúa este procedimiento, como lo indican las flechas, hasta encontrar la suma final $r = a_0 + cb_{n-1}$. Los números

$$a_n,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{n-2},\ b_{n-1}$$

son los coeficientes del cociente $q(x)$; esto es,

$$q(x) = a_n x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1},$$

y r es el residuo. ■■■

Los siguientes ejemplos ilustran la división sintética para algunos casos especiales.

EJEMPLO 4 Aplicar la división sintética para obtener el cociente y el residuo cuando se divide $2x^4 - 5x^3 - 2x - 8$ entre $x + 3$.

SOLUCIÓN Como vamos a dividir entre $x + 3$, la c de la expresión $x - c$ es -3. Por lo tanto, la división sintética toma la forma siguiente:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 2 & 5 & 0 & -2 & -8 \\ & & -6 & 3 & -9 & 33 \\ \hline & 2 & -1 & 3 & -11 & 25 \end{array}$$

Los primeros cuatro números del tercer renglón son los coeficientes del cociente $q(x)$ y el último número es el residuo r. Por lo tanto,

$$q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 11 \quad \text{y} \quad r = 25. \qquad \blacksquare$$

La división sintética puede usarse para encontrar valores de funciones polinomiales como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Sea $f(x) = 3x^5 - 38x^3 + 5x^2 - 1$. Use la división sintética para encontrar $f(4)$.

SOLUCIÓN Por el teorema del residuo, $f(4)$ es el residuo cuando se divide $f(x)$ entre $x - 4$. Haciendo la división sintética, obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 4 & 3 & 0 & -38 & 5 & 0 & -1 \\ & & 12 & 48 & 40 & 180 & 720 \\ \hline & 3 & 12 & 10 & 45 & 180 & 719 \end{array}$$

Por lo tanto, $f(4) = 719$. ■

La división sintética puede servir para encontrar raíces o ceros de polinomios. Por el método ilustrado en el ejemplo anterior, $f(c) = 0$ si y sólo si es 0 el residuo de la división sintética entre $x - c$.

EJEMPLO 6 Comprobar que -11 es una raíz del polinomio

$$f(x) = x^3 + 8x^2 - 29x + 44.$$

SOLUCIÓN Al realizar la división sintética entre $x + 11$ obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrr} -11 & 1 & 8 & -29 & 44 \\ & & -11 & 33 & -44 \\ \hline & 1 & -3 & 4 & 0 \end{array}$$

Así que, $f(-11) = 0$. ■

El Ejemplo 6 muestra que -11 es una solución de la ecuación $x^3 + 8x^2 - 29x + 44 = 0$. En la Sección 4.5 usaremos la división sintética para encontrar soluciones racionales de ecuaciones.

Ejercicios 4.3

En los Ejercicios 1 a 6, encuentre el cociente $q(x)$ y el residuo $r(x)$ de la división de $f(x)$ por $g(x)$.

1. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 5,\ g(x) = x^2 + 2x - 4$
2. $f(x) = 4x^3 - x^2 + x - 3,\ g(x) = x^2 - 5x$
3. $f(x) = 5x^3 - 2x,\ g(x) = 2x^2 + 1$
4. $f(x) = 3x^4 - x^3 - x^2 + 3x + 4,$ $g(x) = 2x^3 - x + 4$
5. $f(x) = 7x^3 - 5x + 2,\ g(x) = 2x^4 - 3x^2 + 9$
6. $f(x) = 10x - 4,\ g(x) = 8x^2 - 5x + 17$

En cada uno de los Ejercicios 7 a 16, use la división sintética para encontrar el cociente y el residuo cuando se divide el primer polinomio entre el segundo.

7. $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5,\ x - 2$
8. $3x^3 - 4x^2 - x + 8,\ x + 4$
9. $x^3 - 8x - 5,\ x + 3$
10. $5x^3 - 6x^2 + 15,\ x - 4$
11. $3x^5 + 6x^2 + 7,\ x + 2$
12. $-2x^4 + 10x - 3,\ x - 3$
13. $4x^4 - 5x^2 + 1,\ x - \frac{1}{2}$
14. $9x^3 - 6x^2 + 3x - 4,\ x - \frac{1}{3}$
15. $x^n - 1,\ x - 1$ en donde n es cualquier entero positivo.
16. $x^n + 1,\ x + 1$ en donde n es cualquier entero positivo.

En los Ejercicios 17 a 28, utilice el teorema del residuo para encontrar $f(c)$.

17. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3,\ c = 4$
18. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 7x + 10,\ c = 3$

19. $f(x) = x^4 + 5x^3 - x^2 + 5,\ c = -2$

20. $f(x) = x^4 - 7x^2 + 2x - 8,\ c = -3$

21. $f(x) = x^6 - 3x^4 + 4,\ c = \sqrt{2}$

22. $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1,\ c = -1$

23. $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 3x - 5,\ c = 2$

24. $f(x) = 0.3x^3 + 0.04x - 0.034,\ c = -0.2$

25. $f(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1,\ c = 4$

26. $f(x) = 8x^5 - 3x^2 + 7,\ c = \frac{1}{2}$

27. $f(x) = x^2 + 3x - 5,\ c = 2 + \sqrt{3}$

28. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 8,\ c = 1 + \sqrt{2}$

En cada uno de los Ejercicios 29 a 32, use la división sintética para comprobar que c es una raíz de $f(x)$.

29. $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 10x + 4,\ c = -2$

30. $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 8x - 3,\ c = 3$

31. $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 8x - 3,\ c = \frac{1}{2}$

32. $f(x) = 27x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 6x + 1,\ c = -\frac{1}{3}$

33. Determine el valor de k tal que $f(x) = x^3 + kx^2 - kx + 10$ sea divisible entre $x + 3$.

34. Determine todos los valores de k tales que $f(x) = k^2x^3 - 4kx - 3$ sea divisible entre $x - 1$.

35. Utilice el teorema del factor para mostrar que $x - 2$ es un factor de $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x + 6$.

36. Compruebe que $x + 2$ es un factor de $f(x) = x^{12} - 4096$.

37. Demuestre que $f(x) = 3x^4 + x^2 + 5$ no tiene factores de la forma $x - c$ donde c es un número real.

38. Encuentre el resto cuando el polinomio $3x^{100} + 5x^{85} - 4x^{38} + 2x^{17} - 6$ se divide entre $x + 1$.

39. Use el teorema del factor para probar que $x - y$ es un factor de $x^n - y^n$, para cualquier entero positivo n. Muestre que cuando n es par, también $x + y$ es un factor de $x^n - y^n$.

40. Demuestre que cuando n es un entero impar, $x + y$ es un factor de $x^n + y^n$.

4.4 Raíces (o ceros) de un polinomio

El Teorema del Factor y el Teorema del Residuo se pueden extender al sistema de los números complejos. De esta manera, un número complejo $c = a + bi$ es una raíz o cero de un polinomio $f(x)$; es decir, $f(c) = 0$ si y sólo si $x - c$ es un factor de $f(x)$. A excepción de casos especiales, resulta muy difícil encontrar las raíces de un polinomio. Por ejemplo, no son evidentes las raíces del polinomio $f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 4x - 10$. Más aún, no existe una fórmula que pueda usarse para encontrar las raíces. A pesar de la dificultad práctica para determinar las raíces de un polinomio, se puede avanzar en la *teoría* de tales raíces. Los resultados de esta sección sientan una base para el desarrollo de lo que se conoce como *Teoría de Ecuaciones*.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Si un polinomio $f(x)$ tiene grado positivo y coeficientes complejos, entonces $f(x)$ tiene al menos una raíz compleja.

La comprobación habitual de este teorema demanda resultados del campo de las matemáticas llamado *funciones de variable compleja*. A su vez, un requisito para estudiar este campo es un conocimiento a fondo del cálculo. La primera demostración del Teorema Fundamental del Álgebra fue proporcionada por el matemático alemán Carl

Friedrich Gauss (1777-1855), quien es considerado por muchos el más grande matemático de todos los tiempos.

Como un caso especial del Teorema Fundamental, si todos los coeficientes de $f(x)$ son reales, entonces $f(x)$ tiene por lo menos una raíz compleja. Si $a + bi$ es una raíz compleja, puede suceder que $b = 0$, en cuyo caso nos referimos al número como **raíz real**. Si el Teorema Fundamental se combina con el Teorema del Factor, obtenemos el siguiente útil corolario.

COROLARIO

Todo polinomio de grado positivo tiene un factor de la forma $x - c$, en donde c es un número complejo.

El corolario nos permite, por lo menos en teoría, expresar todo polinomio $f(x)$ de grado positivo como un producto de polinomios de grado 1. Si $f(x)$ tiene grado $n > 0$, aplicando el corolario obtenemos

$$f(x) = (x - c_1)f_1(x)$$

en donde c_1 es un número complejo y $f_1(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$. Si $n - 1 > 0$, es posible aplicar nuevamente el corolario, obteniendo

$$f_1(x) = (x - c_2)f_2(x)$$

en donde c_2 es un número complejo y $f_2(x)$ es un polinomio de grado $n - 2$. En consecuencia,

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)f_2(x).$$

Continuando este proceso, después de n pasos obtenemos un polinomio $f_n(x)$ de grado 0. De modo que $f_n(x) = a$ para algún número distinto de cero a, y podemos escribir

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$$

en donde cada número complejo c_j es una raíz de $f(x)$. Evidentemente, el coeficiente principal del polinomio de la derecha en la última ecuación es a. Se comprende que a es el coeficiente principal de $f(x)$. Hemos comprobado el siguiente teorema.

TEOREMA

Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$, entonces existen n números complejos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$$

en donde a es el coeficiente principal de $f(x)$. Cada número c_j es una raíz de $f(x)$.

COROLARIO

Un polinomio de grado $n > 0$ tiene cuando mucho n raíces complejas diferentes.

DEMOSTRACIÓN Se dará una demostración indirecta. Supóngase que $f(x)$ tiene más de n raíces complejas. Elíjanse $n + 1$ de estos ceros y desígneselos como $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Puede emplearse c_j para obtener la factorización indicada en el teorema. Sustituyendo x por c y usando el hecho que $f(c) = 0$, obtenemos

$$0 = a(c - c_1)(c - c_2) \cdots (c - c_n).$$

Sin embargo, cada factor del lado derecho es diferente de cero porque $c \neq c_j$ para toda j. Como el producto de números distintos de cero no puede ser igual a cero, tenemos una contradicción. □

EJEMPLO 1 Obtener un polinomio $f(x)$ de grado 3 con raíces 2, -1 y 3, que valga 5 en $x = 1$.

SOLUCIÓN Por el teorema del factor $f(x)$ tiene como factores a $x - 2$, $x + 1$ y $x - 3$. No existen otros factores de grado 1 puesto que, por el teorema del factor, otro factor lineal produciría una cuarta raíz (o cero) de $f(x)$, lo cual violaría el último corolario. Por consiguiente, $f(x)$ es de la forma

$$f(x) = a(x - 2)(x + 1)(x - 3)$$

para algún número a. Si $f(x)$ vale 5 en $x = 1$, entonces $f(1) = 5$, es decir

$$a(1 - 2)(1 + 1)(1 - 3) = 5 \quad \text{o bien} \quad 4a = 5.$$

Por consiguiente, $a = \frac{5}{4}$ y

$$f(x) = \tfrac{5}{4}(x - 2)(x + 1)(x - 3).$$

Multiplicando los cuatro factores se obtiene

$$f(x) = \tfrac{5}{4}x^3 - 5x^2 + \tfrac{5}{4}x + \tfrac{15}{2}.$$ ■

Los números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ del teorema anterior no necesariamente son todos diferentes. Para ilustrar esto, el polinomio $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ se puede factorizar como

$$f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 1).$$

Si un factor $x - c$ aparece m veces en la factorización, entonces c se llama **raíz de multiplicidad** m de $f(x)$, o bien de la ecuación $f(x) = 0$. En la ilustración precedente, 1 es un cero o raíz de multiplicidad 2, y -3 es uno de multiplicidad 1.

Como otra ilustración, si

$$f(x) = (x - 2)(x - 4)^3(x + 1)^2,$$

entonces $f(x)$ tiene grado 6 y posee tres raíces 2, 4 y -1, en donde 2 es de multiplicidad 1; 4 es de multiplicidad 3, y -1 tiene multiplicidad 2.

Si $f(x)$ es un polinomio de grado n y $f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$, entonces los n números complejos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son raíces (o ceros) de $f(x)$. Si una raíz de multiplicidad m se considera como m raíces, esto indica que $f(x)$ tiene por lo menos

n raíces (no necesariamente todas diferentes). Combinando esto con el hecho de que $f(x)$ tiene cuando mucho n ceros o raíces, tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA

Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$, y si la raíz de multiplicidad m se considera m veces, entonces $f(x)$ tiene precisamente n raíces.

EJEMPLO 2 Expresar $f(x) = x^5 - 4x^4 + 13x^3$ como un producto de factores lineales, y enunciar cinco raíces de $f(x)$.

SOLUCIÓN Comenzamos escribiendo

$$f(x) = x^3(x^2 - 4x + 13).$$

Por la fórmula cuadrática, las raíces del polinomio $x^2 - 4x + 13$ son

$$\frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

En consecuencia, por el teorema del factor, $x^2 - 4x + 13$ tiene factores $x - (2 + 3i)$ y $x - (2 - 3i)$, y obtenemos así la factorización deseada

$$f(x) = x \cdot x \cdot x \cdot (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i).$$

Como $x - 0$ aparece como factor tres veces, el número cero es una raíz de multiplicidad tres, y las cinco raíces de $f(x)$ son $0, 0, 0, 2 + 3i$ y $2 - 3i$. ■

El siguiente teorema sirve para obtener información acerca de las raíces de un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales. El enunciado del teorema supone que los términos de $f(x)$ están ordenados en potencias decrecientes de x y que no aparecen los términos con coeficiente cero. También considera que el **término constante**, esto es, el término que no contiene a x, es diferente de cero. Decimos que hay una **variación de signo** en $f(x)$ si dos coeficientes consecutivos tienen signos opuestos. Por ejemplo, el polinomio

$$f(x) = 2x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 6x - 5$$

tiene tres variaciones de signo; la primera es de $2x^5$ a $-7x^4$, la segunda de $-7x^4$ a $3x^2$, y la tercera de $6x$ a -5.

En el teorema también se hace referencia a las variaciones de signo en $f(-x)$. En el ejemplo anterior, se puede notar que

$$f(-x) = 2(-x)^5 - 7(-x)^4 + 3(-x)^2 + 6(-x) - 5$$

$$= -2x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 6x - 5.$$

Por lo tanto, hay dos variaciones de signo en $f(-x)$, una de $-7x^4$ a $3x^2$, y la segunda de $3x^2$ a $-6x$.

REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

Si $f(x)$ es un polinomio con coeficientes reales y términos constantes diferentes de cero, entonces

(i) el número de soluciones reales positivas de la ecuación $f(x) = 0$ es igual al número de variaciones de signo de $f(x)$, o es igual a este número menos un entero par;

(ii) el número de soluciones reales negativas de la ecuación $f(x) = 0$ es igual al número de variaciones de signo de $f(-x)$, o es igual a este número menos un entero par.

La demostración de la regla de Descartes es más bien técnica y no se dará en este texto.

EJEMPLO 3 Determinar el número de posibles soluciones reales positivas y negativas de la ecuación.

$$2x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 6x - 5 = 0.$$

SOLUCIÓN El polinomio $f(x)$ en la parte izquierda de la ecuación es el mismo que se utilizó como ilustración antes del enunciado de la regla de Descartes. Como $f(x)$ tiene tres variaciones de signo, entonces la ecuación tiene tres soluciones reales positivas o una sola.

Como $f(-x) = -2x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 6x - 5$ tiene dos variaciones de signo, entonces la ecuación dada tiene dos soluciones reales negativas o ninguna. Las soluciones que no son números reales son complejos de la forma $a + bi$, en donde a y b son reales con $b \neq 0$. En la siguiente tabla se resumen las distintas posibilidades para las soluciones de la ecuación.

Número de soluciones reales positivas	1	1	3	3
Número de soluciones reales negativas	0	2	0	2
Número de soluciones no reales complejas	4	2	2	0
Número total de soluciones	5	5	5	5

■

La Regla de Descartes estipula que el término constante del polinomio sea diferente de cero. Si el término constante es nulo como en la ecuación

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x = 0,$$

se puede escribir

$$x(x^3 - 3x^2 + 2x - 5) = 0.$$

En este caso $x = 0$ es una solución y se puede aplicar la Regla de Descartes a $x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = 0$.

EJEMPLO 4 Discutir la naturaleza de las raíces de la ecuación

$$3x^5 + 4x^3 + 2x - 5 = 0.$$

SOLUCIÓN El polinomio $f(x)$ de la parte izquierda de la ecuación tiene una variación de signo; por lo tanto, por (i) de la regla de los signos de Descartes, existe exactamente una raíz real positiva. Como

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^5 + 4(-x)^3 + 2(-x) - 5 \\ &= -3x^5 - 4x^3 - 2x - 5, \end{aligned}$$

$f(-x)$ no tiene variaciones de signo y se concluye por (ii) de la regla de los signos de Descartes, que no hay raíces reales negativas. Entonces, la ecuación tiene una raíz real positiva y cuatro raíces complejas. ■

Cuando se aplica la regla de Descartes, las raíces de multiplicidad k se consideran como k raíces. Por ejemplo, dado que $x^2 - 2x + 1 = 0$, el polinomio $x^2 - 2x + 1$ tiene dos variaciones de signo; por lo tanto la ecuación tiene dos raíces reales positivas o ninguna. La ecuación en forma factorizada es $(x - 1)^2 = 0$, y entonces tiene la raíz 1 de multiplicidad 2.

Concluiremos esta sección con un estudio de las *cotas* de las soluciones reales de una ecuación $f(x) = 0$, en donde $f(x)$ es un polinomio con coeficientes reales. Por definición, un número real b es una **cota superior** de las soluciones, si ninguna solución es mayor que b. Un número real a es una **cota inferior** de las soluciones, si ninguna solución es menor que a. Por lo tanto, si r es una solución real de $f(x) = 0$, entonces $a \leq r \leq b$. Nótese que las cotas superior e inferior no son únicas, pues cualquier número mayor que b es también una cota superior, y cualquier número menor que a es una cota inferior.

Por medio de la división sintética podemos encontrar las cotas superior e inferior de las soluciones de $f(x) = 0$. Recuérdese que al hacer la división sintética de $f(x)$ entre $x - c$, en el tercer renglón del proceso de división aparecen los coeficientes del cociente $q(x)$ junto con el residuo $f(c)$. El siguiente teorema indica cómo se puede utilizar este tercer renglón para encontrar las cotas superior e inferior de las soluciones reales.

COTAS PARA LAS RAÍCES REALES DE UN POLINOMIO

Supongamos que $f(x)$ es un polinomio con coeficientes reales cuyo coeficiente principal es positivo y supongamos efectuada la división sintética de $f(x)$ entre $x - c$.

(i) Si $c > 0$, y si todos los números del tercer renglón del proceso de división son positivos o cero, entonces c es una cota superior de las soluciones reales de $f(x) = 0$.

(ii) Si $c < 0$, y si los números del tercer renglón del proceso de división son alternadamente positivos y negativos (donde se considerará que un 0 del tercer renglón es positivo o negativo), entonces c es una cota inferior de las soluciones de $f(x) = 0$.

Se puede generalizar la demostración de este teorema tomando como base la solución dada en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Hallar las cotas superior e inferior de las soluciones reales de la ecuación

$$2x^3 + 5x^2 - 8x - 7 = 0.$$

SOLUCIÓN Con la división sintética entre $x - 1$ y entre $x - 2$, obtenemos

$$\begin{array}{r|cccc} 1 & 2 & 5 & -8 & -7 \\ & & 2 & 7 & -1 \\ \hline & 2 & 7 & -1 & -8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|cccc} 2 & 2 & 5 & -8 & -7 \\ & & 4 & 18 & 20 \\ \hline & 2 & 9 & 10 & 13 \end{array}$$

Como todos los números del tercer renglón de la división sintética entre $x - 2$ son positivos, se concluye por (i) del teorema anterior que 2 es una cota superior de las soluciones de la ecuación dada. Este hecho se hace evidente si expresamos la división entre $x - 2$ en la forma del algoritmo de la división

$$2x^3 + 5x^2 - 8x - 7 = (x - 2)(2x^2 + 9x + 10) + 13.$$

Si $x > 2$, entonces obviamente la parte derecha de la ecuación es positiva, y por lo tanto es distinta de cero. En consecuencia, $2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$ es distinta de cero cuando $x > 2$.

Después de algunos intentos por ensayo y error usando $x - (-1)$ y $x - (-2)$, se halla que la división sintética entre $x - (-3)$ y $x - (-4)$ da

$$\begin{array}{r|cccc} -3 & 2 & 5 & -8 & -7 \\ & & -6 & 3 & 15 \\ \hline & 2 & -1 & -5 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|cccc} -4 & 2 & 5 & -8 & -7 \\ & & -8 & 12 & -16 \\ \hline & 2 & -3 & 4 & -23 \end{array}$$

Como los números del tercer renglón de la división sintética entre $x - (-4)$ son alternadamente positivos o negativos, se concluye por (ii) del teorema anterior que -4 es una cota inferior de las soluciones. Esto también se puede probar expresando la división entre $x + 4$ en la forma

$$2x^3 + 5x^2 - 8x - 7 = (x + 4)(2x^2 - 3x + 4) - 23.$$

Si $x < -4$, entonces la parte derecha de la ecuación es negativa (¿por qué?) y, por lo tanto, distinta de cero. Entonces, $2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$ es diferente de cero cuando $x < -4$.

Se sigue de esto, que todas las soluciones reales de la ecuación dada están en el intervalo $[-4, 2]$. ■

Ejercicios 4.4

En los Ejercicios 1 a 6 halle un polinomio $f(x)$ de grado 3 con las raíces indicadas y que satisfaga las condiciones dadas.

1. 5, -2, -3; $f(2) = 4$

2. 4, 1, -6; $f(5) = 2$

3. 2, 3, 1; $f(0) = 12$

4. $\sqrt{2}$, π, 0; $f(0) = 0$

5. $2 + i,\ 2 - i,\ -4;\quad f(1) = 3$

6. $1 + 2i,\ 1 - 2i,\ 5;\quad f(-2) = 1$

7. Halle un polinomio de cuarto grado tal que -2 y 3 sean raíces de multiplicidad 2.

8. Encuentre un polinomio de quinto grado tal que -2 sea una raíz de multiplicidad 3 y 4 una raíz de multiplicidad 2.

9. Obtenga un polinomio $f(x)$ de octavo grado tal que 2 sea una raíz de multiplicidad 3, y 0 una raíz de multiplicidad 5, y $f(3) = 54$.

10. Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 7 tal que 1 sea una raíz de multiplicidad 2, 0 una raíz de multiplicidad 3, y $f(2) = 36$.

En los Ejercicios 11 a 18 encuentre las raíces de los polinomios y establezca la multiplicidad de cada una.

11. $f(x) = (x + 4)^3(3x - 4)$

12. $f(x) = (x - 5)^2(4x + 7)^3$

13. $f(x) = 2x^5 - 8x^4 - 10x^3$

14. $f(x) = (4x^2 - 5)^2$

15. $f(x) = (9x^2 - 25)^4(x^2 + 16)$

16. $f(x) = (2x^2 + 13x - 7)^3$

17. $f(x) = (x^2 + x - 2)^2(x^2 - 4)$

18. $f(x) = 4x^6 + x^4$

19. Compruebe que -3 es una raíz de multiplicidad 2 del polinomio $f(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 - 3x - 18$ y exprese $f(x)$ como un producto de factores lineales.

20. Compruebe que 4 es una raíz de multiplicidad 2 del polinomio $f(x) = x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 32$ y exprese $f(x)$ como un producto de factores lineales.

21. Verifique que 1 es una raíz de multiplicidad 5 de $f(x) = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 5x^2 + 4x - 1$, y exprese $f(x)$ como producto de factores lineales.

22. Compruebe que -1 es una raíz de multiplicidad 4 de $f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$, y exprese $f(x)$ como producto de factores lineales.

En cada uno de los Ejercicios 23 a 30 determine por la regla de los signos de Descartes el número de soluciones positivas, negativas y complejos posibles de las ecuaciones dadas.

23. $4x^3 - 6x^2 + x - 3 = 0$

24. $5x^3 - 6x - 4 = 0$

25. $4x^3 + 2x^2 + 1 = 0$

26. $3x^3 - 4x^2 + 3x + 7 = 0$

27. $3x^4 + 2x^3 - 4x + 2 = 0$

28. $2x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 4 = 0$

29. $x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 4x + 2 = 0$

30. $2x^6 + 5x^5 + 2x^2 - 3x + 4 = 0$

En cada uno de los Ejercicios 31 a 36 encuentre los enteros mayor y menor que son las cotas superior e inferior, respectivamente, de las soluciones reales de las ecuaciones dadas.

31. $x^3 - 4x^2 - 5x + 7 = 0$

32. $2x^3 - 5x^2 + 4x - 8 = 0$

33. $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x + 6 = 0$

34. $2x^4 - 9x^3 - 8x - 10 = 0$

35. $2x^5 - 13x^3 + 2x - 5 = 0$

36. $3x^5 + 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 7 = 0$

37. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios de grado no mayor que n, en donde n es un entero positivo. Demuestre que si $f(x)$ y $g(x)$ tienen igual valor para más de n valores reales distintos de x, entonces $f(x)$ y $g(x)$ son idénticos, esto es, los coeficientes de potencias iguales son los mismos. (*Sugerencia:* Escriba

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

y considere

$$h(x) = f(x) - g(x) = (a_n - b_n)x^n + \cdots + (a_0 - b_0).$$

Muestre luego que $h(x)$ tiene más de n raíces reales distintas y concluya que $a_j = b_j$ para todo j.)

4.5 Raíces complejas y racionales

El Ejemplo 2 de la sección anterior ilustra un hecho interesante concerniente a polinomios con coeficientes reales. Las dos raíces complejas $2 + 3i$ y $2 - 3i$ de $x^5 - 4x^4 + 13x^3$ son conjugadas entre sí. Esta relación no es accidental ya que se verifica el siguiente resultado general.

TEOREMA Si un polinomio $f(x)$ de grado $n > 0$ tiene coeficientes reales, y si z es una raíz compleja de $f(x)$, entonces la conjugada $\bar{z}$ es también una raíz de $f(x)$.

DEMOSTRACIÓN Podemos escribir

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

en donde cada coeficiente a_k es un número real y $a_n \neq 0$. Si $f(z) = 0$, entonces

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Si dos números complejos son iguales, también lo serán sus conjugados. En consecuencia, el conjugado del lado izquierdo de la última ecuación es igual al conjugado del lado derecho; esto es,

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \bar{0} = 0$$

en donde el hecho que $\bar{0} = 0$ deriva de $\bar{0} = \overline{0 + 0i} = 0 - 0i = 0$.

No es difícil demostrar que si z y w son números complejos, entonces $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$. Más generalmente, el conjugado de *cualquier* suma de complejos es la suma de los conjugados. En consecuencia,

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0.$$

También se puede demostrar que si z y w son números complejos, entonces $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ para todo entero positivo n, y $\bar{z} = z$ si y sólo si z es real. (Véase el Ejercicio 49 de la Sección 2.4). Así, para toda j y toda k,

$$\overline{a_j z^k} = \overline{a_j} \cdot \overline{z^k} = \overline{a_j} \cdot \bar{z}^k = a_j \bar{z}^k,$$

y por lo tanto,

$$a_n \bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0.$$

La última ecuación establece que $f(\bar{z}) = 0$, lo cual completa la demostración. □

EJEMPLO 1 Hallar un polinomio $f(x)$ de grado 4 que tenga coeficientes reales y raíces $2 + i$ y $-3i$.

SOLUCIÓN Por el teorema anterior, $f(x)$ debe tener también raíces $2 - i$ y $3i$. Aplicando el teorema de factor, $f(x)$ tiene factores $x - (2 + i)$, $x - (2 - i)$, $x - (-3i)$ y $x - (3i)$. Multiplicando esos factores, obtenemos un polinomio del tipo requerido:

$$\begin{aligned} f(x) &= [x - (2 + i)][x - (2 - i)](x - 3i)(x + 3i) \\ &= (x^2 - 4x + 5)(x^2 + 9) \\ &= x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 36x + 45. \end{aligned}$$

■

Si un polinomio con coeficientes reales se factoriza como en la página , algunos de los factores $x - c_k$ podrían tener un coeficiente complejo c_k. Sin embargo, siempre es posible obtener una factorización en un polinomio con coeficientes reales, como se establece en el siguiente teorema.

TEOREMA

> Todo polinomio con coeficientes reales y grado positivo n puede ser expresado como un producto de polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales, en donde los factores cuadráticos no tienen raíces reales.

DEMOSTRACIÓN Como $f(x)$ tiene precisamente n raíces complejas $c_1, c_2, \ldots, c_n$, podemos escribir

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

en donde a es el coeficiente principal de $f(x)$. Por supuesto, algunas de las raíces pueden ser reales. En tales casos obtenemos los factores lineales referidos en el planteamiento del teorema. Si una raíz c_k no es real, entonces, por el teorema anterior, la conjugada $\overline{c_k}$ es también una raíz de $f(x)$ y, en consecuencia, debe ser uno de los números $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Esto implica que tanto $x - \overline{c_k}$ como $x - c_k$ aparezcan en la factorización de $f(x)$. Si estos factores se multiplican, obtenemos

$$(x - c_k)(x - \overline{c_k}) = x^2 - (c_k + \overline{c_k})x + c_k\overline{c_k},$$

que tiene coeficientes *reales*, ya que $c_k + \overline{c_k}$ y $c_k\overline{c_k}$ son números reales. (Véase la pág.). Por tanto, las raíces complejas de $f(x)$ y sus conjugadas originan los polinomios cuadráticos que son irreducibles sobre $\mathbb{R}$. Esto completa la demostración. □

EJEMPLO 2 Expresar $x^4 - 2x^2 - 3$ como un producto (a) de polinomios lineales, y (b) de polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales que son irreducibles sobre $\mathbb{R}$.

SOLUCIÓN

(a) Podemos encontrar las raíces del polinomio dado resolviendo la ecuación $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$, que puede ser considerada como cuadrática en x^2. Resolviendo con la fórmula cuadrática para evaluar x^2, obtenemos

$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}.$$

SOLUCIÓN Por el teorema anterior, $f(x)$ debe tener también raíces $2 - i$ y $3i$. Aplicando el teorema de factor, $f(x)$ tiene factores $x - (2 + i)$, $x - (2 - i)$, $x - (-3i)$ y $x - (3i)$. Multiplicando esos factores, obtenemos un polinomio del tipo requerido:

$$\begin{aligned} f(x) &= [x - (2 + i)][x - (2 - i)](x - 3i)(x + 3i) \\ &= (x^2 - 4x + 5)(x^2 + 9) \\ &= x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 36x + 45. \end{aligned}$$

■

Si un polinomio con coeficientes reales se factoriza como en la página , algunos de los factores $x - c_k$ podrían tener un coeficiente complejo c_k. Sin embargo, siempre es posible obtener una factorización en un polinomio con coeficientes reales, como se establece en el siguiente teorema.

TEOREMA

Todo polinomio con coeficientes reales y grado positivo n puede ser expresado como un producto de polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales, en donde los factores cuadráticos no tienen raíces reales.

DEMOSTRACIÓN Como $f(x)$ tiene precisamente n raíces complejas $c_1, c_2, \ldots, c_n$, podemos escribir

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

en donde a es el coeficiente principal de $f(x)$. Por supuesto, algunas de las raíces pueden ser reales. En tales casos obtenemos los factores lineales referidos en el planteamiento del teorema. Si una raíz c_k no es real, entonces, por el teorema anterior, la conjugada $\overline{c_k}$ es también una raíz de $f(x)$ y, en consecuencia, debe ser uno de los números $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Esto implica que tanto $x - \overline{c_k}$ como $x - c_k$ aparezcan en la factorización de $f(x)$. Si estos factores se multiplican, obtenemos

$$(x - c_k)(x - \overline{c_k}) = x^2 - (c_k + \overline{c_k})x + c_k\overline{c_k},$$

que tiene coeficientes *reales*, ya que $c_k + \overline{c_k}$ y $c_k\overline{c_k}$ son números reales. (Véase la pág.). Por tanto, las raíces complejas de $f(x)$ y sus conjugadas originan los polinomios cuadráticos que son irreducibles sobre $\mathbb{R}$. Esto completa la demostración. □

EJEMPLO 2 Expresar $x^4 - 2x^2 - 3$ como un producto (a) de polinomios lineales, y (b) de polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales que son irreducibles sobre $\mathbb{R}$.

SOLUCIÓN

(a) Podemos encontrar las raíces del polinomio dado resolviendo la ecuación $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$, que puede ser considerada como cuadrática en x^2. Resolviendo con la fórmula cuadrática para evaluar x^2, obtenemos

$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}.$$

Así, $x^2 = 3$ y $x^2 = -1$. En consecuencia, las raíces son $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, i y $-i$, y obtenemos la factorización

$$x^4 - 2x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - i)(x + i).$$

(b) Multiplicando los últimos dos factores en la factorización anterior,

$$x^4 - 2x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 1),$$

que es la forma establecida en el teorema anterior.

La solución a este ejemplo puede obtenerse también factorizando la expresión original sin buscar primero las raíces o ceros. De este modo,

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^2 - 3 &= (x^2 - 3)(x^2 + 1) \\ &= (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + i)(x - i). \end{aligned}$$

■

Ya hemos señalado que generalmente es difícil encontrar las raíces de un polinomio de grado alto; sin embargo, si todos los coeficientes son números enteros o racionales, existe un método para obtener las raíces *racionales*, cuando éstas existen. El método se deduce del siguiente teorema.

TEOREMA DE LAS RAÍCES RACIONALES

Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros. Si c/d es una raíz racional de $f(x)$, en donde c y d no tienen factores primos comunes y $c > 0$, entonces c es un factor de a_0 y d es un factor de a_n.

DEMOSTRACIÓN Probaremos que c es un factor de a_0. Si $c = 1$, el teorema queda demostrado, ya que 1 es factor de *cualquier* número. Si $c \neq 1$, $c/d \neq 1$, ya que si $c/d = 1$, tendríamos $c = d$, y como c y d no tienen ningún factor primo común, esto implica que $c = d = 1$, una contradicción. Por lo tanto, si tiene a continuación: $c \neq 1$ y $c \neq d$.

Como $f(c/d) = 0$, se tiene

$$a_n(c^n/d^n) + a_{n-1}(c^{n-1}/d^{n-1}) + \cdots + a_1(c/d) + a_0 = 0.$$

Si multiplicamos por d^n y sumamos $-a_0 d^n$ en ambos lados, obtenemos

$$a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1}d + \cdots + a_1 c d^{n-1} = -a_0 d^n$$

o bien

$$c(a_n c^{n-1} + a_{n-1}c^{n-2}d + \cdots + a_1 d^{n-1}) = -a_0 d^n.$$

Esto demuestra que c es un factor del entero $a_0 d^n$. Si descomponemos a c en sus factores primos, tales como $c = p_1 p_2 \cdots p_k$, entonces cada primo p_i es también factor de $a_0 d^n$. Sin embargo, por hipótesis, ninguno de los p_i es factor de d. Esto implica que cada p_i es un factor de a_0, esto es, c es un factor de a_0. Con un argumento similar se puede demostrar que d es un factor de a_n. □

En el siguiente ejemplo se ilustra la técnica que utiliza el teorema anterior para encontrar las soluciones racionales de ecuaciones con coeficientes enteros.

EJEMPLO 3 Hallar todas las soluciones racionales de la ecuación

$$3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8 = 0.$$

SOLUCIÓN El problema es equivalente a encontrar las raíces racionales del polinomio indicado. De acuerdo con el teorema anterior, si c/d es una raíz racional y $c > 0$, entonces c es un divisor de -8 y d es un divisor de 3. Por lo tanto los posibles valores de c son 1, 2, 4 y 8, y los posibles valores de d son ± 1 y ± 3. Por consiguiente, las raíces racionales estarán entre los números ± 1, ± 2, ± 4, ± 8, $\pm \frac{1}{3}$, $\pm \frac{2}{3}$, $\pm \frac{4}{3}$ y $\pm \frac{8}{3}$. Es necesario comprobar cuáles de estos números son raíces. Se recomienda emplear la división sintética. Se puede reducir el número de posibilidades si se determinan las cotas superior e inferior de las soluciones, sin embargo, no lo haremos en este caso. Encontramos que, después de muchos ensayos,

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 3 & 14 & 14 & -8 & -8 \\ & & -6 & -16 & 4 & 8 \\ \hline & 3 & 8 & -2 & -4 & 0 \end{array}$$

lo que demuestra que -2 es una raíz. Más aún, la división sintética proporciona los coeficientes del cociente en la división del polinomio entre $x + 2$. Por lo tanto, tenemos la siguiente factorización del polinomio dado:

$$(x + 2)(3x^3 + 8x^2 - 2x - 4).$$

Las restantes soluciones de la ecuación deben ser raíces del segundo factor, y por lo tanto, podemos usar el último polinomio para encontrar las soluciones. Haciendo la división sintética por $x + \frac{2}{3}$ obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{2}{3} & 3 & 8 & -2 & -4 \\ & & -2 & -4 & 4 \\ \hline & 3 & 6 & -6 & 0 \end{array}$$

y, por lo tanto, $-\frac{2}{3}$ es una raíz.

Las raíces restantes son soluciones de la ecuación $3x^2 + 6x - 6 = 0$, o equivalentemente, $x^2 + 2x - 2 = 0$. Por la fórmula cuadrática, esta ecuación tiene las soluciones

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-2)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}.$$

Por lo tanto, el polinomio dado tiene dos raíces racionales, -2 y $-\frac{2}{3}$, y dos irracionales, $-1 + \sqrt{3}$ y $-1 - \sqrt{3}$. ■

El teorema de las raíces racionales también se puede aplicar a ecuaciones con coeficientes racionales: Multiplicando ambos lados de la ecuación por el mínimo común de-

nominador de todos los coeficientes se obtiene una ecuación con coeficientes enteros, que se resuelve como en el Ejemplo 3.

EJEMPLO 4 Hallar todas las raíces racionales de la ecuación

$$\tfrac{2}{3}x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{5}{4}x^2 - x - \tfrac{1}{6} = 0.$$

SOLUCIÓN Multiplicando ambos lados de la ecuación por 12 obtenemos la ecuación equivalente

$$8x^4 + 6x^3 - 15x^2 - 12x - 2 = 0.$$

Si c/d es una solución racional, entonces las posibilidades para c son 1 y 2, y las posibilidades para d son ± 1, ± 2, ± 4 y ± 8. Entonces, las únicas raíces racionales posibles son ± 1, ± 2, $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{1}{4}$ y $\pm \frac{1}{8}$. Por tanteo tenemos

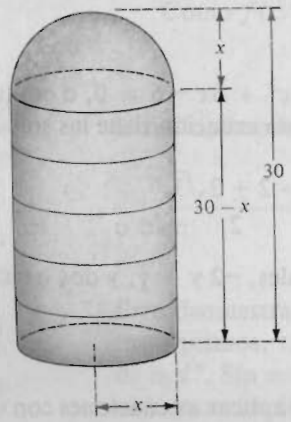
$$\begin{array}{r|rrrrr} -\frac{1}{2} & 8 & 6 & -15 & -12 & -2 \\ & & -4 & -1 & 8 & 2 \\ \hline & 8 & 2 & -16 & -4 & 0 \end{array}$$

Y por lo tanto $-\frac{1}{2}$ es una solución. Si usamos la división sintética con los coeficientes del cociente, resulta

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{4} & 8 & 2 & -16 & -4 \\ & & -2 & 0 & 4 \\ \hline & 8 & 0 & -16 & 0 \end{array}$$

Y por consiguiente, $-\frac{1}{4}$ es una solución. La última división sintética nos dio el cociente $8x^2 - 16$. Si igualamos a cero esta última expresión y resolvemos la ecuación obtenemos $x^2 = 2$, o bien $x = \pm\sqrt{2}$. La ecuación dada tiene las soluciones racionales $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{4}$, y las soluciones irracionales $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$. ■

FIGURA 4.14



EJEMPLO 5 La forma de silo para granos es la de un cilindro circular recto con una esfera unida en la parte superior. Si la altura total de la estructura es de 30 pie, ¿qué radio debe tener el cilindro para que el volumen total sea de $1\,008\pi$ pie^3?

SOLUCIÓN Se representa por x el radio del cilindro. En la Figura 4.14 se muestra un croquis del silo marcado adecuadamente. Puesto que el volumen del cilindro es $\pi x^2(30 - x)$ y el volumen de la semiesfera es $\frac{2}{3}\pi x^3$, se debe resolver la ecuación

$$\pi x^2(30 - x) + \tfrac{2}{3}\pi x^3 = 1008\pi.$$

De las siguientes ecuaciones, cada una es equivalente a la anterior:

$$3x^2(30 - x) + 2x^3 = 3024$$
$$90x^2 - 3x^3 + 2x^3 = 3024$$
$$90x^2 - x^3 = 3024$$
$$x^3 - 90x^2 + 3024 = 0$$

Para buscar las raíces racionales primero se factoriza 3024 en factores primos, obteniéndose $3024 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7$. De aquí se deduce que algunos de los factores positivos de 3024 son

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12, \ldots$$

Haciendo divisiones sintéticas se llega finalmente a

6	1	−90	0	3024
		6	−504	−3024
	1	−84	−504	0

De forma que 6 es una solución de la ecuación $x^3 - 90x^2 + 3024 = 0$, y el radio deseado es de 6 pie.

Las otras dos soluciones de la ecuación se pueden encontrar resolviendo $x^2 - 84x - 504 = 0$. No es difícil demostrar que ninguna de las dos soluciones de esta ecuación cuadrática satisface las condiciones del problema. ■

Esta sección no nos proporciona información práctica para la obtención de las raíces irracionales de polinomios. Los ejemplos que hemos expuesto no representan problemas típicos de aplicación. De hecho, es lo más común que un polinomio con coeficientes racionales *no* tenga raíces racionales. Un método general para aproximar raíces es el llamado Método de Newton que se estudia en cálculo. En la práctica, la aproximación de las soluciones irracionales de una ecuación se efectúa por computadora.

Ejercicios 4.5

En los Ejercicios 1 a 8 halle un polinomio con coeficientes reales que tenga la raíz (o las raíces) y el grado que se indican.

1. $4 + i$; grado 2
2. $3 - 3i$; grado 2
3. $4, 3 - 2i$; grado 3
4. $-2, 1 + 5i$; grado 3
5. $1 + 4i, 2 - i$; grado 4
6. $3, 0, 8 - 7i$; grado 4
7. $5i, 1 + i, 0$; grado 5
8. $i, 2i, 3i$; grado 6
9. ¿Existe un polinomio de grado 3 con coeficientes reales que tenga las raíces 1, −1 e i? Justifique su respuesta.
10. El número complejo i es una raíz del polinomio $f(x) = x^3 - ix^2 + 2ix + 2$; sin embargo, el conjugado $-i$ de i no es una raíz. ¿Por qué esto no contradice el primer teorema de esta sección?

En los Ejercicios 11 a 28 halle todas las soluciones de las ecuaciones dadas.

11. $x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0$

12. $x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$

13. $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = 0$

14. $12x^3 + 8x^2 - 3x - 2 = 0$

15. $x^4 + 3x^3 - 30x^2 - 6x + 56 = 0$

16. $3x^5 - 10x^4 - 6x^3 + 24x^2 + 11x - 6 = 0$

17. $2x^3 - 7x^2 - 10x + 24 = 0$

18. $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 = 0$

19. $6x^3 + 19x^2 + x - 6 = 0$

20. $6x^3 + 5x^2 - 17x - 6 = 0$

21. $8x^3 + 18x^2 + 45x + 27 = 0$

22. $3x^3 - x^2 + 11x - 20 = 0$

23. $x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x - 36 = 0$

24. $3x^4 + 16x^3 + 28x^2 + 31x + 30 = 0$

25. $9x^4 + 15x^3 - 20x^2 - 20x + 16 = 0$

26. $15x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 4x - 4 = 0$

27. $4x^5 + 12x^4 - 41x^3 - 99x^2 + 10x + 24 = 0$

28. $4x^5 + 24x^4 - 13x^3 - 174x^2 + 9x + 270 = 0$

Demuestre que las ecuaciones en los Ejercicios 29 a 36 no tienen raíces racionales.

29. $x^3 + 3x^2 - 4x + 6 = 0$

30. $3x^3 - 4x^2 + 7x + 5 = 0$

31. $x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2 = 0$

32. $2x^5 + 3x^3 + 7 = 0$

33. $3x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 8x - 10 = 0$

34. $2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 24x + 5 = 0$

35. $8x^4 + 16x^3 - 26x^2 - 12x + 15 = 0$

36. $5x^5 + 2x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x - 2 = 0$

37. Si n es un entero positivo, demuestre que un polinomio de grado n con coeficientes reales tiene por lo menos una raíz real.

38. Demuestre que el teorema de la página 198 no es necesariamente cierto si $f(x)$ tiene coeficientes complejos.

39. Complete la demostración del teorema de las raíces racionales demostrando que d es un factor de a_n.

40. Si un polinomio de la forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0.$$

en la que cada a_k es un entero, tiene una raíz racional r, demuestre que r es un entero y que es un factor de a_0.

41. Se elaborará una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón cuyas dimensiones son 20 × 30 pulg, cortando cuadrados, de área x^2, en cada esquina y doblando hacia arriba los lados. Demuestre que es posible hacer dos cajas que tengan volumen de 1 000 pulg^3. ¿Cuál de las dos cajas tiene la menor área superficial? (Compare con el Ejercicio 31 de la Sección 4.2.)

42. Un armazón para una caja de mudanza se construirá con 24 pie de madera de 2 × 2 pulg. Suponiendo que la caja debe tener extremos cuadrados de longitud x pies, halle el (los) valor(es) de x que darán un volumen de 4 pie^3. (Compare con el Ejercicio 32 de la Sección 4.2.)

43. Un meteorólogo encuentra que la temperatura T (en °F) en cierto día frío de invierno, está dada por $T = 0.05t(t - 12)(t - 24)$ para $0 \le t \le 24$, en donde t es el tiempo en horas y $t = 0$ corresponde a las 6 A.M. ¿A qué hora(s) del día la temperatura fue de 32°F? (Compare con el Ejercicio 33 de la Sección 4.2.)

44. A una isla pequeña se introdujo una manada de 100 venados. Suponiendo que el número de animales $N(t)$ después de t años está dado por $N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$ (para $t > 0$), encuentre cuándo excede de 180 el tamaño de la manada. (Compare con el Ejercicio 35 de la Sección 4.2.)

45. Un triángulo rectángulo tiene un área de 30 pie^2 y su hipotenusa es 1 pie más larga que uno de los otros lados.

(a) Si x representa la longitud de ese lado, demuestre que $2x^3 + x^2 - 3600 = 0$.

(b) Demuestre que la ecuación de la parte (a) tiene solamente una sola raíz positiva y que tal raíz es menor que 13.

(c) Halle las dimensiones del triángulo.

46. Se construirá un tanque de almacenamiento de gas propano con la forma de un cilindro circular recto de altura 10 pie, con una semiesfera unida a cada extremo. Determine el radio x que se necesita para que el volumen resultante sea de 27π pie^3. (Compare con el Ejemplo 5 de la Sección 3.3.)

47. Se desea construir una cubierta de almacenamiento cuya forma sea la de un cubo con techo en forma de prisma triangular (véase la figura). La longitud x de uno de los lados no se ha determinado aún.
    (a) Si la altura total de la estructura es de 6 pie, muestre que su volumen V está dado por $V = x^3 + \frac{1}{2}x^2(6 - x)$.
    (b) Determine la x que se necesita para que el volumen sea de 80 pie^3.

48. Una tienda de campaña de lona tiene la forma de una pirámide de base cuadrada. El soporte central es un poste de 8 pie de alto, como se ilustra en la figura. Encuentre la longitud x de un lado de la base que sea tal que la cantidad de lona requerida para los lados y la base sea 384 pie^2.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 47

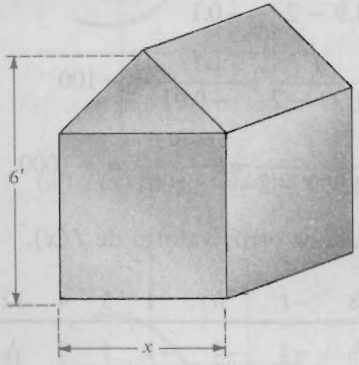
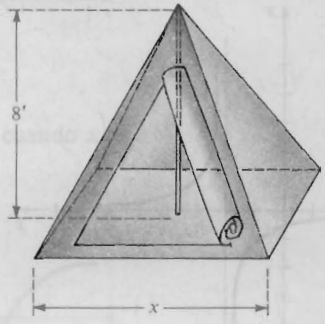


FIGURA PARA EL EJERCICIO 48



4.6 Funciones racionales

Una función f es una **función racional** si, para toda x en su dominio,

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

en donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios. Las raíces del numerador y del denominador son de mucha importancia. *En toda esta sección se supondrá que $g(x)$ y $h(x)$ no tienen factores comunes*, y por lo tanto, no tienen raíces comunes. Si $g(c) = 0$ entonces $f(c) = 0$. Sin embargo, si $h(c) = 0$, entonces $f(c)$ no está definida. El comportamiento de $f(x)$ requiere de especial atención cuando x está cerca de una raíz del denominador $h(x)$.

EJEMPLO 1 Trazar la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{1}{x - 2}.$$

SOLUCIÓN $f(x)$ no tiene raíces porque su numerador 1 nunca es igual a cero. Por consiguiente, la gráfica no corta al eje x.

Como el denominador $x - 2$ es cero en $x = 2$, y $x > 2$, entonces $f(x)$ es muy grande. Por ejemplo,

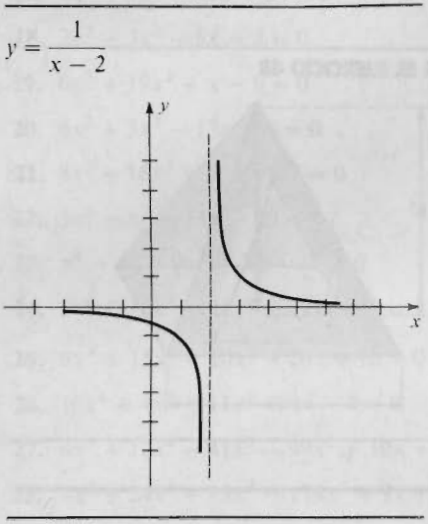
$$f(2.1) = \frac{1}{2.1 - 2} = \frac{1}{0.1} = 10$$

$$f(2.01) = \frac{1}{2.01 - 2} = \frac{1}{0.01} = 100$$

$$f(2.001) = \frac{1}{2.001 - 2} = \frac{1}{0.001} = 1000.$$

Si x está cerca de 2 y $x < 2$, entonces $f(x)$ es *numéricamente* grande, pero negativo. Esto es,

FIGURA 4.15



$$f(1.9) = \frac{1}{1.9 - 2} = \frac{1}{-0.1} = -10$$

$$f(1.99) = \frac{1}{1.99 - 2} = \frac{1}{-0.01} = -100$$

$$f(1.999) = \frac{1}{1.999 - 2} = \frac{1}{-0.001} = -1000.$$

La siguiente tabla muestra otros valores de $f(x)$.

x	-8	-1	0	1	3	4	12
$f(x)$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$

Obsérvese que a medida que $|x|$ crece, $f(x)$ se aproxima a cero. Marcando algunos puntos y considerando lo que ocurre cerca de $x = 2$ se obtiene la gráfica de la Figura 4.15. ■

En el ejemplo anterior, $f(x)$ se puede hacer tan grande como se desee si escogemos x suficientemente cercana a 2 (con $x > 2$). Esto lo denotaremos simbólicamente por

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 2^+$$

lo cual se puede leer $f(x)$ *crece ilimitadamente a medida que x se acerca a* 2 *por la derecha* (es decir, $f(x)$ *tiende a infinito cuando x tiende a* 2 *por la derecha*). Es importante recordar que el símbolo ∞ (que se lee "infinito") no representa ningún número real, sino que únicamente se usa como símbolo del comportamiento de cierto tipo de funciones.

Para el caso $x < 2$, escribimos

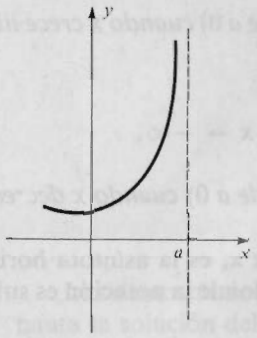
$$f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 2^-$$

lo cual se lee $f(x)$ *decrece ilimitadamente a medida que x se aproxima a* 2 *por la izquierda* (es decir, $f(x)$ *tiende a menos infinito cuando x tiende a* 2 *por la izquierda*).

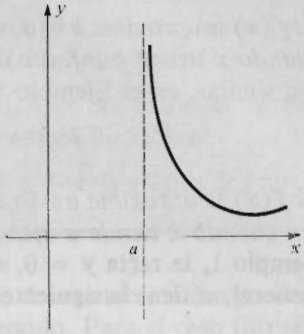
Extenderemos estas ideas a funciones arbitrarias y al caso en que x se aproxima a *cualquier* número real a. En general, el símbolo $x \to a^+$ denotará que x se aproxima a a por la *derecha*, esto es, por valores *mayores* que a. El símbolo $x \to a^-$ significará que x se aproxima a a por la *izquierda*, esto es, por valores *menores* que a. En la Figura 4.16 se muestran algunos ejemplos de la forma en que una función f crece o decrece ilimitadamente, así como la notación que se emplea. En la figura se ha representado a positivo; es claro que también puede ser $a < 0$.

FIGURA 4.16

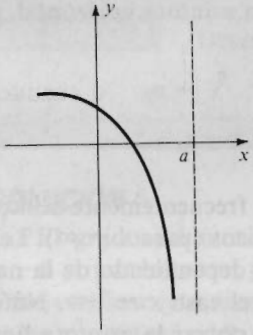
(i) $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^-$



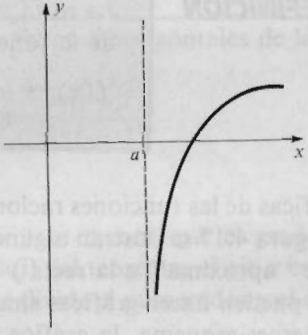
(ii) $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^+$



(iii) $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^-$



(iv) $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^+$



DEFINICIÓN

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de la función f si

$$f(x) \to \infty \quad \text{o bien} \quad f(x) \to -\infty$$

cuando x tiende a a, por la derecha o por la izquierda.

En la Figura 4.16, se representan las asíntotas verticales mediante líneas punteadas. En la Figura 4.15, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical de la gráfica de $f(x) = 1/(x-2)$.

Las asíntotas verticales son características comunes de las gráficas de funciones racionales. De hecho, *si a es una raíz del denominador $h(x)$, entonces la gráfica de $f(x) = g(x)/h(x)$ tiene la asíntota vertical $x = a$.*

También nos interesarán los valores de $f(x)$ cuando x es grande. Como ilustración, si en el Ejemplo 1 asignamos valores muy grandes a x, entonces $f(x)$ está cerca de 0. Esto es,

$$f(1002) = \frac{1}{1000} = 0.001 \quad \text{y} \quad f(1{,}000{,}002) = \frac{1}{1{,}000{,}000} = 0.000001.$$

Más aún, podemos hacer que $f(x)$ se acerque a 0 tanto como queramos si escogemos x suficientemente grande. Esto se expresa simbólicamente por

$$f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty,$$

lo cual se lee: *$f(x)$ se aproxima a* 0 (o sea *$f(x)$ tiende a* 0) *cuando x crece ilimitadamente* (o bien *cuando x tiende a infinito*).

En forma similar, en el Ejemplo 1, escribimos

$$f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty,$$

lo cual se lee: *$f(x)$ se aproxima a* 0 (*o sea $f(x)$ tiende a* 0) *cuando x decrece ilimitadamente (o bien cuando x tiende a menos infinito*).

En el Ejemplo 1, la recta $y = 0$, esto es, el eje x, es la asíntota horizontal de la gráfica. En general, se tiene la siguiente definición, donde la notación es suficientemente clara.

DEFINICIÓN

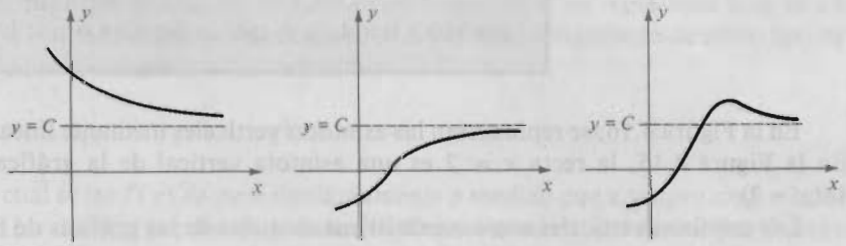
La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal**, de la gráfica de la función f si

$$f(x) \to b \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \quad \text{o cuando} \quad x \to -\infty.$$

Las gráficas de las funciones racionales tienen frecuentemente asíntotas horizontales. En la Figura 4.17 se ilustran algunos casos típicos (para $x \to \infty$). La forma en que la gráfica se "aproxima" a la recta $y = c$ varía, dependiendo de la naturaleza de la función. Se pueden hacer gráficas similares para el caso $x \to -\infty$. Nótese que, como se ve en el tercer esquema, la gráfica de f puede cruzar la asíntota horizontal.

FIGURA 4.17

$f(x) \to c$ cuando $x \to \infty$



El siguiente teorema es útil para localizar las asíntotas horizontales de la gráfica de una función racional.

TEOREMA DE LAS ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Sea $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$.

(i) Si $n < k$, entonces el eje x es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

(ii) Si $n = k$, entonces la recta $y = a_n/b_k$ es una asíntota horizontal.

(iii) Si $n > k$, la gráfica de f no tiene asíntota horizontal.

Las demostraciones de (i) y (ii) de este teorema se pueden elaborar tomando como pauta la solución del siguiente ejemplo. Para el caso (iii) se puede dar un argumento similar.

EJEMPLO 2 Determinar las asíntotas horizontales de la gráfica de f si:

(a) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 - x - 6}$ (b) $f(x) = \dfrac{5x^2 + 1}{3x^2 - 4}$

SOLUCIÓN

(a) El grado del numerador $3x - 1$ es menor que el grado del denominador $x^2 - x - 6$ y, por lo tanto, por la parte (i) del teorema, el eje x es una asíntota horizontal. Para verificar esto directamente, se divide el numerador y el denominador del cociente entre x^2, obteniendo

$$f(x) = \frac{\left(\dfrac{3x - 1}{x^2}\right)}{\left(\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2}\right)} = \frac{\dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x^2}}, \qquad x \neq 0.$$

Si x es muy grande, entonces tanto $1/x$ como $1/x^2$ están cerca de cero y por lo tanto,

$$f(x) \approx \frac{0 - 0}{1 - 0 - 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

Entonces

$$f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty .$$

Puesto que $f(x)$ es la coordenada y de un punto en la gráfica, esto significa que el eje x es una asíntota horizontal.

(b) Si $f(x) = (5x^2 + 1)/(3x^2 - 4)$, el numerador y el denominador son del mismo grado y, por lo tanto, por la parte (ii) del teorema, la recta $y = \frac{5}{3}$ es una asíntota horizontal. Esto se puede comprobar directamente dividiendo el denominador y el numerador de $f(x)$ entre x^2, obteniendo

$$f(x) = \frac{5 + \dfrac{1}{x^2}}{3 - \dfrac{4}{x^2}}$$

Puesto que $1/x^2 \to 0$ cuando $x \to \infty$, se tiene que

$$f(x) \to \frac{5+0}{3-0} = \frac{5}{3} \quad \text{as} \quad x \to \infty. \qquad \blacksquare$$

A continuación damos algunas pautas para trazar la gráfica de una función racional; las mismas aplican en los Ejemplos 3, 4 y 5.

GUÍA: Para trazar la gráfica de $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, en donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios que no tienen factor común

PASO 1 Determinar las raíces reales del numerador $g(x)$, y usarlas para fijar los puntos correspondientes a las intersecciones con el eje x.

PASO 2 Hallar las raíces reales del denominador $h(x)$. Para cada raíz a, la recta $x = a$ es una asíntota vertical. Represente $x = a$ con línea punteada.

PASO 3 Obtener el signo de $f(x)$ en cada uno de los intervalos que determinan las raíces de $g(x)$ y $h(x)$. Usar estos signos para determinar si la gráfica está arriba o abajo del eje x en cada intervalo.

PASO 4 Si $x = a$ es una asíntota vertical, usar la información del Paso 3 para determinar si $f(x) \to \infty$ o si $f(x) \to -\infty$ cuando:

$$\text{(i) } x \to a^-; \qquad \text{(ii) } x \to a^+.$$

Indicar este resultado trazando una porción de la gráfica a cada lado de $x = a$.

PASO 5 Emplear la información del Paso 3 para determinar la forma en que la gráfica corta al eje x.

PASO 6 Aplicar el teorema de las asíntotas horizontales. Si existe una asíntota horizontal, represéntela con línea punteada.

PASO 7 Trazar la gráfica usando la información encontrada en los pasos anteriores y situando los puntos siempre que sea necesario. ■■■

EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de f si

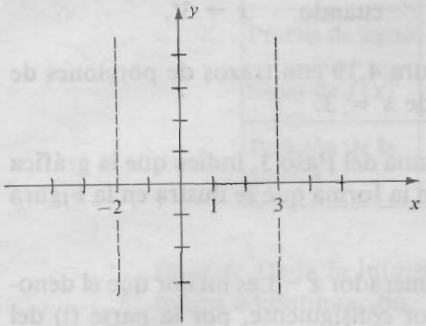
$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x - 6}.$$

SOLUCIÓN Es conveniente factorizar el denominador como se indica a continuación:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}.$$

Obtendremos la gráfica siguiendo los pasos indicados.

FIGURA 4.18



Paso 1: El numerador $x - 1$ tiene la raíz 1, por consiguiente, se sitúa el punto (1, 0) en la gráfica, como se muestra en la Figura 4.18.

Paso 2: El denominador tiene raíces -2 y 3. Entonces las rectas $x = -2$ y $x = 3$ son asíntotas verticales que se representan con línea punteada como se ve en la Figura 4.18.

Paso 3: Las raíces -2, 1 y 3 del numerador y del denominador de $f(x)$ determinan los siguientes intervalos:

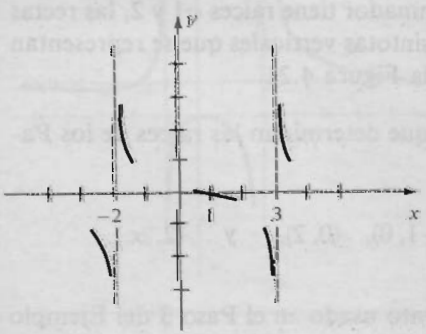
$$(-\infty, -2), \quad (-2, 1), \quad (1, 3) \quad \text{y} \quad (3, \infty).$$

Como $f(x)$ es el cociente de dos polinomios, se deduce, de acuerdo con lo estudiado en la Sección 4.2, que $f(x)$ es siempre positiva o siempre negativa en cada uno de tales intervalos. En la siguiente tabla se presentan las pruebas de signo usadas para determinar el signo de $f(x)$.

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
Prueba de signo	$f(-3) = -\frac{2}{3}$	$f(0) = \frac{1}{6}$	$f(2) = -\frac{1}{4}$	$f(4) = \frac{1}{2}$
Signo de $f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Posición de la gráfica	por debajo del eje x	por encima del eje x	por debajo del eje x	por encima del eje x

Paso 4: Se utiliza la cuarta columna de la tabla del Paso 3 para investigar el comportamiento de $f(x)$ cerca de cada asíntota vertical.

FIGURA 4.19



(a) Considérese la asíntota vertical $x = -2$. Como la gráfica se encuentra *por debajo* del eje x en el intervalo $(-\infty, -2)$, entonces

$$f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -2^-.$$

Como la gráfica se encuentra *por encima* del eje x en el intervalo $(-2, 1)$, entonces

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to -2^+.$$

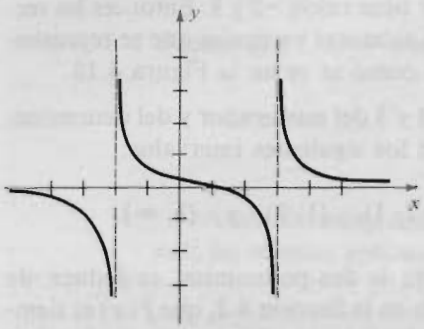
Se señalan estos hechos en la Figura 4.19 con trazos de porciones de la gráfica a cada lado de la recta $x = -2$.

(b) Considérese la asíntota vertical $x = 3$. La gráfica se encuentra *por debajo* del eje x en el intervalo $(1, 3)$; por consiguiente,

$$f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 3^-.$$

FIGURA 4.20

$y = \dfrac{x-1}{x^2-x-6}$



La gráfica está *por encima* del eje x en $(3, \infty)$ y así,

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 3^+.$$

Se indica esto en la Figura 4.19 con trazos de porciones de la gráfica a cada lado de $x = 3$.

Paso 5: La cuarta columna del Paso 3, indica que la gráfica cruza el eje x en $(1, 0)$ en la forma que se ilustra en la Figura 4.19.

Paso 6: El grado del numerador $x - 1$ es menor que el denominador $x^2 - x - 6$. Por consiguiente, por la parte (i) del teorema de las asíntotas horizontales, el eje x es una asíntota horizontal.

Paso 7: Usando la información de los pasos 4, 5 y 6, así como la ubicación de algunos puntos, obtenemos la gráfica de la Figura 4.20. ■

EJEMPLO 4 Trazar la gráfica de f si

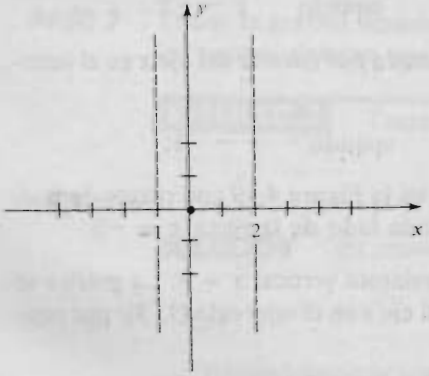
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}.$$

SOLUCIÓN Al factoriar el denominador obtenemos

$$f(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x-2)}.$$

Seguiremos nuevamente los pasos del ejemplo anterior.

FIGURA 4.21



Paso 1: El numerador x^2 tiene raíz 0 y por lo tanto, la gráfica corta al eje x en $(0, 0)$, como se muestra en la Figura 4.21.

Paso 2: Como el denominador tiene raíces -1 y 2, las rectas $x = -1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales que se representan con línea punteada en la Figura 4.21.

Paso 3: Los intervalos que determinan las raíces de los Pasos 1 y 2 son

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 0), \quad (0, 2), \quad \text{y} \quad (2, \infty).$$

Seguimos el procedimiento usado en el Paso 3 del Ejemplo 2 para obtener la siguiente tabla.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Prueba de signo	$f(-2) = 1$	$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{5}$	$f(1) = -\frac{1}{2}$	$f(3) = \frac{9}{4}$
Signo de $f(x)$	+	−	−	+
Posición de la gráfica	por debajo del eje x	por encima del eje x	por debajo del eje x	por encima del eje x

Paso 4: Dada la información de la cuarta columna del Paso 3 procedemos como se indica a continuación.

(a) Considérese la asíntota vertical $x = -1$; como la gráfica está por encima del eje x en $(-\infty, -1)$, se deduce que

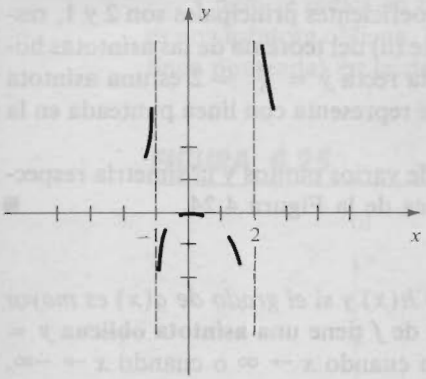
$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to -1^-.$$

Como la gráfica está por debajo del eje x en $(-1, 0)$ tenemos

$$f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -1^+.$$

En la Figura 4.22 se señalan estos hechos trazando porciones de la gráfica a cada lado de $x = -1$.

FIGURA 4.22



(b) Considérese la asíntota vertical $x = 2$; la gráfica está por debajo del eje x en el intervalo $(0, 2)$, y así

$$f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 2^-.$$

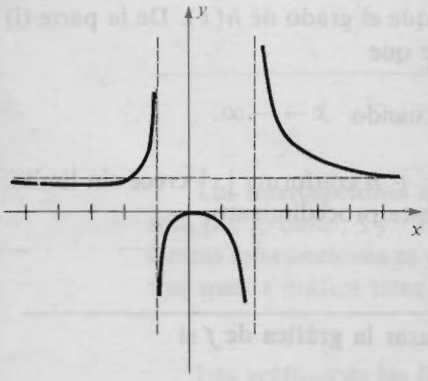
La gráfica está por encima del eje x en $(2, \infty)$ y por lo tanto,

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 2^+.$$

Esta información se representa en la Figura 4.22.

FIGURA 4.23

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$$



Paso 5: Por la información de la tabla en el Paso 3, sabemos que la gráfica está por debajo del eje x tanto en el intervalo $(-1, 0)$ como en el $(0, 2)$. Por consiguiente, la gráfica toca, pero no cruza, el eje x en $(0, 0)$.

Paso 6: El numerador y el denominador de $f(x)$ son del mismo grado y los coeficientes principales de ambos son 1. Por ello, usando la parte (ii) del teorema de las asíntotas horizontales, la recta $y = 1/1 = 1$ es una asíntota horizontal. Se indica esta recta con línea punteada, como se ve en la Figura 4.23.

Paso 7: Haciendo uso de la información de los Pasos 4, 5 y 6, y situando varios puntos, obtenemos la gráfica de la Figura 4.23. Resolvemos la ecuación $x^2/(x^2 - x - 2) = 1$

para comprobar que la gráfica corta a la asíntota horizontal en $x = -2$. Determinando otros puntos de la gráfica se puede verificar que ésta se encuentra por debajo de la asíntota horizontal cuando $x < -2$ y por encima de ella cuando $-2 < x < -1$. ■

EJEMPLO 5 Trazar la gráfica de f si

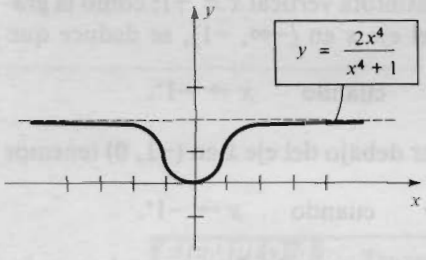
$$f(x) = \frac{2x^4}{x^4 + 1}.$$

SOLUCIÓN Para este ejemplo no escribiremos formalmente todos los pasos. Nótese que como $f(-x) = f(x)$, la función es par; por esta razón, la gráfica es simétrica respecto al eje y.

La gráfica corta al eje x en (0, 0). No hay asíntotas verticales porque el denominador de $f(x)$ no tiene raíces reales.

El numerador y el denominador de $f(x)$ son del mismo grado. Puesto que los coeficientes principales son 2 y 1, respectivamente, de la parte (ii) del teorema de las asíntotas horizontales se sigue que la recta $y = \frac{2}{1} = 2$ es una asíntota horizontal. Esta recta se representa con línea punteada en la Figura 4.24.

FIGURA 4.24



La representación de varios puntos y la simetría respecto al eje y dan la gráfica de la Figura 4.24. ■

Si $f(x) = g(x)/h(x)$ para polinomios $g(x)$ y $h(x)$ y si *el grado de $g(x)$ es mayor en uno que el grado de $h(x)$*, entonces la gráfica de f tiene una **asíntota oblicua** $y = ax + b$; es decir, la gráfica se acerca a esta línea cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. Para determinar la asíntota oblicua puede utilizarse la división para expresar a $f(x)$ en la forma

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = (ax + b) + \frac{r(x)}{h(x)}$$

en donde $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ es menos que el grado de $h(x)$. De la parte (i) del teorema de las asíntotas horizontales se sigue que

$$\frac{r(x)}{h(x)} \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \quad \text{o cuando} \quad x \to -\infty.$$

Por consiguiente, $f(x)$ se acerca más y más a $ax + b$ conforme $|x|$ crece sin límite. El siguiente ejemplo ilustra un caso especial de este procedimiento.

EJEMPLO 6 Hallar todas las asíntotas y trazar la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{2x - 4}.$$

SOLUCIÓN Cuando $2x - 4 = 0$, es decir, si $x = 2$, se tiene una asíntota vertical.

El grado del numerador de $f(x)$ es mayor que el grado del denominador. Por tanto, por la parte (iii) del teorema de las asíntotas horizontales, no hay asíntotas de esta clase. Sin embargo, puesto que el grado del numerador $x^2 - 9$ es mayor en uno que el del denominador $2x - 4$, la gráfica tiene una asíntota oblicua. Dividiendo se obtiene

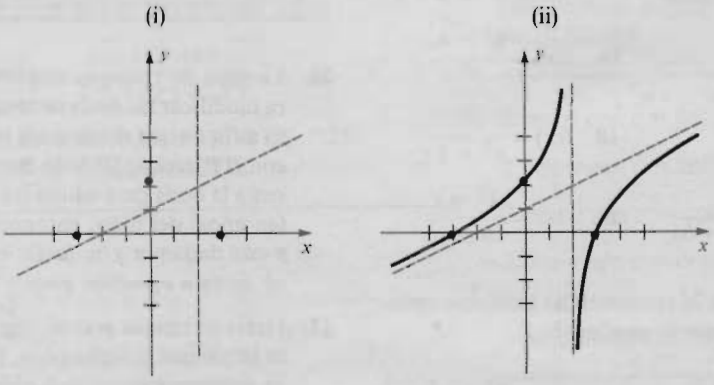
$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{2}x + 1 \\ \hline 2x - 4 & x^2 \quad\quad - 9 \\ & \underline{x^2 - 2x} \\ & \quad 2x - 9 \\ & \quad \underline{2x - 4} \\ & \quad\quad - 5 \end{array}$$

Por lo que

$$\frac{x^2 - 9}{2x - 4} = \left(\frac{1}{2}x + 1\right) - \frac{5}{2x - 4}.$$

Como se indica en la discusión que precede a este ejemplo, la recta $y = \frac{1}{2}x + 1$ es una asíntota oblicua. Esta recta así como la asíntota vertical $x = 2$ se muestran (con línea punteada) en la parte (i) de la Figura 4.25.

FIGURA 4.25



Las intercepciones x de la gráfica son las soluciones de la ecuación $x^2 - 9 = 0$ y son, por lo tanto, 3 y -3. La intercepción y es $f(0) = \frac{9}{4}$. Los puntos correspondientes a estas intersecciones se presentan en la parte (i) de la Figura 4.25. Ahora es fácil mostrar que la gráfica tiene la forma que se muestra en la parte (ii) de la Figura 4.25. ■

Las gráficas de las funciones racionales pueden hacerse muy complicadas cuando crecen los grados del numerador y del denominador de los polinomios. Para un estudio completo de estas funciones se emplean técnicas que se desarrollan en cálculo.

Ejercicios 4.6

Trace la gráfica de f en cada uno de los Ejercicios 1 a 20.

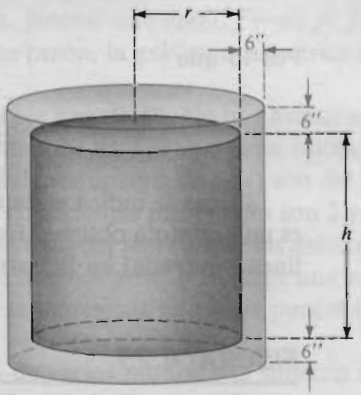
1. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$
3. $f(x) = \dfrac{-2}{x+4}$
4. $f(x) = \dfrac{-3}{x-1}$
5. $f(x) = \dfrac{x}{x-5}$
6. $f(x) = \dfrac{x}{3x+2}$
7. $f(x) = \dfrac{4}{(x-1)^2}$
8. $f(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$
9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$
10. $f(x) = \dfrac{2}{x^2+x-2}$
11. $f(x) = \dfrac{5x}{4-x^2}$
12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$
13. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-7x+10}$
14. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x-6}$
15. $f(x) = \dfrac{3x+2}{x}$
16. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2}$
17. $f(x) = \dfrac{4}{x^2+4}$
18. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$
19. $f(x) = \dfrac{1}{x^3+x^2-6x}$
20. $f(x) = \dfrac{x^2-x}{16-x^2}$

En los Ejercicios 21 a 24 encuentre las asíntotas verticales y oblicuas y trace la gráfica de f.

21. $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x+1}$
22. $f(x) = \dfrac{2x^2-x-3}{x-2}$
23. $f(x) = \dfrac{8-x^3}{2x^2}$
24. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-9}$

25. Un recipiente cilíndrico para almacenar desechos radiactivos se construye con plomo. El recipiente debe tener 6 pulg de grosor (véase la figura). El volumen del cilindro exterior que se muestra en la figura debe ser de 16π pie^3.
   (a) Exprese la altura h del cilindro interno como función del radio interior r.
   (b) Demuestre que el volumen interno está dado por una función racional V tal que
$$V(r) = \pi r^2\left[\frac{16}{(r+0.5)^2} - 1\right].$$
   (c) ¿Qué valores de r deben excluirse de la fórmula para $V(r)$?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 25



26. La regla de Young es una fórmula que se usa para modificar las dosis de medicamento para adulto a fin de que sirvan para niños. (Compare éste con el Ejercicio 50 de la Sección 3.5.) Si a representa la dosis para adulto (en mg), y si t es la edad (en años) del niño, entonces la dosis para niño y está dada por $y = ta/(t + 12)$. Trace la gráfica de esta ecuación para $t > 0$.

27. Hacia un tanque grande, que contiene inicialmente 50 galones de agua pura, fluye agua salada cuya concentración es de 0.1 libras de sal por galón.
   (a) Si el flujo de agua salada hacia el tanque es de 5 galones por minuto, ¿cuál es el volumen $V(t)$ de agua y la cantidad $A(t)$ de sal en el tanque en el tiempo t?
   (b) Demuestre que la concentración de sal en un tiempo determinado t está dada por $c(t) = t/(10t + 100)$.
   (c) Discuta el comportamiento de $c(t)$ cuando $t \to \infty$.

28. Un problema importante en la ciencia de la pesca consiste en predecir la población R de crías adultas (los renuevos) para el próximo año, a partir del número S de hembras que están desovan-

do actualmente. Para algunas especies (como el arenque del Mar del Norte), la relación entre R y S es de la forma $R = aS/(S + b)$. ¿Cómo se interpreta la constante a? Deduzca que para valores grandes de S, el renuevo es más o menos constante.

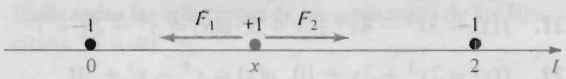
29. La ley de Coulomb de la electricidad establece que la fuerza de atracción F entre dos partículas cargadas es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los corpúsculos y directamente proporcional al producto de las cargas. Supóngase que una partícula de carga $+1$ se coloca sobre una recta coordenada entre dos partículas de carga -1, como se muestra en la figura.

(a) Ponga de manifiesto que la fuerza neta que actúa sobre la partícula de carga $+1$ está dada por

$$F(x) = -\frac{k}{x^2} + \frac{k}{(x-2)^2}$$

para una $k > 0$.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 29

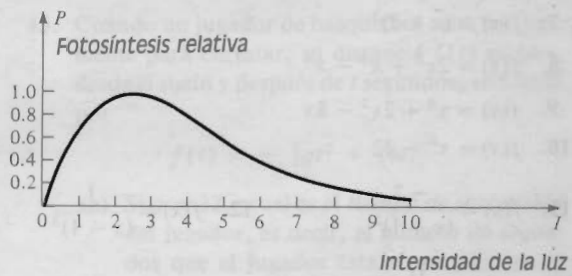


(b) Haga $k = 1$ y trace la gráfica de F para $0 < x < 2$.

30. Los biomatemáticos han propuesto muchas funciones diferentes para describir el efecto de la luz sobre la rapidez a la que la fotosíntesis puede llevarse a cabo. Si la función ha de ser realista, debe presentar el *efecto de fotoinhibición*, es decir, la rapidez de realización P de la fotosíntesis debe disminuir hacia cero conforme la intensidad de la luz I crece hasta alcanzar niveles altos (véase la figura). ¿Cuál de las siguientes funciones debe usarse y cuál no? ¿Por qué?

(a) $P = \dfrac{aI}{b + I}$ (b) $P = \dfrac{aI}{b + I^2}$

FIGURA PARA EL EJERCICIO 30



4.7 Repaso

Defina o discuta cada uno de los siguientes conceptos.

1. Función polinomial.
2. Función cuadrática.
3. Gráfica de una función cuadrática.
4. Valores máximos y mínimos de funciones cuadráticas.
5. Teorema del valor intermedio.
6. Gráfica de funciones polinomiales de grado mayor que 2.
7. Algoritmo de la división para polinomios.
8. Teorema del residuo.
9. Teorema del factor.
10. División sintética.
11. Teorema fundamental del álgebra.
12. Multiplicidad de la raíz de un polinomio.
13. Número de raíces de un polinomio.
14. Regla de los signos de Descartes.
15. Cotas superior e inferior de las soluciones de una ecuación.
16. Raíces racionales de una función polinomial.
17. Funciones racionales.
18. Gráfica de una función racional.
19. Asíntotas verticales y horizontales.
20. Asíntotas oblicuas.

Ejercicios 4.7

Trace la gráfica de las ecuaciones de los Ejercicios 1 a 4.

1. $y = x^2 + 6x + 16$
2. $4x^2 + y = 10$
3. $4y = (x + 2)(x - 1)^2(3 - x)$
4. $y = \frac{1}{15}(x^5 - 20x^3 + 64x)$

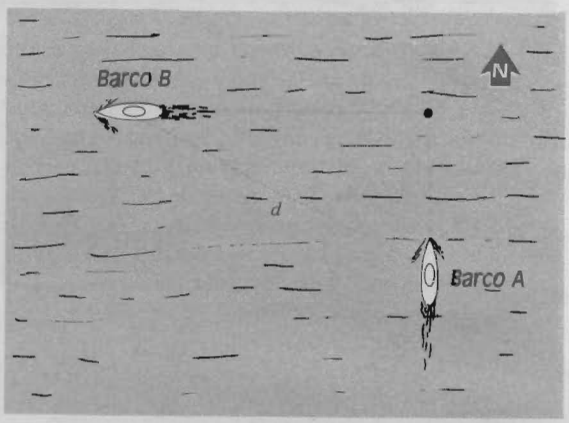
En cada uno de los Ejercicios 5 a 16, trace la gráfica de f.

5. $f(x) = (x - 4)^2$
6. $f(x) = 12x^2 + 5x - 3$
7. $f(x) = (x + 2)^3$
8. $f(x) = 2x^2 + x^3 - x^4$
9. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$
10. $f(x) = x^6 - 32$
11. $f(x) = \dfrac{-2}{(x + 1)^2}$
12. $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^3}$
13. $f(x) = \dfrac{3x^2}{16 - x^2}$
14. $f(x) = \dfrac{x}{(x + 5)(x^2 - 5x + 4)}$
15. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x + 3}$
16. $f(x) = \dfrac{x^4 - 16}{x^3}$

En los Ejercicios 17 y 18, complete el cuadrado para encontrar el valor máximo o mínimo de $f(x)$.

17. $f(x) = 5x^2 + 30x + 49$
18. $f(x) = -3x^2 + 30x - 82$
19. El interior de una pista de carreras de media milla consiste en un rectángulo con semicírculos en dos de sus extremos opuestos. Encuentre las dimensiones que maximizan el área del rectángulo.
20. A la 1:00 P.M. el barco A está exactamente a 30 millas al sur del barco B y está navegando hacia el norte a razón de 15 mi/h. Si el barco B está navegando hacia el oeste a razón de 10 mi/h, ¿a qué hora será mínima la distancia entre los barcos (véase la figura)?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 20



En los Ejercicios 21 a 24 halle el cociente y el residuo si $f(x)$ se divide entre $g(x)$.

21. $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + x + 5,\ g(x) = x^3 - 2x + 7$
22. $f(x) = 7x^2 + 3x - 10,\ g(x) = x^3 - x^2 + 10$
23. $f(x) = 9x + 4,\ g(x) = 2x - 5$
24. $f(x) = 4x^3 - x^2 + 2x - 1,\ g(x) = x^2$
25. Si $f(x) = -4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 7x - 10$, utilice el teorema del residuo para determinar $f(-2)$.
26. Aplique el teorema del residuo para demostrar que $x - 3$ es un factor de $2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 9$.

En los Ejercicios 27 y 28 utilice la división sintética para determinar el cociente y el residuo si $f(x)$ se divide entre $g(x)$.

27. $f(x) = 6x^5 - 4x^2 + 8,\ g(x) = x + 2$
28. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1,\ g(x) = x - \sqrt{2}$

En los Ejercicios 29 y 30 encuentre los polinomios con coeficientes reales que tienen las raíces (o ceros) y el grado indicados y que satisfacen las condiciones dadas.

29. $-3 + 5i, -1$; grado 3: $f(1) = 4$
30. $1 - i, 3, 0$; grado 4; $f(2) = -1$
31. Encuentre un polinomio de grado 7 tal que -3

sea una raíz de multiplicidad 2, y 0, una raíz de multiplicidad. 5.

32. Demuestre que 2 es una raíz de multiplicidad 3 del polinomio $x^5 - 4x^4 - 3x^3 - 34x^2 - 52x + 24$ y exprese éste como un producto de factores lineales.

En los Ejercicios 33 y 34 determine las raíces de los polinomios y diga cuál es la multiplicidad de cada una.

33. $(x^2 - 2x + 1)^2(x^2 + 2x - 3)$

34. $x^6 + 2x^4 + x^2$

En los Ejercicios 35 y 36, (a) aplique la regla de los signos de Descartes para encontrar el número de soluciones positivas, negativas y complejas; y (b) determine los enteros mayor y menor que son las cotas superior e inferior, respectivamente, dé las soluciones reales.

35. $2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5x - 7 = 0$

36. $x^5 - 4x^3 + 6x^2 + x + 4 = 0$

37. Demuestre que $7x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 10$ no tiene raíces reales.

Halle todas las soluciones de las ecuaciones de los Ejercicios 38 a 40.

38. $x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 49x + 30 = 0$

39. $16x^3 - 20x^2 - 8x + 3 = 0$

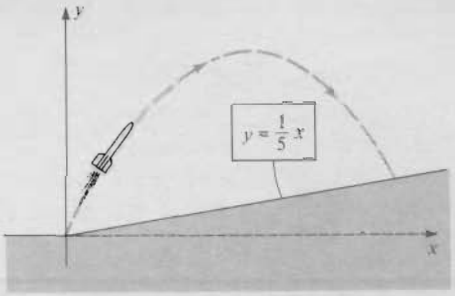
40. $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$

41. Demuestre que el volumen total V de la edificación descrita en el Ejercicio 39 de la Sección 3.9 está dado por la ecuación $V = \frac{1}{5}x(400 - 16x)$ y determine el diseño que hace que el espacio interior de la construcción sea máximo.

42. Al pie de una colina se dispara un cohete que sigue una trayectoria dada por $y = -0.016x^2 - 1.6x$. La colina tiene una pendiente de $\frac{1}{5}$ como se ilustra en la figura.

(a) ¿En dónde aterriza el cohete?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 42



(b) Calcule la altura máxima del cohete *sobre el suelo*.

43. Cuando un jugador de basquetbol salta verticalmente para encestar, su distancia $f(t)$ en pies, desde el suelo y después de t segundos, está dada por

$$f(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + 16t.$$

(a) Si $g = 32$, ¿cuál es el *tiempo de suspensión* del jugador, es decir, el número de segundos que el jugador está suspendido en el aire?

(b) Determine el *salto vertical* del jugador, es decir, calcule la máxima distancia entre sus pies y el piso.

(c) En la Luna $g = \frac{32}{6}$. Calcule nuevamente las partes (a) y (b) para un jugador en la Luna.

44. El costo $C(x)$ de limpiar un x por ciento de un derramamiento de petróleo en la costa, aumenta mucho cuando x se aproxima a 100. Suponga que

$$C(x) = \frac{20x}{101 - x} \quad \text{(miles de dólares)}.$$

(a) Compare $C(100)$ con $C(90)$.

(b) Trace la gráfica de C para $0 < x < 100$.

CAPÍTULO 5

Funciones exponenciales y logarítmicas

Las funciones exponenciales y logarítmicas tienen aplicaciones en casi todos los campos del quehacer humano. ■ Son particularmente útiles en el estudio de la química, la biología, la física y la ingeniería para describir la forma en que varían las cantidades. ■ En este capítulo se examinarán las propiedades de estas funciones y se considerarán muchas de sus aplicaciones en la vida diaria.

5.1 Funciones exponenciales

En toda esta sección la letra a denotará un número real positivo. En el Capítulo 1 definimos a^r para cualquier número racional r de la siguiente manera: si m y n son enteros con $n > 0$, entonces $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$. Usando los métodos desarrollados en el cálculo, se puede definir a^x para cualquier número *real* x. Por ejemplo, si tenemos un número como a^π, podemos usar la representación decimal infinita 3.1415926 ... para π y suponer que la sucesión siguiente de potencias *racionales* de a:

$$a^3, \quad a^{3.1}, \quad a^{3.14}, \quad a^{3.141}, \quad a^{3.1415}, \quad a^{3.14159}, \ldots$$

se aproxime cada vez más al valor de a^π. Esto es precisamente lo que sucede si definimos adecuadamente a^x. En este capítulo se supondrá que a^x se puede obtener de manera similar para cualquier número real x, y que las leyes de los exponentes son válidas en este contexto más general.

Se puede demostrar que el siguiente resultado acerca de exponentes racionales es cierto también para exponentes *reales*.

TEOREMA

Si a es un número real tal que $a > 1$, entonces

(i) $a^r > 1$ para todo número racional positivo

(ii) si r y s son números racionales tales que $r < s$, entonces $a^r < a^s$.

DEMOSTRACIÓN

(i) Multiplicando ambos lados de la desigualdad $a > 1$ por a, obtenemos $a^2 > a$, y por lo tanto, $a^2 > a > 1$. Multiplicando ambos lados de $a^2 > 1$ por a, obtenemos $a^3 > a$, y por lo tanto $a^3 > 1$. Continuando este proceso, vemos que $a^p > 1$ para todo entero positivo p. (Una demostración rigurosa de este hecho requiere el método de inducción matemática.) De manera similar, si $0 < a \leq 1$ se deduce que $a^q \leq 1$ para todo entero positivo q.

Ahora consideremos $r = p/q$ para enteros positivos p y q. Si se verifica que $a^{p/q} \leq 1$, entonces por la discusión anterior $(a^{p/q})^q \leq 1$ o bien $a^p \leq 1$, lo cual contradice el hecho de que $a^p > 1$ para todo entero positivo p. En consecuencia, $a^r > 1$ para todo número racional positivo r.

(ii) Si r y s son números racionales tales que $r < s$, entonces $s - r$ es un número racional positivo y por consiguiente, de la parte (i), $1 < a^{s-r}$. Multiplicando ambos lados de la última desigualdad por a^r,

$$a^r < (a^{s-r})a^r \quad \text{o bien} \quad a^r < a^s. \qquad \square$$

Puesto que a cada número real x corresponde un número real único a^x, podemos definir una función del siguiente modo:

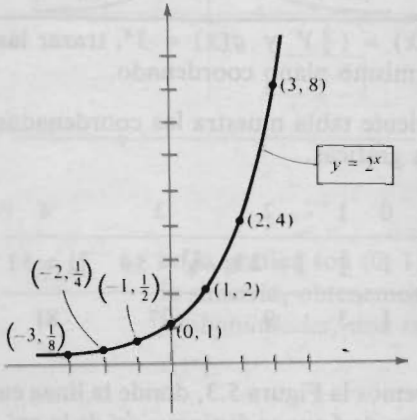
DEFINICIÓN

Si $a > 0$, entonces la **función exponencial** f con base a se define como

$$f(x) = a^x$$

en donde x es cualquier número real.

FIGURA 5.1



Si $a > 1$ y x_1, x_2 son números reales tales que $x_1 < x_2$, entonces $a^{x_1} < a^{x_2}$; es decir, $f(x_1) < f(x_2)$. Esto significa que si $a > 1$, entonces la función exponencial f con base a es creciente en todo $\mathbb{R}$. También se puede demostrar que si $0 < a < 1$, entonces f es decreciente en $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 1 Representar gráficamente f siendo $f(x) = 2^x$.

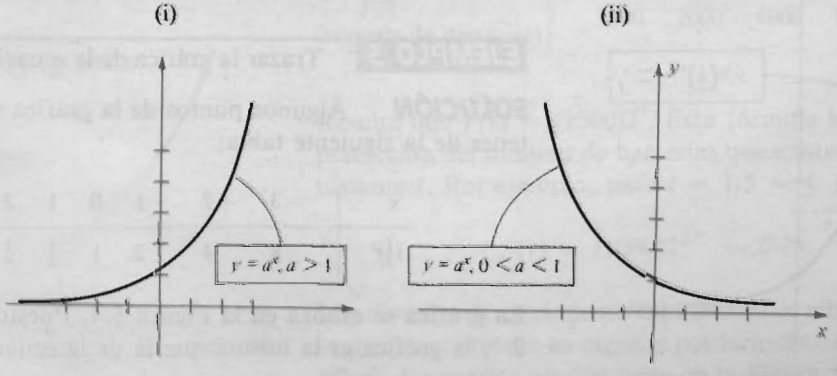
SOLUCIÓN En la siguiente tabla aparecen las coordenadas de algunos puntos de la gráfica.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Marcando los puntos y utilizando el hecho de que f es creciente, obtenemos la gráfica que se muestra en la Figura 5.1. ■

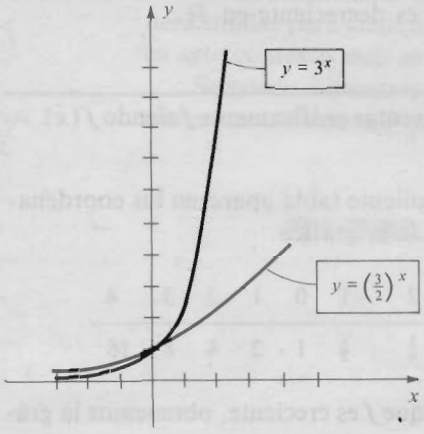
La Figura 5.2(i) muestra la gráfica característica de la función exponencial con base a para $a > 1$; sin embargo, la forma exacta depende del valor de a. Si $0 < a < 1$, la gráfica tiene la apariencia que se muestra en la parte (ii) de la figura. En ambos casos el dominio de f es $\mathbb{R}$ y su contradominio es el conjunto de los números reales positivos.

FIGURA 5.2



Puesto que $a^0 = 1$ la ordenada en el origen siempre es 1. Si $a > 1$, entonces al ir decreciendo x y tomando valores negativos, la gráfica se aproxima al eje x sin llegar a cortarlo, ya que $a^x > 0$ para todo x. Esto significa que el eje x es una *asíntota horizontal* para la gráfica. Al ir creciendo x va tomando valores positivos, la gráfica crece rápidamente. En efecto, dada $f(x) = 2^x$, si comenzamos con $x = 0$ y consideramos cambios sucesivos unitarios de x, entonces los correspondientes valores de y son 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 y así sucesivamente. Este tipo de variación es muy común en la naturaleza y es característico de la **ley del crecimiento exponencial**. En este caso, f es conocida como **función de crecimiento**. La Figura 5.2(ii) ilustra el **decrecimiento exponencial**.

FIGURA 5.3



EJEMPLO 2 Si $f(x) = (\frac{3}{2})^x$ y $g(x) = 3^x$, trazar las gráficas de f y g en el mismo plano coordenado.

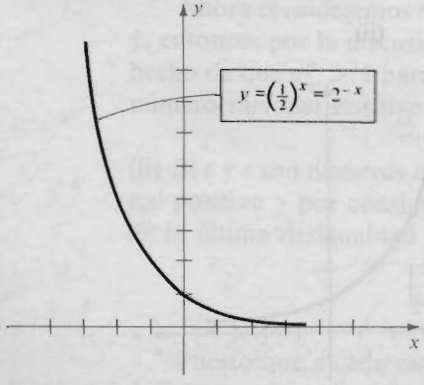
SOLUCIÓN La siguiente tabla muestra las coordenadas de varios puntos de las gráficas.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$(\frac{3}{2})^x$	$\frac{4}{9} \approx .4$	$\frac{2}{3} \approx .7$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4} \approx 2.3$	$\frac{27}{8} \approx 3.4$	$\frac{81}{16} \approx 5.1$
3^x	$\frac{1}{9} \approx .1$	$\frac{1}{3} \approx .3$	1	3	9	27	81

Con estos puntos obtenemos la Figura 5.3, donde la línea en color representa la gráfica de f que se distingue así de la gráfica de g. ■

El Ejemplo 2 muestra que si $1 < a < b$, entonces $a^x < b^x$ para valores positivos de x y $b^x < a^x$ para valores negativos de x. En particular, puesto que $\frac{3}{2} < 2 < 3$, esto nos dice que la gráfica de $y = 2^x$ en el Ejemplo 1 se localiza entre las gráficas de f y g del Ejemplo 2.

FIGURA 5.4



EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de la ecuación $y = (\frac{1}{2})^x$.

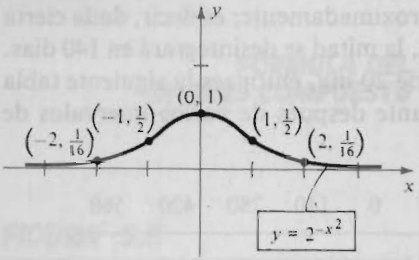
SOLUCIÓN Algunos puntos de la gráfica se pueden obtener de la siguiente tabla:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$(\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

La gráfica se esboza en la Figura 5.4. Puesto que $(\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$, la gráfica es la misma que la de la ecuación $y = 2^{-x}$. ■

En matemáticas avanzadas y en aplicaciones, aparecen con frecuencia funciones f tales que $f(x) = a^p$ donde p es alguna expresión en x. No pretendemos estudiar tales funciones en detalle; sin embargo, el siguiente ejemplo ilustra el caso $p = -x^2$.

FIGURA 5.5



EJEMPLO 4 Trazar la gráfica de f si $f(x) = 2^{-x^2}$.

SOLUCIÓN Puesto que $f(x)$ es

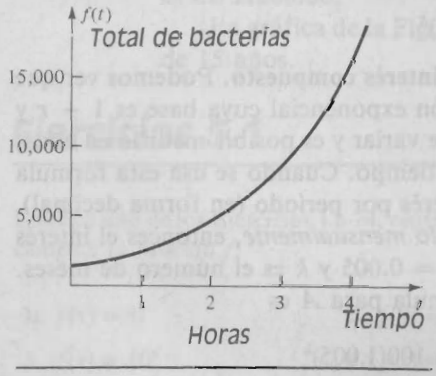
$$f(x) = \frac{1}{2^{(x^2)}}$$

se deduce que si $|x|$ crece, el correspondiente punto $(x, f(x))$ dela gráfica se aproxima al eje x; el eje x es pues una asíntota horizontal para la gráfica. El máximo valor de $f(x)$ ocurre en $x = 0$. Puesto que f es una función par, la gráfica es simétrica con respecto al eje y (Sección 3.4). Algunos puntos en la gráfica son (0, 1), (1, $\frac{1}{2}$) y (2, $\frac{1}{16}$). Marcando esos puntos y teniendo en cuenta la simetría, obtenemos la Figura 5.5. Funciones de este tipo aparecen en el *cálculo de probabilidades*, una rama importante de las matemáticas. ■

APLICACIÓN: Crecimiento bacteriano

La variación de muchas entidades físicas puede ser descrita por medio de funciones exponenciales. Uno de los ejemplos más comunes es el crecimiento de una población determinada. Es posible que se observe experimentalmente que el número de bacterias en un cultivo se duplica cada hora. Si existen 1000 bacterias al comienzo del experimento, entonces la persona encargada del mismo obtendría las cifras siguientes, en donde t es el tiempo en horas y $f(t)$ es el número de bacterias en el tiempo t.

FIGURA 5.6



t (tiempo)	0	1	2	3	4
$f(t)$ (número de bacterias)	1000	2000	4000	8000	16 000

Resulta que $f(t) = (1000)2^t$. Esta fórmula hace posible la predicción del número de bacterias que existen en cualquier instante t. Por ejemplo, para $t = 1.5 = \frac{3}{2}$ tenemos

$$f(t) = (1000)2^{3/2} \approx 2828.$$

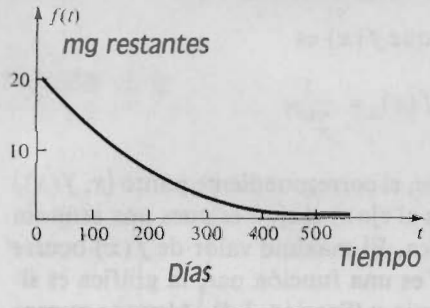
Los modelos de crecimiento exponencial de este tipo también se pueden observar en algunas poblaciones humanas y animales. La gráfica de f se tiene en la Figura 5.6. ■ ■ ■

APLICACIÓN: Decrecimiento radiactivo

Ciertas cantidades físicas *decrecen* exponencialmente. En tales casos, la base a de la función exponencial se encuentra entre 0 y 1. Uno de los ejemplos más comunes es la desintegración de una sustancia radiactiva. Para ilustrar esto consideremos el isótopo ^{210}Po del polonio, que tiene una semivida de 140 días aproximadamente; es decir, dada cierta cantidad de la sustancia, la mitad se desintegrará en 140 días. Si la muestra inicial es de 20 mg, entonces la siguiente tabla indica la cantidad restante después de varios intervalos de tiempo.

FIGURA 5.7

Desintegración del polonio



t (días)	0	140	280	420	560
Cantidad restante (mg)	20	10	5	2.5	1.25

La Figura 5.6 ilustra la naturaleza exponencial de la desintegración. ■ ■ ■

APLICACIÓN: Interés compuesto

El *interés compuesto* proporciona otra ilustración del crecimiento exponencial. Sea una cantidad de dinero (o capital) P (llamada **monto inicial** o **principal**) y un interés *simple* de i por ciento; entonces el interés al final de un período de inversión es Pr (r es i en forma decimal). Por ejemplo, si P = \$1000 y la tasa anual de interés i es 9%, entonces el interés al final de un año es \$(1000)(0.09); o sea, \$90.

Si el interés es reinvertido al final de este período, entonces el nuevo valor es

$$P + Pr \quad \text{o bien} \quad P(1 + r).$$

Nótese que para conocer el valor incrementado multiplicamos el inicial por $(1 + r)$. En el ejemplo anterior es \$1000(1.09); o sea, \$1090.

Si pasa otro período de inversión, entonces el nuevo valor puede encontrarse multiplicando $P(1 + r)$ por $(1 + r)$. De modo que el capital, después de dos períodos, es $P(1 + r)^2$. Si reinvertimos y continuamos el proceso. el monto después de tres períodos, es $P(1 + r)^3$; después de cuatro es $P(1 + r)^4$ y en general, después de k períodos de inversión, el **monto final** (valor acrecentado) A está dado por

$$A = P(1 + r)^k.$$

El interés acumulado de este modo se denomina **interés compuesto**. Podemos ver que el monto A está dado en términos de una función exponencial cuya base es $1 + r$ y cuyo exponente es k. El intervalo de tiempo puede variar y es posible medirlo en años, meses, semanas, días o cualquier otra unidad de tiempo. Cuando se usa esta fórmula para A debemos recordar que r es la tasa de interés por período (en forma decimal). Por ejemplo, si el interés es 6% *anual capitalizado mensualmente*, entonces el interés por mes será $\frac{6}{12}$%, o sea 0.5%. En este caso, $r = 0.005$ y k es el número de meses. Si se invierten \$100 a esta tasa, entonces la fórmula para A es

$$A = 100(1 + 0.005)^k = 100(1.005)^k$$

En general, se supone que r es la tasa de interés anual (expresada como decimal) y que el interés se capitaliza n veces al año. La tasa de interés por período de inversión es r/n. Si el capital o monto inicial P se ha invertido por t años, entonces el número de períodos de interés es nt, y el monto A después de t años está dado por la fórmula siguiente:

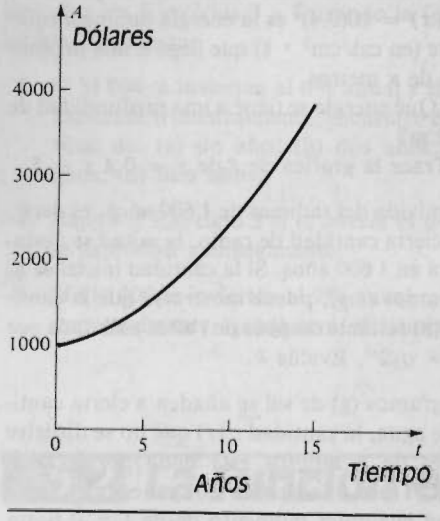
FÓRMULA DEL INTERÉS COMPUESTO

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

■■■

FIGURA 5.8

Interés compuesto: $A = 1000(1.0075)^{12t}$



EJEMPLO 5 Supóngase que se invirtieron \$1000 a una tasa de interés compuesto del 9% mensual. Calcular el monto final del capital inicial después de 5 años, después de 10 años y después de 15 años. Grafique el crecimiento de la inversión.

SOLUCIÓN Aplicando la fórmula del interés compuesto con $r = 0.09$, $n = 12$ y $P = \$1000$, el monto a los t años es

$$A = 1000\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12t} = 1000(1.0075)^{12t}.$$

Sustituyendo $t = 5$, 10 y 15, y usando una calculadora, obtenemos los siguientes valores:

Después de 5 años: $A = 1000(1.0075)^{60} = \$1565.68$

Después de 10 años: $A = 1000(1.0075)^{120} = \$2451.36$

Después de 15 años: $A = 1000(1.0075)^{180} = \$3838.04$

La naturaleza exponencial del incremento se indica por el hecho de que durante los primeros cinco años, el crecimiento de la inversión es \$565.68; durante el segundo período quinquenal el crecimiento es \$885.68; y durante el último período quinquenal, es de \$1368.68.

La gráfica de la Figura 5.8 ilustra el crecimiento de \$1000 invertidos por un período de 15 años.

Ejercicios 5.1

En cada uno de los Ejercicios 1 a 24, represente gráficamente la función f.

1. $f(x) = 4^x$
2. $f(x) = 5^x$
3. $f(x) = 10^x$
4. $f(x) = 8^x$
5. $f(x) = 3^{-x}$
6. $f(x) = 4^{-x}$
7. $f(x) = -2^x$
8. $f(x) = -3^x$
9. $f(x) = 4 - 2^{-x}$
10. $f(x) = 2 + 3^{-x}$
11. $f(x) = (\frac{2}{3})^x$
12. $f(x) = (\frac{3}{4})^{-x}$

13. $f(x) = (\frac{5}{2})^{-x}$
14. $f(x) = (\frac{4}{3})^{x}$
15. $f(x) = 2^{|x|}$
16. $f(x) = 2^{-|x|}$
17. $f(x) = 2^{x+3}$
18. $f(x) = 3^{x+2}$
19. $f(x) = 2^{3-x}$
20. $f(x) = 3^{-2-x}$
21. $f(x) = 3^{1-x^2}$
22. $f(x) = 2^{-(x+1)^2}$
23. $f(x) = 3^{x} + 3^{-x}$
24. $f(x) = 3^{x} - 3^{-x}$

25. Una centena de ciervos, cada uno de 1 año de edad, se introducen en un coto de caza. El número $N(t)$ de los que aún queden vivos después de t años se predice que es $N(t) = 100(0.9)^t$. Estime el número de animales vivos después de (a) 1 año; (b) 5 años; (c) 10 años.

26. Un medicamento se elimina del organismo a través de la orina. La dosis inicial es de 10 mg y la cantidad en el cuerpo t horas después está dada por $A(t) = 10(0.8)^t$.
   (a) Calcule la cantidad de fármaco restante en el organismo 8 horas después de la ingestión inicial.
   (b) ¿Qué porcentaje del medicamento que está aún en el organismo se elimina cada hora?

27. El número de bacterias de cierto cultivo incrementó de 600 a 1 800 entre las 7:00 A.M. y las 9:00 A.M. Suponiendo que el crecimiento es exponencial, se puede mostrar, usando métodos de cálculo, que t horas después de las 7:00 A.M. el número $f(t)$ de bacterias está dado por $f(t) = 600(3)^{t/2}$.
   (a) Calcule el número de bacterias en el cultivo a las 8:00 A.M.; a las 10:00 A.M. y a las 11:00 A.M.
   (b) Trace la gráfica de f desde $t = 0$ hasta $t = 4$.

28. De acuerdo con la ley del enfriamiento de Newton, un objeto se enfría en forma directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio que lo rodea. Si cierto objeto pasa de 125° a 100° en 30 minutos, cuando se encuentra rodeado por aire que tiene una temperatura de 75°, entonces puede mostrarse que su temperatura $f(t)$ después de t horas está dada por $f(t) = 50(2)^{-2t} + 75$.
   (a) Si $t = 0$ corresponde a la 1:00 P.M., aproxime, hasta décimos de grado, la temperatura a las 2:00 P.M.; a las 3:00 P.M.; y a las 4:00 P.M.
   (b) Trace la gráfica de f desde $t = 0$ hasta $t = 4$.

29. El isótopo radiactivo ^{210}Bi tiene una semivida (o "vida media") de 5 días, es decir, el número de partículas radiactivas se reducirá a la mitad del número original en 5 días. Si existen 100 mg de ^{210}Bi en el instante $t = 0$, entonces la cantidad $f(t)$ restante después de t días está dada por $f(t) = 100(2)^{-t/5}$.
   (a) ¿Qué cantidad resta después de 5 días? ¿10 días? ¿12.5 días?
   (b) Trace la gráfica de f desde $t = 0$ hasta $t = 30$.

30. Un problema importante de oceanografía consiste en determinar la cantidad de luz que puede penetrar a varias profundidades oceánicas. La Ley de Beer-Lambert establece que se debe utilizar una función exponencial I, tal que $I(x) = I_0 a^x$ para modelar este fenómeno. Suponiendo que $I(x) = 10(0.4)^x$ es la energía lumínica equivalente (en cal/cm^2 · s) que llega a una profundidad de x metros.
   (a) ¿Qué energía se tiene a una profundidad de 2 m?
   (b) Trace la gráfica de I de $x = 0$ a $x = 5$.

31. La semivida del radio es de 1 600 años, es decir, dada cierta cantidad de radio, la mitad se desintegrará en 1 600 años. Si la cantidad inicial es q_0 miligramos (mg), puede mostrarse que la cantidad $q(t)$ restante después de t años está dada por $q(t) = q_0 2^{kt}$. Eva'úe k.

32. Si 10 gramos (g) de sal se añaden a cierta cantidad de agua, la cantidad $q(t)$ que no se disuelve después de t minutos está dada por $q(t) = 10(\frac{4}{5})^t$. Trace una gráfica que muestre el valor $q(t)$ en cualquier momento desde $t = 0$ hasta $t = 10$.

33. Si \$1 000 se invierten al 12% anual y se capitalizan los intereses mensualmente, ¿cuál es el monto acumulado después de 1 mes? ¿2 meses? ¿6 meses? ¿1 año?

34. Si un fondo de ahorros paga 10% de interés y si el interés se capitaliza semestralmente, ¿cuánto dinero habrá que invertir inicialmente para tener \$5 000 después de un año?

35. Si cierta marca de automóvil se compra por C dólares, su valor comercial $v(t)$ al final de t años está dado por $v(t) = 0.78C(0.85)^{t-1}$. Si el costo original es de \$10 000, calcule, redondeando a unidades, el valor después de (a) 1 año; (b) 4 años; (c) 7 años.

36. Si el valor de los bienes raíces se incrementa a razón del 10% por año, entonces, después de t años, el valor V de una casa comprada en P dólares está dado por $V = P(1.1)^t$. Si una casa fue comprada en \$80 000 en 1986, ¿cuál será su precio en 1990?

37. ¿Por qué fue excluido $a < 0$ del estudio de a^x?

38. Demuestre que si $0 < a < 1$, y r y s son números racionales tales que $r < s$, entonces $a^r > a^s$.

39. Compare y concluya acerca de las gráficas de $y = a^x$ y de $y = -a^x$.

40. Si $a > 1$, compare y concluya acerca de la gráfica de $y = a^x$ y la gráfica de $y = a^{-x}$.

Ejercicios para Calculadora 5.1

En los Ejercicios 1 y 2, trace la gráfica correspondiente a $-3 \leq x \leq 3$ tomando valores de x en intervalos de longitud 0.5; esto es, $x = -3, -2.5, -2, -1.5$, etc.

1. $y = (1.8)^x$ 2. $y = (2.3)^{-x^2}$

Resuelva los Ejercicios 3 a 8 usando la fórmula del interés compuesto.

3. Si \$1 000 se invierten al 6% anual y el interés se capitaliza trimestralmente, encuentre el capital al final de: (a) un año; (b) dos años; (c) cinco años; (d) diez años.

4. Repita el Ejercicio 3 si el interés es 6% anual y se capitaliza mensualmente.

5. Si \$10 000 se invierten al 9% anual capitalizado semestralmente, ¿cuál será el tiempo requerido para que el capital exceda de (a) \$15 000? (b) \$20 000? (c) \$30 000?

6. Cierta tienda establece que los clientes que pagan a crédito deben pagar un interés del 18% anual capitalizado mensualmente por cada cuenta no pagada. Si un cliente compra a crédito un televisor de \$500 y no hace ningún pago durante un año, ¿cuánto debe a la tienda al final del año?

7. Un niño deposita \$500 en una cuenta de ahorros que paga interés a una tasa de 6% compuesto anual capitalizado semanalmente. ¿Cuánto tiene en la cuenta después de un año?

8. Un fondo de ahorro paga interés a razón de 9% capitalizado diariamente. ¿Cuánto se debe invertir para tener \$2000 al final de 10 semanas?

5.2 La función exponencial natural

Al final de la Sección 5.1 se describió la *Fórmula para el Interés Compuesto*

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

en la que P es el capital invertido, r es la tasa de interés (expresada como decimal), n es el número de periodos de interés al año y t es el número de años que el capital está invertido. El siguiente ejemplo ilustra lo que ocurre si la tasa y el tiempo total de inversión son fijos, pero el *intervalo de tiempo* para capitalizar el interés varía.

EJEMPLO 1 Supóngase que se han invertido \$1000 a una tasa de interés compuesto de 9%. Calcule el monto del capital después de un año, si el interés se capitaliza mensualmente, semanalmente, diariamente, cada hora, cada minuto.

SOLUCIÓN Si se hace $P = \$1000$, $t = 1$ y $r = 0.09$ en la fórmula de interés compuesto, entonces

$$A = 1000\left(1 + \frac{0.09}{n}\right)^n$$

para n periodos de interés por año. Para encontrar las cantidades deseadas se le dan a n los siguientes valores:

$$12, \quad 52, \quad 365, \quad 8760, \quad 525\,600.$$

Se ha supuesto que el año tiene 365 días y, por consiguiente, (365)(24) = 8760 horas y (8760)(60) = 525 600 minutos. (De hecho, en las transacciones de negocios un año de inversión se considera formado por 360 días.) Usando la fórmula del interés compuesto (y una calculadora), se obtiene la tabla siguiente:

Periodo de capitalización del interés	Monto del capital después de un año
Mes	$1000\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12} = \$1093.81$
Semana	$1000\left(1 + \frac{0.09}{52}\right)^{52} = \$1094.09$
Día	$1000\left(1 + \frac{0.09}{365}\right)^{365} = \$1094.16$
Hora	$1000\left(1 + \frac{0.09}{8760}\right)^{8760} = \$1094.17$
Minuto	$1000\left(1 + \frac{0.09}{525\,600}\right)^{525\,600} = \$1094.17$

■

En el ejemplo anterior nótese que, después de que transcurre cierto intervalo de tiempo, el número de periodos de interés al año tiene poco efecto en el monto final. Si el interés se hubiera capitalizado cada *segundo*, el resultado sería todavía de \$1094.17. Por consiguiente, la cantidad se acerca a un valor fijo conforme n aumenta. Si el número n de periodos por año aumenta sin límite, se dice que el interés **se capitaliza continuamente**. Es obvio que si se permite que esto suceda en el Ejemplo 1, el capital después de un año es el mismo que el que se obtiene para un período de una hora o de un minuto.

Si se toma $P = 1$, $r = 1$ y $t = 1$ en la fórmula del interés compuesto se obtiene

$$A = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

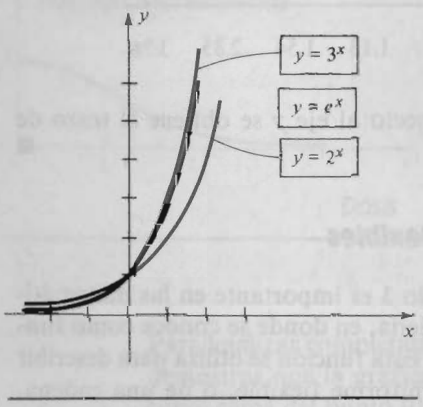
La expresión de la derecha de la ecuación aparece en el estudio del cálculo. En el Ejemplo 1 se tenía una situación similar, conforme n aumentaba, A se acercaba a un valor límite. El mismo fenómeno ocurre aquí, como lo ilustra la siguiente tabla, que se obtuvo mediante una calculadora.

n	Aproximación a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2.0000000
10	2.5937425
100	2.7048138
1000	2.7169238
10 000	2.7181459
100 000	2.7182546
1 000 000	2,7182818
10 000 000	2.7182818

Puede demostrarse que conforme n aumenta $[1 + (1/n)]^n$ se acerca dada vez más a un cierto número irracional denotado por e. Como lo indican los valores de la tabla, se le puede asignar a e la siguiente aproximación decimal:

$$e \approx 2.71828$$

FIGURA 5.9



El número e surge naturalmente en la investigación de muchos fenómenos físicos. Por este motivo, la función f definida por $f(x) = e^x$ se denomina **función exponencial natural**. Es una de las funciones más importantes que se presentan en las matemáticas avanzadas y en las aplicaciones. Puesto que $2 < e < 3$, la gráfica de $y = e^x$ está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$, como se muestra en la Figura 5.9.

En la Tabla 2 del Apéndice II se presenta una breve tabla de valores de e^x y de e^{-x}. Algunas calculadoras tienen una tecla $\boxed{e^x}$ para aproximar valores de la función exponencial natural. Pueden tener también una tecla $\boxed{y^x}$ que puede usarse para cualquier base positiva y. Las aproximaciones para e^x se pueden encontrar calculando $(2.71828)^x$.

EJEMPLO 2 Verificar la gráfica de $y = e^x$ que se tiene en la Figura 5.9 por localización de suficientes puntos.

SOLUCIÓN La siguiente tabla se puede obtener mediante calculadora o la Tabla 2 del Apéndice II, y redondeando los valores de e^x a dos cifras decimales:

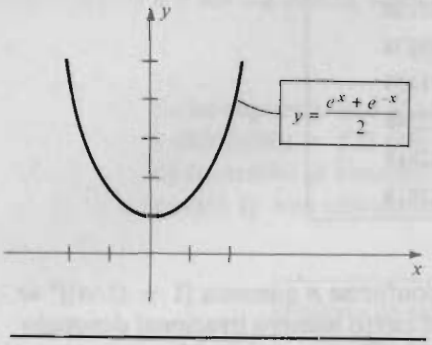
x	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0	0.5	1.0	1.5	2.0
e^x (aprox.)	0.14	0.22	0.37	0.61	1.00	1.65	2.72	4.48	7.39

Localizando puntos y aplicando el hecho de que la función exponencial de base e es creciente, se llega a la gráfica de $y = e^x$ que se muestra en la Figura 5.9. ■

EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

FIGURA 5.10



SOLUCIÓN Nótese que f es una función par puesto que

$$f(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x).$$

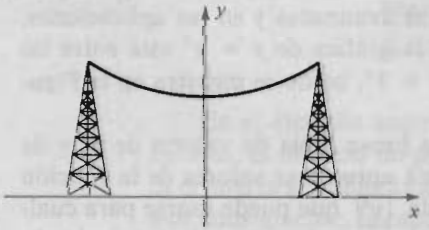
Entonces, la gráfica es simétrica con respecto al eje y (véanse las págs. 116 y 117). Con la calculadora o la Tabla 2 del Apéndice II, se obtienen las aproximaciones siguientes para $f(x)$:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$ (aprox.)	1	1.13	1.54	2.35	3.76

Localizando puntos y usando la simetría con respecto al eje y se obtiene el trazo de la Figura 5.10. ■

APLICACIÓN: Cables flexibles

FIGURA 5.11



La función f del Ejemplo 3 es importante en las matemáticas aplicadas y en ingeniería, en donde se conoce como **función coseno hiperbólico**. Esta función se utiliza para describir la forma de un cable uniforme flexible, o de una cadena, que pende bajo su peso y cuyos extremos están sostenidos a una misma altura. Lo anterior sucede a menudo con las líneas de teléfonos o con las de electricidad, como lo ilustra la Figura 5.11. Si se introduce un sistema coordenado como se indica en la figura, se demuestra que una ecuación que corresponde a la forma del cable es $y = (a/2)(e^{x/a} + e^{-x/a})$, en la que a es un número real. El nombre de la gráfica es **catenaria**, de la palabra *catena* (cadena), en latín. Nótese que la función del Ejemplo 3 es un caso especial para cuando $a = 1$. ■ ■ ■

APLICACIÓN: Radioterapia

Uno de los muchos campos en que las funciones exponenciales de base e desempeñan un papel importante es la *radioterapia*, el tratamiento de tumores cancerosos por medio de radiación. En este campo interesa conocer la fracción de una población de tumo-

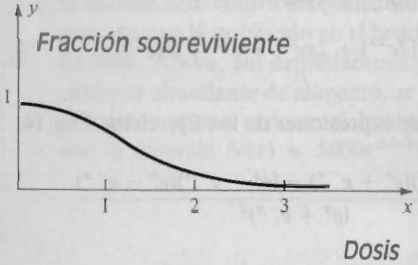
res que sobrevive a un tratamiento. Esta *fracción sobreviviente* depende no sólo de la energía y de la naturaleza de la radiación, sino también de la profundidad, tamaño y características del tumor mismo. Puede pensarse que la exposición a la radiación es un número de eventos potencialmente dañinos, en los que se necesita solamente un "impacto" para destruir una célula de un tumor. Si se supone que cada célula tiene exactamente un "blanco" que debe recibir el impacto, si k representa el tamaño promedio del blanco de una célula del tumor y si x es el número de eventos destructivos (la *dosis*), entonces la fracción sobreviviente $f(x)$ es

$$f(x) = e^{-kx}.$$

A ésta se la llama *fracción sobreviviente de "un impacto y un blanco"*.

FIGURA 5.12

Fracción sobreviviente de células cancerosas después del tratamiento radioterápico.



Enseguida supóngase que cada célula tiene n blancos y que el impacto en cualquiera de ellos trae como resultado la muerte de una célula. En este caso, la *fracción sobreviviente de "un impacto y n blancos"* es

$$f(x) = 1 - (1 - e^{-kx})^n.$$

Para determinar el efecto que tendrá el aumento de la dosis x sobre el decrecimiento de la fracción sobreviviente de células de tumor, debe analizarse la gráfica de f. Nótese que $f(0) = 1$, es decir, si no hay dosis, entonces todas las células sobreviven. Como un caso especial, si $k = 1$ y $n = 2$, resulta que

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - (1 - e^{-x})^2 = 1 - (1 - 2e^{-x} + e^{-2x}) \\ &= 2e^{-x} - e^{-2x} \end{aligned}$$

Para analizar completamente la gráfica de f se necesitan métodos de cálculo. Es posible demostrar que la gráfica tiene la forma indicada en la Figura 5.12. El "lomo" de la curva cerca del punto (0, 1) representa la naturaleza umbral del tratamiento; es decir, una pequeña dosis resulta en muy baja eliminación de células del tumor. Obsérvese que para x grande, un aumento en la dosis tiene poco efecto sobre la fracción sobreviviente. Para evaluar la dosis ideal que debe administrársele a un paciente, los especialistas en terapia de radiación deben tomar también en cuenta el número de células sanas que se destruyen durante un tratamiento. ■ ■ ■

Los problemas del tipo del que se ilustra en el ejemplo siguiente se presentan en el estudio del cálculo. (Véanse también los Ejercicios 9 a 12.)

EJEMPLO 4 Encontrar las raíces o ceros de f si $f(x) = x^2(-2e^{-2x}) + 2xe^{-2x}$.

SOLUCIÓN Puede factorizarse f de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x} \\ &= 2xe^{-2x}(1 - x). \end{aligned}$$

Para encontrar los ceros de f, se debe resolver la ecuación $f(x) = 0$. Puesto que $e^{-2x} > 0$ para toda x, se sigue que $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ o bien $1 - x = 0$. Por tanto, las raíces de f son 0 y 1. ■

Ejercicios 5.2

En los Ejercicios 1 a 7 use su conocimiento de la gráfica de $y = e^x$ como ayuda para trazar la gráfica de f.

1. (a) $f(x) = e^{-x}$ (b) $f(x) = -e^x$
2. (a) $f(x) = e^{2x}$ (b) $f(x) = 2e^x$
3. (a) $f(x) = e^{x+4}$ (b) $f(x) = e^{x+4}$
4. (a) $f(x) = e^{-2x}$ (b) $f(x) = -2e^x$
5. $f(x) = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$
6. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
7. $f(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

(*Sugerencia:* Tome las recíprocas de las ordenadas y en el Ejemplo 3.)

8. En estadística la **función de distribución normal** se define como

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{(-1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}$$

para números reales μ y $\sigma > 0$. (A μ se le conoce como la *media* y σ como la *variación* de la distribución.) Trace la gráfica de f para el caso $\sigma = 1$ y $\mu = 0$.

En los Ejercicios 9 a 12 determine las raíces (o ceros) de f.

9. $f(x) = xe^x + e^x$
10. $f(x) = -x^2e^{-x} + 2xe^{-x}$
11. $f(x) = x^3(4e^{4x}) + 3x^2e^{4x}$
12. $f(x) = x^2(2e^{2x}) + 2xe^{2x} + e^{2x} + 2xe^{2x}$

Simplifique las expresiones de los Ejercicios 13 y 14.

13. $\dfrac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$

14. $\dfrac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$

Ejercicios para calculadora 5.2

1. Una función exponencial W tal que $W(t) = W_0e^{kt}$ (para $k > 0$) describe el primer mes de crecimiento de cultivos como maíz, algodón y soya. La función W es el peso total en miligramos, W_0 es el peso el día del brote o emergencia, y t es el tiempo en días. Si, para un tipo de soya, $k = 0.2$ y $W_0 = 68$ mg, prediga el peso al final del mes ($t = 30$).

2. Refiérase al Ejercicio 1. A menudo es difícil medir el peso W_0 de la planta cuando acaba de emerger del suelo. Si, para una planta de algodón, $k = 0.21$ y $W(10) = 575$ mg, estime W_0.

3. En 1980 la población de Estados Unidos era aproximadamente de 227 millones, y ha ido creciendo a razón de 0.7% por año. Usando cálculo es posible demostrar que la población $N(t)$, a t años más tarde, se podría aproximar mediante $N(t) = 227e^{0.007t}$. Si continúa este patrón de crecimiento, prediga la población para el año 2000.

4. En 1980, la población estimada de la India era de 651 millones, y ha estado creciendo a una tasa de alrededor del 2% anual. La población $N(t)$, a t años más tarde, puede aproximarse mediante $N(t) = 651e^{0.02t}$. Suponiendo que esta tasa alta de crecimiento continúa, calcule la población de la India en el año 2000.

5. En la ciencia de la pesca se conoce como *cohorte* al conjunto de peces que resulta de una reproducción anual. Normalmente se supone que el número $N(t)$ que sigue vivo cuando han pasado t años, está dado por una función exponencial. Para el hipogloso del Pacífico, $N(t) = N_0e^{-0.02t}$, en la que N_0 es el tamaño inicial de la cohorte.

¿Qué porcentaje del número original vive después de 10 años?

6. El trazador (o marcador) radiactivo ^{51}Cr (isótopo del cromo) puede utilizarse para localizar la posición de la placenta de una mujer embarazada. A menudo se debe pedir esta sustancia a un laboratorio médico. Si se envían A_0 unidades (en microcuries), entonces, debido al decrecimiento radiactivo, el número de unidades $A(t)$ que quedan después de t días está dado por $A(t) = A_0e^{-0.0249t}$. Si se envían 35 unidades del trazador y éste tarda 2 días en llegar, ¿de cuántas unidades se dispone para el análisis? Si se necesitan 35 unidades para la prueba, ¿cuántas unidades se deben enviar?

7. En 1966 la Comisión Internacional de Captura de Ballenas protegió a la población mundial de la ballena azul contra los balleneros. En 1978 se pensaba que la población en el hemisferio sur era de 5000. Ahora, sin depredadores y con abastecimiento abundante de alimento, se espera que la población crezca exponencialmente de acuerdo con la fórmula $N(t) = 5000e^{0.047t}$, en la que t está en años. Pronostique la población en los años (a) 1990, (b) 2000.

8. La longitud (en centímetros) de muchos peces comerciales de t años de edad se puede aproximar bien mediante la función de crecimiento de von Bertalanffy $f(t) = a(1 - be^{-kt})$, en la que a, b y k son constantes.
   (a) Para el hipogloso del Pacífico, $a = 200$, $b = 0.956$ y $k = 0.18$. Estime la longitud de un hipogloso típico de 10 años.
   (b) ¿Cómo se interpreta la constante a en la fórmula?

9. En ciertas condiciones, la presión atmosférica p (en pulgadas) a la altura de h pies está dada por $p = 29e^{-0.000034h}$. ¿Cuál es la presión a una altura de 40 000 pie?

10. Comenzando con c miligramos del isótopo del polonio ^{210}Po, la cantidad restante a los t días puede ser aproximada por $A = ce^{-0.00495t}$. Si la cantidad inicial es de 50 mg, calcule redondeando a centésimos, la cantidad restante a los (a) 30 días; (b) 180 días; (c) 365 días.

5.3 Funciones logarítmicas

Si $f(x) = a^x$ y $a > 1$, entonces f es creciente sobre todo $\mathbb{R}$, mientras que si $0 < a < 1$, f es decreciente (véase la Figura 5.2). Por consiguiente, si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces f es biunívoca (o uno a uno) y por lo tanto tiene una función inversa f^{-1} (véase la Sección 3.7). La inversa de una función exponencial de base a se llama **función logarítmica de base a** y se representa por $\log_a$. Sus valores se representan como $\log_a(x)$ o como $\log_a x$, que se lee "**logaritmo de x en base a**". Puesto que

$$y = f^{-1}(x) \quad \text{si y sólo si} \quad x = f(y),$$

la definición de $\log_a$ se puede expresar de la siguiente manera:

DEFINICIÓN DE $\log_a x$

$$y = \log_a x \quad \text{si y sólo si} \quad x = a^y.$$

Puesto que el dominio y el contradominio de la función exponencial de base a son $\mathbb{R}$ y los números reales positivos, respectivamente, el dominio de su inversa $\log_a x$ son los números reales positivos, y su contradominio $\mathbb{R}$. Por esta razón, en la definición, $x > 0$ y y está en $\mathbb{R}$.

Nótese que

$$\text{si} \quad y = \log_a x, \qquad \text{entonces} \quad x = a^y = a^{\log_a x}.$$

En palabras, $\log_a x$ *es el exponente al que debe elevarse a para obtener* x. Ejemplos:

$$\log_2 8 = 3 \qquad \text{ya que} \quad 2^3 = 8$$
$$\log_5 \tfrac{1}{25} = -2 \qquad \text{ya que} \quad 5^{-2} = \tfrac{1}{25}$$
$$\log_{10} 10\,000 = 4 \qquad \text{ya que} \quad 10^4 = 10\,000.$$

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata de la definición de logaritmo.

TEOREMA

(i) $a^{\log_a x} = x$ para todo $x > 0$
(ii) $\log_a a = a$
(iii) $\log_a 1 = 0$

La parte (i) ya se ha demostrado. Para verificar (ii) y (iii) es suficiente observar que $a^1 = a$ y $a^0 = 1$, respectivamente.

EJEMPLO 1 Calcular s en cada uno de los siguientes casos:

(a) $\log_4 2 = s$ (b) $\log_5 s = 2$ (c) $\log_s 8 = 3$

SOLUCIÓN

(a) Si $\log_4 2 = s$, entonces $4^s = 2$ y de aquí $s = \frac{1}{2}$.

(b) Si $\log_5 s = 2$, entonces $5^2 = s$ y de aquí $s = 25$.

(c) Si $\log_s 8 = 3$, entonces $s^3 = 8$ y de aquí $s = \sqrt[3]{8} = 2$. ■

EJEMPLO 2 Resolver la ecuación $\log_4(5 + x) = 3$.

SOLUCIÓN Si $\log_4(5 + x) = 3$, entonces, por la definición de logaritmo,

$$5 + x = 4^3, \qquad \text{o bien} \qquad 5 + x = 64.$$

Por consiguiente, la solución es $x = 59$. ■

Las siguientes leyes son fundamentales para trabajar con logaritmos de números reales positivos u y w.

LEYES DE LOS LOGARITMOS

(i) $\log_a (uw) = \log_a u + \log_a w$
(ii) $\log_a (u/w) = \log_a u - \log_a w$
(iii) $\log_a (u^c) = c \log_a u$ para todo número real c.

DEMOSTRACIÓN Para demostrar (i) empezamos por hacer

$$r = \log_a u \quad \text{y} \quad s = \log_a w.$$

Por la definición de logaritmo, esto implica que $a^r = u$ y $a^s = w$. Por lo tanto,

$$a^r a^s = uw$$

y de aquí,

$$a^{r+s} = uw.$$

Usando otra vez la definición de logaritmo, la última ecuación es equivalente a

$$r + s = \log_a (uw).$$

Sustituyendo r y s del primer paso de la demostración, obtenemos

$$\log_a u + \log_a w = \log_a uw.$$

Esto completa la demostración de (i).
Para demostrar (ii), empezaremos como en la demostración de (i) pero esta vez vamos a dividir a^r entre a^s, de este modo

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{u}{w} \quad \text{o bien} \quad a^{r-s} = \frac{u}{w}.$$

La última ecuación, por la definición de logaritmo, es equivalente a

$$r - s = \log_a (u/w).$$

Sustituyendo r y s, obtenemos

$$\log_a u - \log_a w = \log_a (u/w)$$

Esto prueba la ley (ii).

Finalmente, si c es cualquier número real, entonces

$$(a^r)^c = u^c \quad \text{o bien} \quad a^{cr} = u^c.$$

De acuerdo con la definición de logaritmo, la última igualdad implica que

$$cr = \log_a u^c.$$

Sustituyendo r obtenemos

$$c \log_a u = \log_a u^c.$$

Esto demuestra la ley (iii). □

Los ejemplos siguientes muestran cómo se utilizan las leyes de los logaritmos.

EJEMPLO 3 Si $\log_a 3 = 0.4771$ y $\log_a 2 = 0.3010$, calcule las siguientes expresiones

(a) $\log_a 6$ (b) $\log_a \frac{3}{2}$ (c) $\log_a \sqrt{2}$ (d) $\dfrac{\log_a 3}{\log_a 2}$

Es importante notar que no hay leyes para expresar $\log_a(u + w)$ o bien $\log_a(u - w)$ en términos de logaritmos más simples. Es evidente que

$$\log_a (u + w) \neq \log_a u + \log_a w,$$

puesto que la última suma corresponde a $\log_a (uw)$. De la misma manera

$$\log_a (u - w) \neq \log_a u - \log_a w.$$

Frecuentemente ocurren funciones logarítmicas en aplicaciones. Efectivamente, si dos variables u y v están relacionadas tal que u es una función exponencial de v, la v es una función logarítmica de u.

EJEMPLO 8 El número N de bacterias en cierto cultivo después de t horas, está dado por $N = (1000)2^t$. Exprese t como una función logarítmica de N con base 2.

SOLUCIÓN Si $N = (1000)2^t$, entonces $2^t = \dfrac{N}{1000}$. Cambiando a la forma logarítmica

$$t = \log_2 \frac{N}{1000}.$$ ■

Ejercicios 5.3

En los Ejercicios 1 a 8, cambie las ecuaciones dadas, a la forma logarítmica.

1. $4^3 = 64$
2. $3^5 = 243$
3. $2^7 = 128$
4. $5^3 = 125$
5. $10^{-3} = 0.001$
6. $10^{-2} = 0.01$
7. $t^r = s$
8. $v^w = u$

En los Ejercicios 9 a 16, cambie las ecuaciones dadas a la forma exponencial.

9. $\log_{10} 1000 = 3$
10. $\log_3 81 = 4$
11. $\log_3 \frac{1}{243} = -5$
12. $\log_4 \frac{1}{64} = -3$
13. $\log_7 1 = 0$
14. $\log_9 1 = 0$
15. $\log_t r = p$
16. $\log_v w = q$

En los Ejercicios 17 a 22, calcule las expresiones dadas.

17. $\log_4 \frac{1}{16}$
18. $\log_2 32$
19. $\log_{10} 100$
20. $\log_8 64$
21. $10^{\log_{10} 5}$
22. $\log_{10} 0.0001$

En los Ejercicios 23 a 34, resuelva las ecuaciones dadas.

23. $\log_3 (x - 4) = 2$
24. $\log_2 (x - 5) = 4$
25. $\log_9 x = \frac{3}{2}$
26. $\log_4 x = -\frac{3}{2}$
27. $\log_5 x^2 = -2$
28. $\log_{10} x^2 = -4$
29. $\log_6 (2x - 3) = \log_6 12 - \log_6 3$
30. $2 \log_3 x = 3 \log_3 5$
31. $\log_2 x - \log_2 (x + 1) = 3 \log_2 4$
32. $\log_5 x + \log_5 (x + 6) = \frac{1}{2} \log_5 9$
33. $\log_{10} x^2 = \log_{10} x$
34. $\frac{1}{2} \log_5 (x - 2) = 3 \log_5 2 - \frac{3}{2} \log_5 (x - 2)$

En los Ejercicios 35 a 42, exprese el logaritmo dado en términos de los logaritmos de x, y y z.

35. $\log_a \dfrac{x^2 y}{z^3}$
36. $\log_a \dfrac{x^3 y^2}{z^5}$
37. $\log_a \dfrac{\sqrt{x} z^2}{y^4}$
38. $\log_a x \sqrt[3]{\dfrac{y^2}{z^4}}$

39. $\log_a \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{yz^5}}$

40. $\log_a \dfrac{\sqrt{x}y^6}{\sqrt[3]{z^2}}$

41. $\log_a \sqrt{x\sqrt{yz^3}}$

42. $\log_a \sqrt[3]{x^2y\sqrt{z}}$

En los Ejercicios 43 a 46 escriba la expresión dada como un solo logaritmo.

43. $2\log_a x + \frac{1}{3}\log_a (x-2) - 5\log_a (2x+3)$

44. $5\log_a x - \frac{1}{2}\log_a (3x-4) + 3\log_a (5x+1)$

45. $\log_a (y^2x^3) - 2\log_a x\sqrt[3]{y} + 3\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right)$

46. $2\log_a \dfrac{y^3}{x} - 3\log_a y + \frac{1}{2}\log_a x^4y^2$

47. La cantidad de radio puro que queda después de t años, cuando inicialmente se tenían q_0 miligramos, es $q = q_0(2)^{-t/1600}$. Use logaritmos de base 2 para evaluar t en términos de q y de q_0.

48. El isótopo radiactivo ^{210}Bi se desintegra conforme a la ley $Q = k(2)^{-t/5}$, en la que t está en días. Use logaritmos de base 2 para evaluar t en términos de Q y de k.

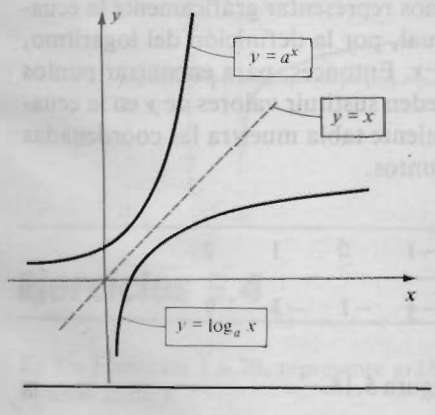
49. El número N de bacterias en un cierto cultivo en el tiempo t, está dado por $N = 10^4(3)^t$. Use logaritmos de base 3 para determinar t en función de N.

50. Cuando una dimensión lineal x (como la altura) de un organismo está relacionada con el volumen o con el peso y, la relación entre $\log_a y$ y $\log_a x$ a menudo es lineal, en el sentido de que $\log_a y = k\log_a x + \log_a b$, para constantes k y $b > 0$. Escriba de nuevo esta ecuación usando las leyes de los logaritmos y demuestre que y y x están relacionados mediante una ecuación de la forma $y = cx^d$, para constantes c y d.

5.4 Gráficas de las funciones logarítmicas

Puesto que la función logarítmica $\log_a$ es la inversa de la función exponencial de base a, la gráfica de $y = \log_a x$ se puede obtener reflejando la gráfica de $y = a^x$ a través de la recta $y = x$, que biseca los cuadrantes I y III (véanse las págs. 159 y 160). Este hecho se ilustra en la Figura 5.13 para el caso en que $a > 1$.

FIGURA 5.13



También es posible trazar la gráfica localizando algunos puntos. Puesto que

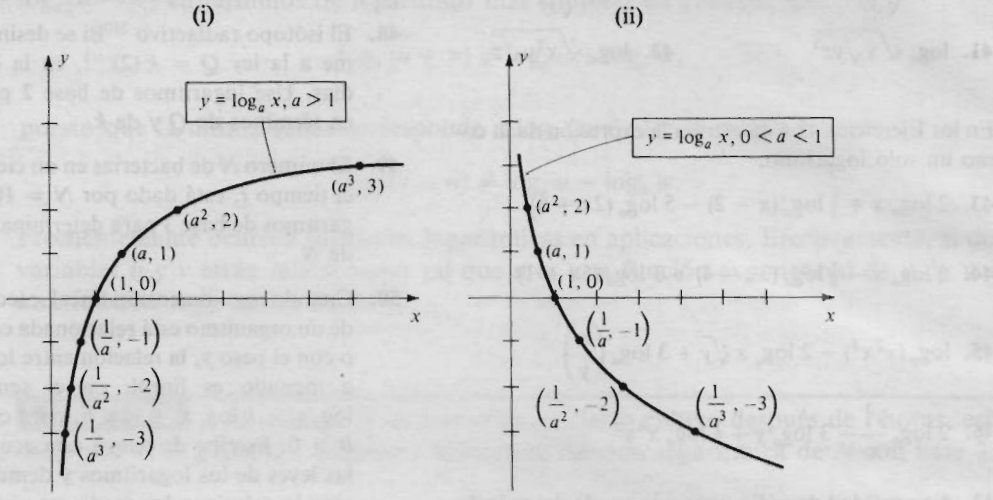
$$y = \log_a x \quad \text{si y sólo si} \quad x = a^y,$$

las coordenadas de los puntos sobre la gráfica de $y = \log_a x$ se pueden encontrar usando la ecuación $x = a^y$. Esto conduce a la siguiente tabla:

y	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	$\dfrac{1}{a^3}$	$\dfrac{1}{a^2}$	$\dfrac{1}{a}$	1	a	a^2	a^3

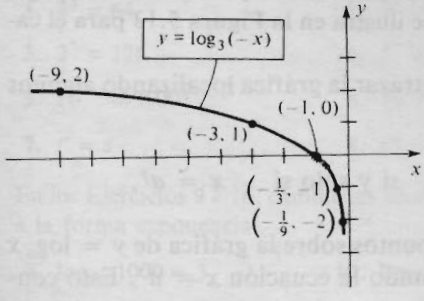
Si $a > 0$, se obtiene la Figura 5.14(i). En este caso, la función f es creciente en todo su dominio. Si $0 < a < 1$, la gráfica tiene la forma que se ilustra en la Figura 5.14(ii), en donde f es una función decreciente.

FIGURA 5.14



Funciones definidas por expresiones de la forma $\log_a p$, en donde p es alguna expresión en x, ocurren con frecuencia tanto en matemáticas como en sus aplicaciones. Las funciones de este tipo pertenecen a la familia logarítmica; sin embargo, las gráficas pueden diferir de las presentadas en las Figuras 5.13 y 5.14, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

FIGURA 5.15



EJEMPLO 1 Trazar la gráfica de f siendo $f(x) = \log_3(-x)$ para $x < 0$.

SOLUCIÓN Si $x < 0$, entonces $-x > 0$, y por lo tanto, $\log_3(-x)$ existe. Queremos representar gráficamente la ecuación $y = \log_3(-x)$ la cual, por la definición del logaritmo, es equivalente a $3^y = -x$. Entonces, para encontrar puntos en la gráfica de f, se pueden sustituir valores de y en la ecuación $x = -(3^y)$. La siguiente tabla muestra las coordenadas de algunos de varios puntos.

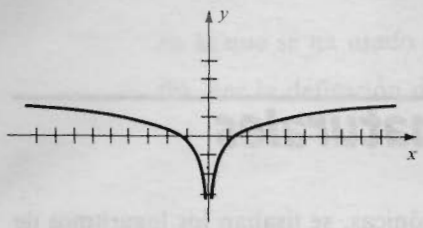
y	-2	-1	0	1	2
x	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	-9

Localizando estos puntos se obtiene el trazo de la Figura 5.15. ■

EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de la ecuación $y = \log_3 |x|$ si $x \neq 0$.

FIGURA 5.16

$y = \log_3 |x|$



SOLUCIÓN Puesto que $|x| > 0$ para toda $x \neq 0$, existen puntos en la gráfica correspondientes tanto a valores negativos de x como a valores positivos. Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y de aquí que del lado derecho del eje y, la gráfica coincide con la gráfica de $y = \log_3 x$, es decir con $x = 3^y$. Si $x < 0$ entonces $|x| = -x$ y la gráfica es la misma que la de $y = \log_3 (-x)$ (véase el Ejemplo 1). La gráfica aparece en la Figura 5.6, y se observa que es simétrica respecto al eje y. ■

EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de

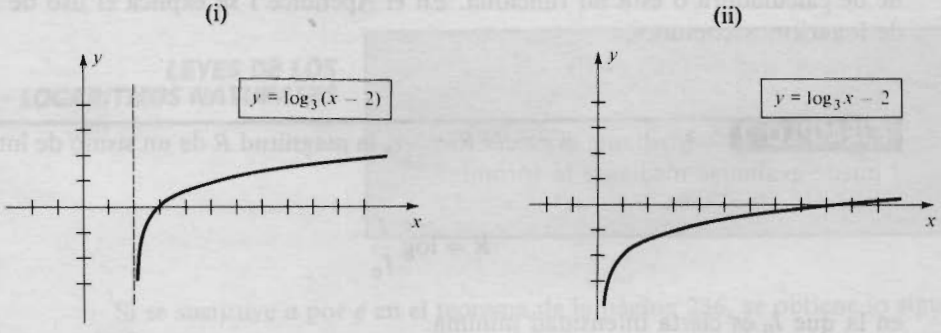
(a) $y = \log_3 (x - 2)$; (b) $y = \log_3 x - 2$.

SOLUCIÓN

(a) Se puede obtener la gráfica de $y = \log_3 (x - 2)$ trasladando la gráfica de $y = \log_3 x$ dos unidades hacia la derecha (véase la discusión de *traslaciones horizontales* en la Sección 3.4). Puesto que la gráfica de $y = \log_3 x$ es la parte de la gráfica de la Figura 5.16 que está a la derecha del eje y, conduce al trazo de la Figura 5.17(i).

(b) La gráfica de $y = \log_3 x - 2$ se puede obtener trasladando la gráfica de $y = \log_3 x$ dos unidades hacia abajo. (Véase *traslaciones verticales*, Sección 3.4.) Así se obtiene el trazo de la Figura 5.17(ii). Nótese que la intercepción x está dada por $\log_3 x = 2$ o por $x = 3^2 = 9$.

FIGURA 5.17



■

Ejercicios 5.4

En los Ejercicios 1 a 20, represente gráficamente la función dada f.

1. $f(x) = \log_2 x$
2. $f(x) = \log_5 x$
3. $f(x) = \log_4 x$
4. $f(x) = \log_{10} x$
5. $f(x) = \log_2 (x + 3)$
6. $f(x) = \log_2 (x - 3)$
7. $f(x) = \log_2 x + 3$
8. $f(x) = \log_2 x - 3$
9. $f(x) = \log_3 (3x)$
10. $f(x) = \log_2 (x^2)$
11. $f(x) = 3 \log_3 x$
12. $f(x) = \log_2 (x^3)$
13. $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$
14. $f(x) = \log_2 |x|$

15. $f(x) = \log_3 (1/x)$ 16. $f(x) = \log_3 (2 - x)$ 19. $f(x) = \log_2 |x - 5|$

17. $f(x) = 1/(\log_3 x)$ 18. $f(x) = |\log_2 x|$ 20. $f(x) = \log_3 |x + 1|$

5.5 Logaritmos comunes y naturales

Antes de que se inventaran las calculadoras electrónicas, se usaban los logaritmos de base 10, para efectuar operaciones numéricas complicadas en las que intervenían productos, cocientes y potencias de números reales. La base 10 se empleaba porque era la más apropiada para manejar números que están expresados en forma decimal. Los logaritmos de base 10 se conocen como **logaritmos comunes**. El símbolo $\log x$ se utiliza como abreviatura de $\log_{10} x$, se tiene así la siguiente definición:

DEFINICIÓN DE LOGARITMOS COMUNES

$$\log x = \log_{10} x \quad \text{para todo} \quad x > 0.$$

Puesto que actualmente se puede disponer de calculadoras de bajo costo relativo, hay poca necesidad de usar a los logaritmos comunes como herramienta para trabajos de calcular. Sin embargo, la base 10 se presenta en las aplicaciones y por ello muchas calculadoras tienen la tecla [log] que sirve para aproximar logaritmos comunes. El Apéndice II contiene una tabla de logaritmos comunes que puede usarse cuando no se dispone de calculadora o ésta no funciona. En el Apéndice I se explica el uso de la tabla de logaritmos comunes.

EJEMPLO 1 Mediante la *escala Richter*, la magnitud R de un sismo de intensidad I puede evaluarse mediante la fórmula:

$$R = \log \frac{I}{I_0}$$

en la que I_0 es cierta intensidad mínima.

(a) Encontrar R suponiendo que la intensidad de un sismo es $(1000)I_0$.

(b) Expresar I en términos de R y de I_0.

SOLUCIÓN

(a) Si $I = (1000)I_0$, entonces

$$R = \log \frac{I}{I_0} = \log \frac{(1000)I_0}{I_0} = \log (1000).$$

Se podría usar una calculadora para evaluar log (1000) o escribir

$$\log (1000) = \log 10^3 = 3 \log 10 = 3(1) = 3$$

en la que se ha usado el hecho de que $\log_a a = 1$. Por lo tanto, $R = 3$.

(b) Por la definición de logaritmo de base 10,

$$\text{si} \quad R = \log \frac{I}{I_0}, \quad \text{entonces} \quad \frac{I}{I_0} = 10^R.$$

Por consiguiente, $$I = I_0(10^R).$$ ■

En la Sección 5.2 se definió la función exponencial natural f por medio de la ecuación $f(x) = e^x$. La función logarítmica en base e se llama **función logaritmo natural.** Se utiliza el símbolo **ln** x (que suele leerse "ele-ene de x" como abreviatura de $\log_e x$ y se denomina **logaritmo natural de** x. Por lo tanto, *el logaritmo natural y la función exponencial natural son funciones inversas una de la otra.* Se enunciará la definición para tenerla como referencia.

DEFINICIÓN DE LOGARITMO NATURAL

$$\ln x = \log_e x \quad \text{para todo} \quad x > 0.$$

Puesto que $e \approx 3$, la gráfica de $y = \ln x$ se parece a la gráfica de $y = \log_3 x$. Las leyes de los Logaritmos Naturales son como sigue.

LEYES DE LOS LOGARITMOS NATURALES

(i) $\ln (uv) = \ln u + \ln v$

(ii) $\ln \dfrac{u}{v} = \ln u - \ln v$

(iii) $\ln u^c = c \ln u$

Si se sustituye a por e en el teorema de la página 236, se obtiene lo siguiente para $x > 0$:

$$e^{\ln x} = x, \qquad \ln e = 1, \qquad \ln 1 = 0.$$

Muchas calculadoras tienen una tecla marcada $\boxed{\ln x}$, que se puede usar para aproximar logaritmos naturales. En la Tabla 3 del Apéndice II se da una tabla reducida de valores de $\ln x$.

EJEMPLO 2 Emplear una calculadora para aproximar log 436; ln 436; log 0.0436 y ln 0.0436.

SOLUCIÓN Introduciendo los números indicados y oprimiendo las teclas adecuadas, se obtienen las siguientes aproximaciones:

$$\log 436 \approx 2.6394865$$

$$\ln 436 \approx 6.0776422$$

$$\log 0.0436 \approx -1.3605135$$

$$\ln 0.0436 \approx -3.1326981$$

■

EJEMPLO 3 La Ley de Newton para el Enfriamiento establece que la rapidez a la que se enfría un objeto es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y su medio circulante. La Ley de Newton se utiliza para demostrar que en ciertas condiciones la temperatura T de un objeto en un tiempo t está dada por $T = 75e^{-2t}$. Expresar t como función de T.

SOLUCIÓN La ecuación $T = 75e^{-2t}$ puede escribirse

$$e^{-2t} = \frac{T}{75}.$$

Usando logaritmos naturales, obtenemos

$$-2t = \log_e \frac{T}{75} = \ln \frac{T}{75}.$$

En consecuencia,

$$t = -\tfrac{1}{2} \ln \frac{T}{75} \quad \text{o bien} \quad t = -\tfrac{1}{2}[\ln T - \ln 75].$$

■

EJEMPLO 4 Si se proyecta un haz de luz de intensidad k verticalmente hacia abajo, dentro del agua, entonces su intensidad $I(x)$ a una profundidad de x metros es $I(x) = ke^{-1.4x}$. ¿A qué profundidad es la intensidad la mitad de su valor en la superficie?

SOLUCIÓN En la superficie $x = 0$, y la intensidad es

$$I(0) = ke^0 = k.$$

Se desea encontrar el valor de x tal que $I(x) = \frac{1}{2}k$; es decir,

$$ke^{-1.4x} = \tfrac{1}{2}k \quad \text{o bien} \quad e^{-1.4x} = \tfrac{1}{2}$$

Usando logaritmos naturales,

$$-1.4x = \ln \tfrac{1}{2}$$

o sea

$$-1.4x = \ln 1 - \ln 2 = 0 - \ln 2 = -\ln 2.$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{-\ln 2}{-1.4} \approx \frac{-0.693}{-1.4} \approx 0.5 \text{ m}.$$

■

Para resolver ciertos problemas se necesita evaluar x cuando se conoce $\log x$ o $\ln x$. Una manera de lograrlo es utilizando la tecla de función inversa [INV]. Si se pulsa primero [INV] y después se oprime [log] se obtiene la *función inversa del logaritmo* $\log^{-1}$. Recuérdese que $\log^{-1}$ es la función exponencial de base 10. Puesto que $\log^{-1}(\log x) = x$, se puede obtener x introduciendo $\log x$ y oprimiendo después sucesivamente, [INV] y [log]. De la misma manera, dado $\ln x$ se puede encontrar x ingresando $\ln x$ y oprimiendo luego [INV] [ln x]. Este procedimiento se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Aproximar x con tres cifras decimales si:

(a) $\log x = 1.7959$ (b) $\ln x = 4.7$

SOLUCIÓN

(a) Dado $\log x = 1.7959$,

Ingresar: 1.7959

Oprimir [INV] [log]: 62.502876

Por tanto, $x \approx 62.503$.

(b) Dado $\ln x = 4.7$,

Ingresar: 4.7

Oprimir [INV] [ln x]: 109.94717

Por lo tanto, $x \approx 109.947$. ■

La parte (a) de este ejemplo se pudo haber resuelto, alternativamente, observando que como los logaritmos comunes tienen base 10,

$$\text{si} \quad \log x = 1.7959, \quad \text{entonces} \quad x = 10^{1.7959}.$$

El número x se puede aproximar usando la tecla [y^x].

De la misma manera, la parte (b) se pudo haber resuelto usando el hecho de que el logaritmo natural tiene base e. Específicamente,

$$\text{si} \quad \ln x = 4.7, \quad \text{entonces} \quad x = e^{4.7}.$$

Después se pudo usar la Tabla 2 del Apéndice II o una calculadora para aproximar x.

Por último, a veces es necesario *cambiar la base* de un logaritmo expresando $\log_b u$ en términos de $\log_a u$, para algún número real positivo $b \neq 1$. Se empieza con las ecuaciones equivalentes

$$v = \log_b u \quad \text{y} \quad b^v = u.$$

Tomando el logaritmo de base a de los dos miembros de la segunda ecuación se obtiene

$$\log_a b^v = \log_a u,$$

o lo que es equivalente

$$v \log_a b = \log_a u.$$

Resolviendo para evaluar v (es decir, $\log_b u$) resulta la fórmula (i) del siguiente grupo:

FÓRMULAS PARA CAMBIO DE BASE

$$\text{(i) } \log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b} \qquad \text{(ii) } \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Para obtener la fórmula (ii), se hace $u = a$ en (i) y se usa el hecho de que $\log_a a = 1$. Si $a = e$ y $b = 10$ en las fórmulas para cambio de base se obtienen los siguientes casos especiales:

$$\log u = \frac{\ln u}{\ln 10} \quad \text{y} \quad \log e = \frac{1}{\ln 10}.$$

Ejercicios 5.5

En los Ejercicios 1 a 12 aproxime x con tres cifras significativas.

1. $\log x = 3.6274$
2. $\log x = 1.8965$
3. $\log x = 0.9469$
4. $\log x = 4.9680$
5. $\log x = -1.6253$
6. $\log x = -2.2118$
7. $\ln x = 2.3$
8. $\ln x = 3.7$
9. $\ln x = 0.05$
10. $\ln x = 0.95$
11. $\ln x = -1.6$
12. $\ln x = -5$
13. Utilizando la fórmula de la escala Richter $R = \log (I/I_0)$, determine la magnitud de un sismo cuya intensidad es
    (a) 100 veces I_0;
    (b) 10 000 veces I_0;
    (c) 100 000 veces I_0.
14. Refiérase al Ejercicio 13. Los terremotos de mayor magnitud registrados han estado entre 7 y 9 en la escala Richter. Calcule las intensidades correspondientes en términos de I_0.
15. La siguiente fórmula, que es válida para los terremotos en el este de Estados Unidos, relaciona la magnitud R del sismo con el área que lo rodea A (en millas cuadradas) que es afectada por el temblor:

$$R = 2.3 \log (A + 34\,000) - 7.5.$$

Resuélvala para evaluar A en términos de R.

16. Para el oeste de Estados Unidos, la fórmula para área y magnitud (véase el Ejercicio 15) es de la forma

$$R = 2.3 \log (A + 3000) - 5.1.$$

Si A_1 es el área afectada por un sismo de magnitud R en el oeste, mientras que A_2 es el área afectada por un terremoto similar en el este, obtenga una fórmula para A_2/A_1 en términos de R.

17. La intensidad del sonido que percibe el oído humano tiene diferentes niveles. Una fórmula para hallar el nivel de intensidad α, en decibeles, que corresponde a intensidad de sonido I es $\alpha = 10 \log (I/I_0)$ donde I_0 es un valor especial de I que corresponde al sonido más débil que puede ser detectado por el oído bajo ciertas condiciones. Encuentre α en los casos siguientes:
    (a) I es 10 veces más grande que I_0.
    (b) I es 1 000 veces más grande que I_0.
    (c) I es 10 000 veces más grande que I_0. (Éste es el nivel de intensidad promedio de la voz.)

18. Un nivel de intensidad del sonido de 140 decibeles produce dolor en un oído humano común. ¿Cuántas veces, aproximadamente, debe ser I más grande de I_0 para que α alcance este nivel? (Véase el Ejercicio 17.)

19. Los químicos usan un número denotado pH para describir cuantitativamente la acidez o la basicidad de ciertas soluciones. Por definición,

$$\text{pH} = -\log [\text{H}^+]$$

donde $[\text{H}^+]$ es la concentración de iones hidrógeno en moles por litro. Aproxime el pH de las siguientes soluciones dados sus correspondientes $[\text{H}^+]$:
(a) Vinagre: $[\text{H}^+] \approx 6.3 \times 10^{-3}$.
(b) Zanahorias: $[\text{H}^+] \approx 1.0 \times 10^{-5}$.
(c) Agua de mar: $[\text{H}^+] \approx 5.0 \times 10^{-9}$.

20. Aproxime la concentración de iones hidrógeno $[\text{H}^+]$ en cada una de las siguientes sustancias. (Use el Ejercicio 19.)
(a) Manzanas: pH $\approx$ 3.0.
(b) Cerveza: pH $\approx$ 4.2.
(c) Leche: pH $\approx$ 6.6.

21. Una solución es considerada ácida si $[\text{H}^+] > 10^{-7}$ o básica si $[\text{H}^+] < 10^{-7}$. ¿Cuáles son las correspondientes desigualdades en relación al pH?

22. Muchas soluciones tienen un pH entre 1 y 14. ¿Cuál es el intervalo correspondiente del contenido de iones hidrógeno $[\text{H}^+]$?

23. La corriente I en el tiempo t en un circuito eléctrico determinado es $I = 20e^{-Rt/L}$, en donde R y L denotan la resistencia y la inductancia, respectivamente. Utilice logaritmos naturales para evaluar t en términos de las variables restantes.

24. Un condensador eléctrico (capacitor) con carga inicial Q_0 se deja descargar. Después de t segundos, la carga Q es $Q = Q_0e^{kt}$, en la que k es una constante. Use logaritmos naturales para evaluar t en términos de Q_0, Q y k.

25. En ciertas condiciones, la presión atmosférica p a la altura h, está dada por $p = 29e^{-0.000034h}$. Use logaritmos naturales para determinar h como función de p.

26. Si p representa el precio de venta de un bien y x es la demanda correspondiente (cantidad vendida por día), entonces con frecuencia la relación entre p y x es $p = p_0e^{-ax}$ en la que p_0 y a son constantes positivas. Exprese a x como función de p.

27. La *fórmula de Ehrenberg* $\ln W = \ln 2.4 + (1.84)h$ es una fórmula empírica que relaciona la estatura h (en metros) con el peso W (en kg) de niños entre 5 y 13 años de edad. La fórmula ha sido verificada en muchos países. Exprese W como función de h.

28. Un cohete de masa m_1 se llena con combustible cuya masa inicial es m_2. Suponiendo que se desprecian las fuerzas de fricción, la masa total del cohete en el tiempo t está relacionada con su velocidad vertical hacia arriba mediante la fórmula $v = -a \ln m + b$ para constantes a y b. En el tiempo $t = 0$ se tiene $v = 0$ y $m = m_1 + m_2$. Cuando se ha quemado todo el combustible $m = m_1$. Usando esta información, obtenga una fórmula para la velocidad del cohete una vez que se ha consumido todo el combustible. (Escriba la fórmula en términos de un logaritmo.)

29. Si n es el número promedio de terremotos (en todo el mundo) en un año, cuya magnitud está entre R y $R + 1$ (en la escala Richter), entonces $\log n = 7.7 - (0.9)R$.
(a) Resuelva para evaluar n en términos de R.
(b) Calcule n si $R = 4$, 5 y 6.

30. La energía E (en ergs) liberada durante un terremoto de magnitud R está dada por la fórmula $\log E = 1.4 + (1.5)R$.
(a) Despeje E en términos de R.
(b) Calcule la energía liberada durante el famoso terremoto de Alaska de 1964, que registró 8.4 en la escala Richter.

31. Una cierta sustancia radiactiva decrece según la fórmula $q(t) = q_0e^{-0.0063t}$, en donde q_0 es la cantidad inicial de sustancia y t es el tiempo en días. Calcule aproximadamente su semivida (o "vida media"), es decir, el número de días en que se reduce a la mitad la cantidad de sustancia.

32. La presión del aire atmosférico $p(h)$, en libras por pulgada cuadrada, a una altitud de h pies sobre el nivel del mar, puede ser evaluada por la fórmula $p(h) = 14.7e^{-0.0000385h}$. ¿Aproximadamente a qué altura h la presión atmosférica es (a) de 10 lb/pulg^2? (b) igual a la mitad de su valor al nivel del mar?

33. Use la fórmula de interés compuesto para hallar cuánto tardará en duplicarse un capital si se invierte a una tasa del 6% anual capitalizada mensualmente.

34. Si el interés se capitaliza continuamente a una tasa del 10% anual, la fórmula del interés compuesto toma la forma $A = Pe^{0.1t}$. Una persona ha calculado que debe depositar alrededor de \$5 600 para producir \$25 000 que necesita para pagar la universidad de su hijo. Con el objeto de tener una reserva para gastos inesperados, decide depositar \$6 000. ¿Cuántos años tardará su depósito inicial en crecer hasta \$25 000?

35. La población $N(t)$ (en millones) de Estados Unidos t años después de 1980 se puede aproximar mediante la fórmula $N(t) = 227e^{0.007t}$. ¿Cuándo será la población el doble de lo que era en 1980?

36. La población $N(t)$ de la India (en millones) t años después de 1980 puede aproximarse por $N(t) = 651e^{0.02t}$. ¿Cuándo será de mil millones?

5.6 Ecuaciones exponencial y logarítmica

Si las variables de las ecuaciones están como exponentes o logaritmos, las ecuaciones suelen llamarse **ecuaciones exponenciales** o **logarítmicas**, respectivamente. Los siguientes ejemplos ilustran las técnicas para resolverlas.

EJEMPLO 1 Resolver la ecuación $3^x = 21$.

SOLUCIÓN Tomando el logaritmo común de ambos lados de la igualdad y usando la parte (iii) de las leyes de los logaritmos, obtenemos

$$\log (3^x) = \log 21$$

$$x \log 3 = \log 21$$

$$x = \frac{\log 21}{\log 3}.$$

Si se quiere una aproximación puede utilizarse la Tabla 1 del Apéndice II y se obtiene así

$$x \approx \frac{1.3222}{0.4771} \approx 2.77$$

Un modo de comprobar parcialmente el resultado es observando que siendo $3^2 = 9$ y $3^3 = 27$, el número x tal que $3^x = 21$ debe encontrarse entre 2 y 3, un poco más cerca de 3 que de 2.

Se podría haber despejado x usando logaritmos naturales. En este caso la calculadora da

$$x = \frac{\ln 21}{\ln 3} \approx \frac{3.0445224}{1.0986123}$$

$$\approx 2.7712437 \approx 2.77. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Resolver la ecuación $5^{2x+1} = 6^{x-2}$.

SOLUCIÓN Tomando el logaritmo de ambos lados y usando la ley (iii) obtenemos

$$(2x + 1) \log 5 = (x - 2) \log 6.$$

Podemos, ahora, encontrar x del siguiente modo

$$\begin{aligned} 2x \log 5 + \log 5 &= x \log 6 - 2 \log 6 \\ 2x \log 5 - x \log 6 &= -\log 5 - 2 \log 6 \\ x(2 \log 5 - \log 6) &= -(\log 5 + \log 6^2) \\ x &= \frac{-(\log 5 + \log 36)}{2 \log 5 - \log 6} \\ &= \frac{-\log (5 \cdot 36)}{\log 5^2 - \log 6}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $$x = -\frac{\log 180}{\log \frac{25}{6}}$$

Si se desea una solución aproximada, se puede proceder como en el Ejemplo 1:

$$x \approx -\frac{2.2553}{0.6198} \approx -3.64.$$

Se podría haber usado también logaritmos naturales:

$$x = -\frac{\ln 180}{\ln \frac{25}{6}} \approx -\frac{5.1929569}{1.4271164} \approx -3.64. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Resolver la ecuación $\log (5x - 1) - \log (x - 3) = 2$.

SOLUCIÓN La ecuación dada se puede escribir como

$$\log \frac{5x - 1}{x - 3} = 2.$$

Usando la definición de logaritmo con $a = 10$, tenemos

$$\frac{5x - 1}{x - 3} = 10^2.$$

Por lo tanto,

$$5x - 1 = 10^2(x - 3) = 100x - 300 \quad \text{o bien} \quad 299 = 95x$$

y de aquí, $$x = \frac{299}{95}.$$

Se deja al lector verificar que ésta es la solución de la ecuación. ■

EJEMPLO 4 Resolver la ecuacion

$$\frac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3.$$

SOLUCIÓN Multiplicando ambos lados de la ecuación dada primero por 2, obtenemos

$$5^x - 5^{-x} = 6.$$

Si después multiplicamos ambos lados por 5^x, resulta

$$5^{2x} - 1 = 6(5^x),$$

que se puede escribir

$$(5^x)^2 - 6(5^x) - 1 = 0.$$

Haciendo $u = 5^x$, obtenemos la ecuación cuadrática en u.

$$u^2 - 6u - 1 = 0.$$

Aplicando la fórmula cuadrática,

$$u = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4}}{2} = 3 \pm \sqrt{10},$$

es decir, $5^x = 3 \pm\sqrt{10}$. Puesto que 5^x nunca es negativo debemos descartar el número $3 - \sqrt{10}$ y así

$$5^x = 3 + \sqrt{10}.$$

Tomando el logaritmo común de ambos lados y usando la parte (iii) de las leyes de los logaritmos, resulta

$$x \log 5 = \log (3 + \sqrt{10}) \quad \text{o bien} \quad x = \frac{\log (3 + \sqrt{10})}{\log 5}.$$

Para obtener una solución aproximada, puede escribirse $3 + \sqrt{10} \approx 6.16$ y usar la tabla 1 o una calculadora; obtenemos así

$$x \approx \frac{\log 6.16}{\log 5} \approx \frac{0.7896}{0.6990} \approx 1.13.$$

Se podría haber usado también logaritmos naturales para obtener

$$x = \frac{\ln (3 + \sqrt{10})}{\ln 5}.$$

■

EJEMPLO 5 La ley de Beer-Lambert establece que la cantidad de luz I que penetra a una profundidad de x metros en un mar está dada por $I = I_0 a^x$, en la que $0 < a < 1$ e I_0 es la cantidad de luz en la superficie.

(a) Resolver para evaluar x en términos de I, I_0 y a usando (i) los logaritmos comunes; (ii) logaritmos naturales.

(b) Si $a = \frac{1}{2}$, ¿cuál es la profundidad a la cual $I = 0.01\,I_0$? (Esta profundidad determina la zona donde puede llevarse a cabo la fotosíntesis.)

SOLUCIÓN

(a) Sacando el logaritmo común en ambos lados de la ecuación $I = I_0 a^x$ y usando las leyes de los logaritmos, se obtiene

$$\log I = \log (I_0 a^x) = \log I_0 + \log a^x = \log I_0 + x \log a.$$

Por lo tanto,
$$x \log a = \log I - \log I_0 = \log (I/I_0)$$

y
$$x = \frac{\log (I/I_0)}{\log a}.$$

Si se emplean logaritmos naturales, entonces

$$x = \frac{\ln (I/I_0)}{\ln a}$$

(b) Haciendo $I = 0.01 I_0$ y $a = \frac{1}{4}$ en la fórmula para x obtenida en la parte (a),

$$x = \frac{\log (0.01 I_0/I_0)}{\log \frac{1}{4}} = \frac{\log (0.01)}{\log 1 - \log 4} = \frac{\log 10^{-2}}{-\log 4}$$

Usando una calculadora o la Tabla 1,

$$x \approx \frac{-2}{-0.6021} \approx 3.32 \text{ m}.$$

■

Ejercicios 5.6

En los Ejercicios 1 a 14, (a) encuentre las soluciones de las ecuaciones sin usar calculadora ni tabla; (b) encuentre una aproximación con dos cifras decimales para las soluciones.

1. $10^x = 7$
2. $5^x = 8$
3. $4^x = 3$
4. $10^x = 6$
5. $3^{4-x} = 5$
6. $(\frac{1}{3})^x = 100$
7. $3^{x+4} = 2^{1-3x}$
8. $4^{2x+3} = 5^{x-2}$
9. $2^{-x} = 8$
10. $2^{-x^2} = 5$
11. $\log x = 1 - \log (x - 3)$
12. $\log (5x + 1) = 2 + \log (2x - 3)$
13. $\log (x^2 + 4) - \log (x + 2) = 3 + \log (x - 2)$
14. $\log (x - 4) - \log (3x - 10) = \log (1/x)$

Resuelva las ecuaciones de los Ejercicios 15 a 20 sin usar calculadora ni tabla.

15. $\log (x^2) = (\log x)^2$
16. $\log \sqrt{x} = \sqrt{\log x}$
17. $\log (\log x) = 2$
18. $\log \sqrt{x^3 - 9} = 2$

19. $x^{\sqrt{\log x}} = 10^8$ **20.** $\log(x^3) = (\log x)^3$

En los Ejercicios 21 a 24, encuentre el valor de x en términos de y utilizando logaritmos comunes.

21. $y = \dfrac{10^x + 10^{-x}}{2}$ **22.** $y = \dfrac{10^x - 10^{-x}}{2}$

23. $y = \dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$ **24.** $y = \dfrac{1}{10^x - 10^{-x}}$

En los Ejercicios 25 a 28, use logaritmos naturales para evaluar x en términos de y.

25. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ **26.** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

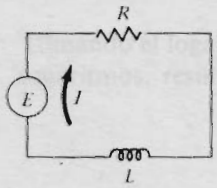
27. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ **28.** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

29. La corriente I de cierto circuito eléctrico en el tiempo t está dada por

$$I = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

en la que E, R y L representan la tensión o voltaje aplicado, la resistencia y la inductancia, respectivamente (véase la figura). Use logaritmos naturales para evaluar t en términos de los demás símbolos.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 29



30. Resuelva la fórmula del interés compuesto

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

para evaluar t, en términos de los otros símbolos, usando logaritmos naturales.

31. Refiérase al Ejemplo 5. La zona más importante del mar, desde el punto de vista de la biología marina, es la llamada *zona fótica*, en la que se puede llevar a cabo la fotosíntesis. Tal zona debe terminar en la profundidad a la que sólo penetra 1% de la luz de la superficie. En las clarísimas aguas del Caribe, 50% de la luz de la superficie llega a una profundidad de 13 m. Determine la profundidad de la zona fótica.

32. En algunas partes del puerto de Nueva York, en fuerte contraste con la situación del Ejemplo 31, 50% de la luz de la superficie ¡no llega siquiera a una profundidad de 10 cm! Calcule la profundidad de la zona fótica.

33. Un medicamento se elimina del cuerpo a través de la orina. La dosis inicial es de 10 mg y la cantidad $A(t)$ que queda en el cuerpo t horas después está dada por $A(t) = 10(0.8)^t$. Para que el fármaco haga efecto debe haber en el cuerpo por lo menos 2 mg.

(a) Determine cuándo quedan sólo 2 mg.

(b) ¿Cuál es la semivida (o "vida media") del medicamento?

34. El yodo radiactivo ^{131}I se usa frecuentemente en estudios de trazado (o marcaje), que tienen que ver con la glándula tiroides. La sustancia decrece o declina de acuerdo con la fórmula $A(t) = A_0 a^{-t}$, en la que A_0 es la dosis inicial y t es el tiempo en días. Determine a suponiendo que la semivida del ^{131}I es de 8 días.

5.7 Repaso

Defina o explique las siguientes expresiones:

1. La función exponencial con base a.
2. La función exponencial natural.
3. La función logarítmica de base a.
4. Las leyes de los logaritmos.
5. Los logaritmos comunes.
6. La función logarítmica natural.

Ejercicios 5.7

En los Ejercicios 1 a 10, determine los números sin ayuda de calculadora o tabla.

1. $\log_2 \frac{1}{16}$
2. $\log_5 \sqrt[3]{5}$
3. $6^{\log_6 4}$
4. $10^{3 \log 2}$
5. $\log 1\,000\,000$
6. $\ln e$
7. $\log_4 2$
8. $\log_\pi 1$
9. $e^{\ln 5}$
10. $\log \log 10^{10}$

En los Ejercicios 11 a 24, trace la gráfica de f.

11. $f(x) = 3^{x+2}$
12. $f(x) = (\frac{3}{5})^x$
13. $f(x) = (\frac{3}{2})^{-x}$
14. $f(x) = 3^{-2x}$
15. $f(x) = 3^{-x^2}$
16. $f(x) = 1 - 3^{-x}$
17. $f(x) = \log_6 x$
18. $f(x) = \log_3 (x^2)$
19. $f(x) = 2 \log_3 x$
20. $f(x) = \log_2 (x + 4)$
21. $f(x) = e^{x/2}$
22. $f(x) = \frac{1}{2}e^x$
23. $f(x) = e^{x-2}$
24. $f(x) = e^{2-x}$

En los Ejercicios 25 a 34, resuelva las ecuaciones dadas sin utilizar calculadora o tabla.

25. $\log_8 (x - 5) = \frac{2}{3}$
26. $\log_4 (x + 1) = 2 + \log_4 (3x - 2)$
27. $2 \log_3 (x + 3) - \log_3 (x + 1) = 3 \log_3 2$
28. $\log \sqrt[4]{x + 1} = \frac{1}{2}$
29. $2^{5-x} = 6$
30. $3^{x^2} = 7$
31. $2^{5x+3} = 3^{2x+1}$
32. $e^{\ln (x+1)} = 3$
33. $x^2(-2xe^{-x^2}) + 2xe^{-x^2} = 0$
34. $\ln x = 1 + \ln (x + 1)$
35. Exprese $\log x^4 \sqrt[3]{y^2/z}$ en términos de los logaritmos de x, y y z.
36. Exprese $\log (x^2/y^3) + 4 \log y - 6 \log \sqrt{xy}$ como un solo logaritmo.

En los Ejercicios 37 y 38, exprese x en términos de y.

37. $y = \dfrac{10^x + 10^{-x}}{10^x - 10^{-x}}$
38. $y = \dfrac{1}{10^x + 10^{-x}}$

En los Ejercicios 39 a 44 aproxime x usando (a) calculadora; (b) tablas.

39. $\log x = 1.8938$
40. $\log x = -2.4260$
41. $\ln x = 1.8$
42. $\ln x = -0.75$
43. $x = \ln 6.6$
44. $x = \log 8.4$

45. El número de bacterias que hay en un cierto cultivo en el tiempo t está dado por $Q(t) = 2(3)^t$ en donde t se mide en horas y $Q(t)$ en miles. ¿Cuál es el número inicial de bacterias? ¿Cuál es el número después de 10 min? ¿Después de 30 min? ¿Después de 1 hora?
46. Si se invierten \$1 000 a una tasa de 12% capitalizado cuatro veces al año, ¿cuál es el monto después de un año?
47. El yodo radiactivo ^{131}I se usa frecuentemente como trazador en estudios del cuerpo humano (y principalmente en los de la glándula tiroides). La sustancia decrece conforme a la fórmula $N = N_0(0.5)^{t/8}$, en donde N_0 es la dosis inicial y t es el tiempo en días.
    (a) Trace la gráfica de la ecuación si $N_0 = 64$.
    (b) Demuestre que la semivida del ^{131}I es de 8 días.
48. En un estanque piscícola se introducen mil truchas jóvenes. El dueño estima que tres meses después sólo quedan alrededor de 600. Encuentre una fórmula exponencial $N = N_0a^t$ que esté de acuerdo con esta información y úsela para estimar el número de truchas que quedan después de un año.
49. Se invierten \$10 000 (dólares) en un fondo de ahorros en el que el interés se capitaliza continuamente a una tasa de 11% anual. El monto A en la cuenta t años después está dado por la fórmula $A = 10\,000e^{0.11t}$.
    (a) ¿Cuándo habrá \$35 000 en la cuenta?
    (b) ¿Cuánto tarda en duplicarse el capital invertido en la cuenta?
50. La corriente $I(t)$ en el tiempo t que hay en cierto circuito eléctrico está dada por $I(t) = I_0e^{-Rt/L}$, en la que R y L representan la resistencia y la inductancia, respectivamente, e I_0 es la corriente en el tiempo $t = 0$. ¿En qué momento es la corriente $0.01\ I_0$?

51. La fórmula para el nivel de intensidad del sonido es $\alpha = 10 \log (I/I_0)$.
(a) Determine I en función de x y de I_0.
(b) Muestre que un incremento de un decibel en el nivel de intensidad α corresponde a un 26% de aumento en la intensidad I.

52. Las estrellas se clasifican en categorías de brillo llamadas *magnitudes*. A las estrellas más débiles (con flujo luminoso L_0) se les asigna magnitud 6. A las estrellas más brillantes se les asigna magnitud conforme a la fórmula

$$m = 6 - (2.5) \log (L/L_0)$$

en la que L es el flujo luminoso de la estrella.
(a) Determine m si $L = 10^{0.4} L_0$.
(b) Resuelva la fórmula para evaluar L en términos de m y de L_0.

53. Resuelva la fórmula de crecimiento de von Bertalanffy $y = a(1 - be^{-kt})$ para hallar t en términos de y, a, b y k. La fórmula resultante puede emplearse para calcular la edad de un pez a partir de la medición de su longitud.

54. El peso W (en kg) de una población de elefantes africanos hembras está relacionado con la edad t (en años) mediante

$$W = 2600(1 - 0.51e^{-0.075t})^3.$$

(a) ¿Cuánto pesa un elefante recién nacido?
(b) Suponiendo que una hembra adulta pesa 1 800 kg estime su edad.

55. Si se detuviera de repente la contaminación del Lago Erie, se ha estimado que el nivel de contaminantes y decrecería de acuerdo con la fórmula $y = y_0 e^{-0.3821t}$, en la que t está en años y y_0 es el nivel de contaminantes cuando se dejo de contaminar. ¿Cuántos años tomará eliminar el 50% de los contaminantes?

56. En un campo grande la lluvia ácida ha depositado estroncio radiactivo ^{90}Sr. Si a través de la cadena alimenticia llegan al ser humano cantidades suficientes de este elemento, el resultado puede ser cáncer en los huesos. Se ha encontrado que el nivel de radiactividad en el campo es 2.5 veces el nivel de seguridad. ¿Durante cuántos años estará contaminado dicho campo? El ^{90}Sr decrece conforme a la fórmula $A(t) = A_0 e^{-0.0239t}$, en la que A_0 es la cantidad actual en el campo y t es el tiempo en años.

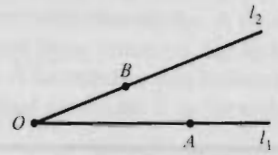


Las funciones trigonométricas

El origen de la trigonometría data de hace más de 2000 años, cuando los griegos necesitaron métodos precisos para medir ángulos y lados de triángulos. ■ En la Sección 6.1 estudiaremos ángulos pero desde un punto de vista moderno. ■ La Sección 6.2 enfoca las funciones trigonométricas mediante la técnica clásica de utilizar razones de los lados de un triángulo rectángulo. ■ Este trabajo se amplía en la Sección 6.5, en donde se consideran funciones trigonométricas de cualquier ángulo y de números reales. ■ Las tres secciones finales contienen un tratamiento de gráficas trigonométricas.

6.1 Ángulos

FIGURA 6.1

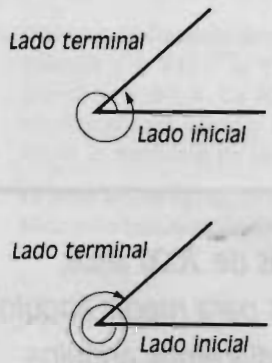


En geometría un ángulo se determina por dos rayos o semirectas l_1 y l_2 con el mismo punto inicial O. Si A y B son puntos en l_1 y l_2, respectivamente (véase la Figura 6.1) entonces nos podemos referir al ángulo AOB. Un ángulo se puede considerar como dos segmentos de recta finitos con extremo común.

En trigonometría es conveniente considerar que el ángulo AOB es generado a partir de un rayo fijo l_1, con extremo O, mediante una rotación respecto a O, en un plano, hacia la posición especificada por la recta l_2. A l_1 se le llama **lado inicial**, a l_2 **lado terminal** y a O **vértice** del ángulo. La magnitud o sentido de la rotación no se restringe de ninguna manera. Entonces podemos dar al lado inicial varias revoluciones en cualquier dirección respecto a O y acabar en la posición terminal, como se ilustra mediante flechas en la Figura 6.2. Es importante observar que hay muchos ángulos diferentes que tienen los mismos lados inicial y terminal. A cualquier par de estos ángulos se les llama ángulos **coterminales**.

FIGURA 6.2

Ángulos coterminales

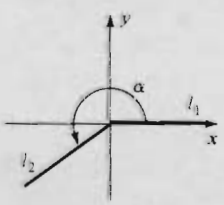


Si se tiene un sistema de coordenadas rectangulares, entonces la **posición estándar** de un ángulo se obtiene al tomar el vértice en el origen y hacer que el lado inicial l_1 coincida con el eje x positivo. Si se gira l_1 en sentido contrario al del reloj hasta la posición terminal l_2, entonces se considera al ángulo **positivo**, mientras que si se gira l_1 en el sentido del reloj, el ángulo es **negativo**. Comúnmente denotamos a los ángulos mediante letras griegas minúsculas y especificamos el sentido de la rotación por medio de un arco circular o espiral con una flecha en el extremo. La Figura 6.3 ilustra dos ángulos positivos α y β, y un ángulo negativo γ. Si el lado terminal de un ángulo se encuentra en un cierto cuadrante, decimos que el *ángulo* está en ese cuadrante. En la Figura 6.3, α está en el cuadrante III, β está en el cuadrante I y γ está en el cuadrante

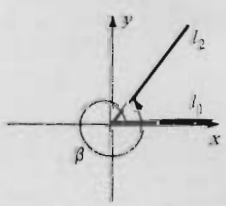
FIGURA 6.3

Posición estándar de un ángulo

Ángulo positivo



Ángulo positivo



Ángulo negativo

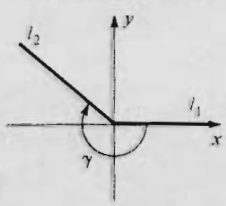
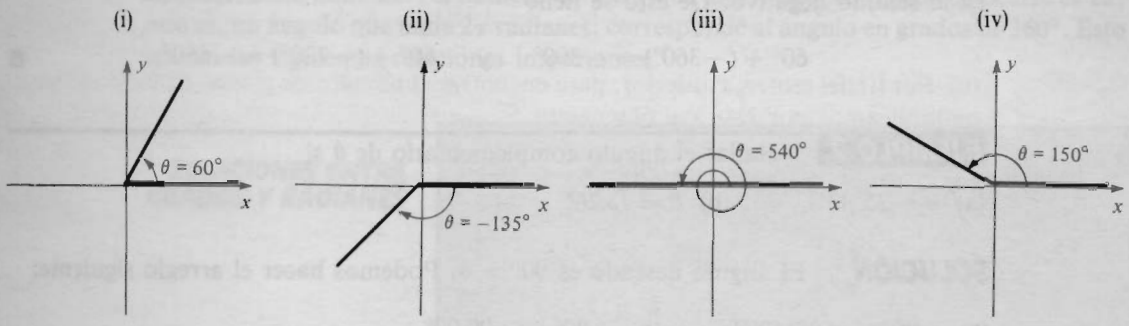


FIGURA 6.4



II. Si el lado terminal coincide con un eje coordenado, entonces al ángulo se le llama **ángulo cuadrantal.**

Una de las unidades de medida para ángulos es el **grado.** Si se coloca al ángulo en posición estándar en un sistema de coordenadas rectangulares, entonces un ángulo de 1 grado es, por definición, la medida del ángulo formado por 1/360 de una revolución completa en sentido contrario al del reloj. El símbolo ° se utiliza para denotar los grados en la medida de un ángulo. En la Figura 6.4 se muestran varios ángulos medidos en grados en posición estándar en un sistema de coordenadas rectangulares. Como se muestra en la figura, la notación $\theta = 60°$ es utilizada para especificar un ángulo θ cuya medida es 60°. También usamos la frase "un ángulo de 60°" en vez de decir en forma más precisa (pero tediosa) "un ángulo con medida angular de 60°".

A un ángulo de 90° se le llama **ángulo recto.** Un ángulo θ puede ser **agudo** si $0° < \theta < 90°$, u **obtuso** si $90° < \theta < 180°$. Dos ángulos agudos son **complementarios** si suman 90°. Por ejemplo, 20° y 70° son ángulos complementarios. En general, si θ es agudo entonces θ y $90° - \theta$ son complementarios. Dos ángulos positivos son **suplementarios** si suman 180°.

Si se requieren mediciones más precisas que las que obtenemos con grados, podemos usar décimos, centésimos o milésimos de grado. Otro método es dividir cada grado en 60 partes iguales llamadas **minutos** (que se denotan con ′) y cada minuto en 60 partes iguales llamadas **segundos** (que se denotan con ″). Entonces 1′ es 1/60 de 1° y 1″ es 1/60 de 1′. Una notación como $\theta = 73°56'18''$ indica un ángulo θ que mide 73 grados, 56 minutos y 18 segundos.

EJEMPLO 1 Si $\theta = 60°$, hallar dos ángulos positivos y dos ángulos negativos que sean coterminales con θ.

SOLUCIÓN En la Figura 6.4 se muestra en posición estándar el ángulo θ. Para encontrar ángulos coterminales positivos podemos sumar 360° o bien 720° a θ, ya que esto equivale a una o dos revoluciones completas adicionales. Esto da

$$60° + 360° = 420° \quad \text{y} \quad 60° + 720° = 780°.$$

Para encontrar ángulos coterminales negativos sumamos −360° o bien −720° (o

cualquier múltiplo de $-360°$) puesto que esto corresponde a revoluciones adicionales en al sentido negativo. De esto se tiene

$$60° + (-360°) = -300° \quad \text{y} \quad 60° + (-720°) = -660°. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Hallar el ángulo complementario de θ si

(a) $\theta = 25°43'37''$ (b) $\theta = 73.26°$

SOLUCIÓN El ángulo deseado es $90° - \theta$. Podemos hacer el arreglo siguiente:

(a)		(b)	
$90°$	$= 89°59'60''$	$90°$	$= 90.00°$
θ	$= 25°43'37''$	θ	$= 73.26°$
$90° - \theta$	$= 64°16'23''$	$90° - \theta$	$= 16.74°$

$\blacksquare$

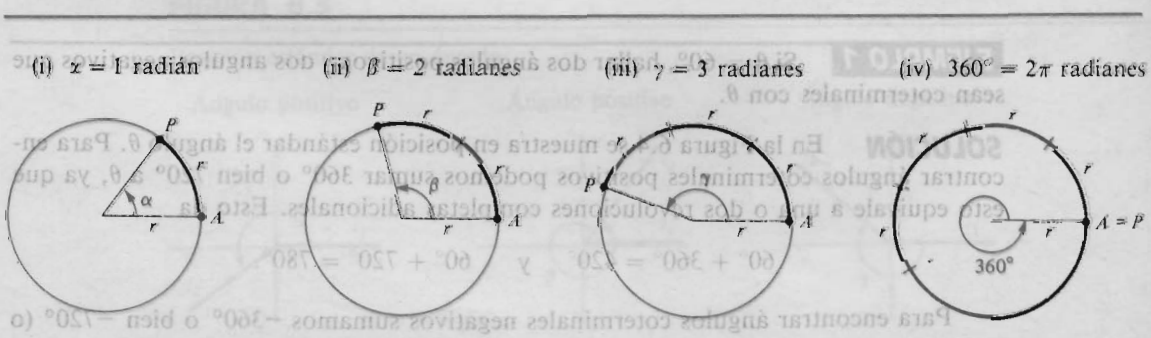
Las medidas de ángulos en grados se usan en algunas áreas de aplicación como navegación, topografía y en el diseño de equipo mecánico. En las aplicaciones científicas, que requieren del cálculo, lo usual es emplear *medidas en radianes*. Un *radián* se define como sigue.

DEFINICIÓN Un ángulo tiene una medida de 1 **radián** si al colocar su vértice en el centro de un círculo, la longitud del arco interceptado en la circunferencia es igual al radio.

Si consideramos un círculo de radio r, entonces un ángulo α que mide 1 radián intercepta un arco $\overset{\frown}{AP}$ de longitud r, como lo ilustra la parte (i) de la Figura 6.5. Se dice también que el arco $\overset{\frown}{AP}$ **subtiende** a α, o que α es el ángulo *subtendido* por el arco $\overset{\frown}{AP}$.

El ángulo β en (ii), Figura 6.5, tiene una medida en radianes igual a 2, ya que intercepta un arco de longitud $2r$. De igual manera, γ en (iii) de la misma figura, tiene una medida en radianes de 3. Para encontrar la medida correspondiente a $360°$ es necesario encontrar el número de veces que un arco circular de longitud r puede colocarse a lo

FIGURA 6.5



largo de la circunferencia. Este número no es entero ni racional. En efecto, como la circunferencia mide $2\pi r$, el número de veces que una longitud r puede colocarse es 2π, esto es, un ángulo que mide 2π radianes, corresponde al ángulo en grados de 360°. Esto nos da las siguientes relaciones importantes.

RELACIONES ENTRE GRADOS Y RADIANES

$$180° = \pi \text{ radianes}, \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ radianes},$$

$$1 \text{ radián} = \left(\frac{180}{\pi}\right)°.$$

Si usamos una calculadora para aproximar $\pi/180$ y $180/\pi$ obtenemos

$$1° \approx 0.0174533 \text{ radianes} \quad \text{y} \quad 1 \text{ radián} \approx 57.29578°.$$

El teorema siguiente es una consecuencia directa de las fórmulas anteriores.

TEOREMA

(i) Para cambiar radianes a grados se multiplica por $180/\pi$.

(ii) Para cambiar grados a radianes se multiplica por $\pi/180$.

Cuando se usa el valor de un ángulo en radianes, no suelen indicarse las unidades. Si un ángulo tiene una medida de 5 radianes, es usual escribir $\theta = 5$ en vez de $\theta = 5$ *radianes*. Lo mismo es cierto para cualquier otro ángulo. No debe haber confusión acerca de si se está usando una medida en grados o en radianes, ya que si θ tiene una medida en grados de 5, escribimos $\theta = 5°$ y *no* $\theta = 5$.

EJEMPLO 3

(a) Hallar la medida en radianes de θ si $\theta = 150°$ y si $\theta = 225°$.

(b) Obtener la medida en grados de θ si $\theta = 7\pi/4$ y si $\theta = \pi/3$.

SOLUCIÓN

(a) Por el último teorema, el número de radianes en 150° se obtiene si se multiplica 150 por $\pi/180$. Así

$$150° = 150\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

De manera similar, $$225^\circ = 225\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{5\pi}{4}.$$

(b) Por (i) del teorema anterior, para encontrar el número de grados en $7\pi/4$ radianes, multiplicamos por $180/\pi$ y obtenemos

$$\frac{7\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 315^\circ.$$

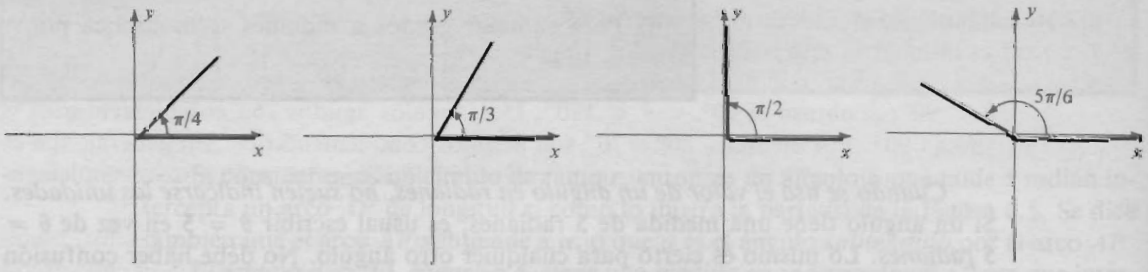
Y similarmente, $$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 60^\circ.$$ ■

La siguiente tabla muestra la relación entre el valor de radianes y el valor en grados de varios ángulos usuales. Los resultados se pueden verificar con el teorema anterior.

Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°

En la Figura 6.6 se muestran varios ángulos medidos en radianes en la posición estándar.

FIGURA 6.6



EJEMPLO 4 Si la medida de un ángulo θ es de 3 radianes, obtener la medida aproximada de θ en grados, minutos y segundos.

SOLUCIÓN Usando una calculadora,

$$3 \text{ radianes} \approx 3\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 171.88734^\circ = 171^\circ + (0.88734)^\circ.$$

Puesto que $1^\circ = 60'$,

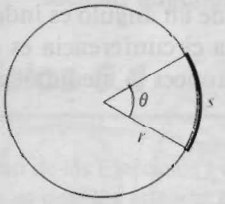
$$(0.88734)^\circ = (0.88734)(1^\circ) = (0.88734)(60') = 53.2404' = 53' + 0.2404'.$$

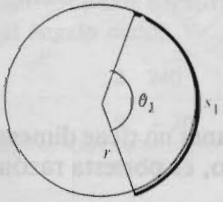
Como $1' = 60''$ $\quad 0.2404' = (0.2404)(1') = (0.2404)(60'') = 14.424'' \approx 14''.$

Por lo tanto $$3 \text{ radianes} \approx 171^\circ 53' 14''.$$ ■

Algunas calculadoras tienen teclas que pueden usarse para convertir el valor del ángulo en radianes a grados, y viceversa. Las calculadoras pueden tener una tecla DMS para convertir un valor decimal en grados de un ángulo, a grados, minutos y segundos, y viceversa. Si se desea información específica puede consultarse el manual del usuario de una calculadora en particular. Puesto que los números se ingresan a la calculadora en términos de decimales, los ángulos que están expresados en grados, minutos y segundos deben cambiarse a la forma decimal. Si no se dispone de la tecla DMS, se debe seguir el procedimiento que se muestra en el ejemplo siguiente.

FIGURA 6.7





EJEMPLO 5 Expresar 19°47′23″ en forma decimal, hasta la diezmilésima de grado más cercano.

SOLUCIÓN Puesto que $1' = \frac{1}{60}°$ y $1'' = \frac{1}{3600}°$,

$$19°47'23'' = 19° + \left(\frac{47}{60}\right)° + \left(\frac{23}{3600}\right)°$$

$$\approx 19° + 0.7833° + 0.0064° = 19.7897° \quad \blacksquare$$

El término **ángulo central** de un círculo se refiere a un ángulo cuyo vértice está en el centro del mismo. En geometría plana se demuestra que si dos ángulos centrales θ y θ_1 de un círculo de radio r interceptan arcos de circunferencia de longitud s y s_1, respectivamente, y si θ y θ_1 *se miden en radianes* entonces

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{s}{s_1}.$$

En particular, si consideramos el caso especial en que θ_1 es de 1 radián, entonces $s_1 = r$ y obtenemos así

$$\frac{\theta}{1} = \frac{s}{r}.$$

Esto da el siguiente resultado.

TEOREMA

Si un ángulo central θ de una circunferencia de radio r intercepta un arco de longitud s, entonces la medida en radianes de θ está dada por

$$\theta = \frac{s}{r}.$$

EJEMPLO 6 Un ángulo central θ es subtendido por un arco de 10 cm de longitud en un círculo de radio = 4 cm. Obtener (a) la medida en radianes de θ, y (b) su medida en grados.

SOLUCIÓN

(a) La sustitución en la fórmula $\theta = s/r$ da el valor en radianes:

$$\theta = \frac{10}{4} = 2.5$$

(b) Para cambiar el valor en radianes encontrado en (a) a grados, se multiplica por $180/\pi$. Por lo tanto,

$$\theta = (2.5)\left(\frac{180}{\pi}\right) = \left(\frac{450}{\pi}\right)^\circ \approx 143.24^\circ. \quad \blacksquare$$

La fórmula $\theta = s/r$ indica que la medida en radianes de un ángulo es independiente del tamaño del círculo. Por ejemplo, si el radio de una circunferencia es $r = 4$ cm y el arco que subtiende un ángulo central θ es de 8 cm, entonces la medida en radianes de θ es

$$\theta = \frac{8 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 2.$$

Si el radio es de 5 km y el arco mide 10 km entonces

$$\theta = \frac{10 \text{ km}}{5 \text{ km}} = 2.$$

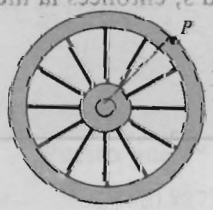
Estos cálculos indican que la medida de un ángulo en radianes no tiene dimensión y por tanto puede considerarse como un número real. En efecto, es por esta razón que usamos la notación $\theta = t$ en vez de $\theta = t$ *radianes*.

La fórmula $\theta = s/r$ puede usarse para calcular la longitud del arco que subtiende un cierto ángulo central θ de un círculo. En los problemas de este tipo es conveniente usar la fórmula equivalente

$$s = r\theta.$$

FIGURA 6.8

Rueda que gira



EJEMPLO 7

La **velocidad angular** de una rueda que gira con rapidez constante es el ángulo generado en la unidad de tiempo por un segmento de recta que va del centro de la rueda hasta un punto P de la circunferencia (véase la Figura 6.8). Supóngase que una máquina tiene una rueda con diámetro de 3 pie, que gira a 1600 revoluciones por minuto (rpm).

(a) Calcule la velocidad angular de la rueda.

(b) Determine la velocidad a la que se mueve un punto P que está en la circunferencia de la rueda.

SOLUCIÓN

(a) Sea O el centro de la rueda, y P, un punto sobre la circunferencia. Puesto que el número de revoluciones por minuto es 1600, y cada revolución genera o describe un ángulo

de 2π radianes, el ángulo generado por el segmento OP en un minuto, tiene una medida en radianes de $(1600)(2\pi)$; es decir:

$$\text{Velocidad angular} = (1600)(2\pi) = 3200\pi \text{ radianes por minuto.}$$

Nótese que el diámetro de la rueda es irrelevante en el cálculo de la velocidad angular.

(b) La velocidad a la que P se mueve es la distancia que viaja por minuto. (A esto se le llama **velocidad lineal** de P.) Esta distancia se puede evaluar usando la fórmula $s = r\theta$, con $r = \frac{3}{2}$ pie y $\theta = 3200\pi$ radianes por minuto. Por tanto,

$$s = r\theta = \tfrac{3}{2}(3200\pi) = 4800\pi \text{ pie/min.}$$

Aproximando al entero más cercano, el valor es 15 080 pie/min. A diferencia de la velocidad angular, la velocidad lineal *sí* depende del diámetro de la rueda. ■

Ejercicios 6.1

En cada uno de los Ejercicios 1 a 12 coloque el ángulo indicado en posición estándar en un sistema de coordenadas rectangulares y calcule la medida de dos ángulos positivos y dos negativos que sean coterminales con el ángulo dado.

1. $120°$
2. $240°$
3. $135°$
4. $315°$
5. $-30°$
6. $-150°$
7. $620°$
8. $570°$
9. $5\pi/6$
10. $2\pi/3$
11. $-\pi/4$
12. $-5\pi/4$

En los Ejercicios 13 a 24 determine la medida en radianes que corresponde a la medida dada en grados.

13. $150°$
14. $120°$
15. $-60°$
16. $-135°$
17. $225°$
18. $210°$
19. $450°$
20. $630°$
21. $72°$
22. $54°$
23. $100°$
24. $95°$

En los Ejercicios 25 a 36 obtenga la medida en grados que corresponde a la medida dada en radianes.

25. $2\pi/3$
26. $5\pi/6$
27. $11\pi/6$
28. $4\pi/3$
29. $3\pi/4$
30. $11\pi/4$
31. $-7\pi/2$
32. $-5\pi/2$
33. 7π
34. 9π
35. $\pi/9$
36. $\pi/16$

En los Ejercicios 37 a 40 determine la medida aproximada de θ en términos de grados, minutos y segundos.

37. $\theta = 2$
38. $\theta = 1.5$
39. $\theta = 5$
40. $\theta = 4$

En los Ejercicios 41 a 44 exprese al ángulo en forma decimal, aproximado a la diezmilésima de grado más cercana.

41. $37°41'$
42. $83°17'$
43. $115°26'27''$
44. $258°39'52''$

En los Ejercicios 45 a 48, exprese al ángulo en términos de grados, minutos y segundos, redondeando hasta el segundo más cercano.

45. $63.169°$
46. $12.864°$
47. $310.6215°$
48. $81.7238°$

49. Un ángulo central θ intercepta un arco de 7 cm de largo en una circunferencia de radio de 4 cm. Aproxime la medida de θ en (a) radianes; (b) grados.

50. Un ángulo central θ intercepta un arco de 3 pie de largo en una circunferencia de 20 pulg de radio. Aproxime la medida de θ en (a) radianes; (b) grados.

51. Aproxime la longitud de un arco que subtiende un ángulo central que mide $50°$ en una circunferencia de 8 m de radio.

52. Aproxime la longitud de un arco que subtiende un ángulo central de 2.2 radianes en una circunferencia de 60 cm de radio.

53. Si un ángulo central θ que mide $20°$ intercepta un arco circular de longitud 3 km; determine el radio de la circunferencia.

54. Si un ángulo central θ que mide 4 radianes intercepta un arco circular de 10 cm de longitud, encuentre el radio del círculo.

55. La distancia entre dos puntos A y B en la Tierra, se mide sobre un círculo con centro C en el centro de la Tierra y radio igual a la distancia de C a la superficie. Si el diámetro terrestre es de 8 000 millas aproximadamente, calcule la distancia entre A y B cuando el ángulo ACB mide (a) 60°; (b) 45°; (c) 30°; (d) 10°; (e) 1°.

56. Refiérase al Ejercicio 55. Si el ángulo ACB mide 1′, entonces a la distancia entre A y B se le llama **milla náutica**. Encuentre el número aproximado de millas ordinarias (**terrestres**) que hay en una milla náutica.

57. Refiérase al Ejercicio 55. Si la distancia entre dos puntos A y B es de 500 millas, calcule el ángulo ACB medido en grados y también en radianes.

58. Refiérase al Ejemplo 7. Si una rueda de 18 pulg de diámetro gira a 2 400 rpm, calcule la velocidad angular de la rueda, y (b) la velocidad de un punto sobre la circunferencia de la misma en pie/min.

59. El péndulo de un reloj de piso tiene 4 pie de largo y oscila sobre un arco de 6 pulg. Calcule el ángulo (en grados) que describe el péndulo durante una oscilación.

60. Para subir carga a los vagones de un tren se usa un montacargas grande que tiene un tambor con diámetro de 3 pie (véase la figura).

(a) Calcule la distancia en que se eleva la carga si el montacargas gira un ángulo de $7\pi/4$ radianes.

(b) Calcule el ángulo (en radianes) que debe girar el montacargas para levantar la carga una altura d.

61. El engranaje de rueda y cadena de una bicicleta se muestra en la figura. Si la rueda dentada de radio r_1 gira un ángulo de θ_1 radianes, halle el ángulo correspondiente de rotación para el pinón de radio r_2.

62. Un ciclista experto puede alcanzar una velocidad de 40 mi/h. Si en el Ejercicio 61 se tienen los datos siguientes: radios $r_1 = 5$ pulg y $r_2 = 2$ pulg, y la rueda de la bicicleta tiene un diámetro de 28 pulg, calcule la velocidad angular necesaria para alcanzar una velocidad de 40 mi/h. (*Sugerencia:* Cambie primero las 40 mi/h a su valor en pulgadas por segundo. La equivalencia de la milla es: 1 mi = 5 280 pie = 63 360 pulg.)

FIGURA PARA EL EJERCICIO 60

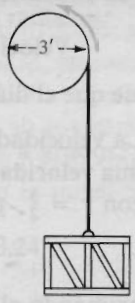
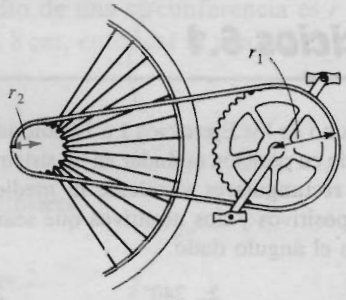
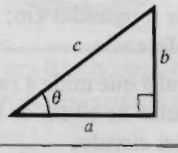


FIGURA PARA EL EJERCICIO 61



6.2 Funciones trigonométricas de ángulos agudos

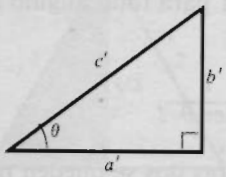
FIGURA 6.9



Un triángulo se llama **rectángulo** si uno de sus ángulos es recto. Si θ es cualquier ángulo agudo, podemos considerar un triángulo rectángulo con θ en uno de sus ángulos, como ilustra la Figura 6.9. Las seis razones siguientes pueden obtenerse usando la longitud de los tres lados del triángulo a, b y c:

$$\frac{b}{c}, \quad \frac{a}{c}, \quad \frac{b}{a}, \quad \frac{c}{b}, \quad \frac{c}{a}, \quad \frac{a}{b}.$$

FIGURA 6.10



Además, estas razones sólo dependen de θ y no del tamaño del triángulo, porque supongamos que θ es un ángulo de un triángulo rectángulo diferente, como lo muestra la Figura 6.10; como los dos triángulos de la figura tienen ángulos iguales, son semejantes y por tanto, las razones de los lados correspondientes son iguales. Por ejemplo,

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}, \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \quad \text{y} \quad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}.$$

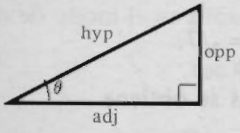
Entonces, para cada valor de θ, las seis razones están determinadas en forma única y por tanto son funciones de θ. Se denominan **funciones trigonométricas** y se llaman **seno, coseno, tangente, cosecante, secante** y **cotangente**; se abrevian **sen, cos, tan, csc, sec** y **cot**, respectivamente. Los símbolos sen (θ) o sen θ se usan para la razón b/c, a la que la función seno asocia con θ. Los valores de las otras cinco funciones se denotan de igual manera. En resumen, si θ es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, como el que se muestra en la Figura 6.9, entonces, por definición:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{c} \qquad \csc\theta = \frac{c}{b}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{c} \qquad \sec\theta = \frac{c}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}$$

FIGURA 6.11



Cada una de las seis funciones trigonométricas tiene como dominio el conjunto de todos los ángulos agudos. Posteriormente extenderemos los dominios a conjuntos más grandes de ángulos y a los números reales.

Si θ es el ángulo de la Figura 6.9, nos referiremos a los lados del triángulo, de longitudes a, b y c, como **lado adyacente, lado opuesto** e **hipotenusa**, respectivamente. Por conveniencia usaremos **ady, op** e **hip** para denotar la longitud de estos lados. Podemos entonces representar al triángulo como en la Figura 6.11. Las funciones trigonométricas pueden ahora expresarse como sigue:

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

VALORES ESPECIALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS (continuación)

θ (radianes)	θ (grados)	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Empleando técnicas avanzadas se pueden aproximar, con cierto grado de precisión, los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo agudo. La Tabla 4 del Apéndice II da una aproximación hasta cuatro cifras decimales para muchos valores. En el Apéndice I se explica cómo se usa la Tabla 4. La Tabla 5 se puede utilizar para encontrar los valores de las funciones si θ tiene una aproximación a dos cifras decimales de su valor en radianes, y si $0 < \theta < 1.57$. (Nótese que $1.57 \approx \pi/2$.)

Las calculadoras de tipo científico tienen teclas marcadas [sen], [cos], y [tan] que se pueden emplear para determinar valores aproximados de estas funciones. Los valores de csc, sec y cot se pueden obtener después usando la tecla del recíproco. *Antes de utilizar una calculadora para encontrar los valores de las funciones que corresponden a un ángulo medido en radianes, hay que asegurarse de que la calculadora está en el modo de radianes. Para valores correspondientes a medidas en grados, se debe seleccionar el modo de grados.*

Como un ejemplo, para evaluar sen 30°, póngase la calculadora en el modo de grados, se ingresa el número 30 y se oprime la tecla [sen], con lo que se obtiene sen 30° = 0.5, que es el valor exacto. Usando el mismo procedimiento para 60°, se obtiene, en una calculadora típica,

$$\text{sen } 60° \approx 0.8660254,$$

que es una aproximación a siete cifras decimales del valor exacto $\sqrt{3}/2$.

De la misma manera, para encontrar valores como cos (1.3), en donde 1.3 es el valor de un ángulo agudo en radianes, se pone la calculadora en el modo de radianes, se ingresa 1.3 y se oprime [cos], obteniéndose

$$\cos (1.3) \approx 0.9997426$$

Si se tienen valores en minutos, como en el caso de evaluar tan 67°29′, entonces, antes de usar la tecla [tan], *se debe expresar el valor en grados del ángulo en forma decimal.* Puesto que

$$29' = \left(\frac{29}{60}\right)° \approx 0.4833333,$$

se puede escribir

$$\tan 67°29' \approx \tan 67.4833333° \approx 2.4122286$$

EJEMPLO 3 Aproximar cot 54.8°.

SOLUCIÓN Se pone la calculadora en el modo de grados y se usa la relación recíproca $\cot\theta = 1/\tan\theta$, de la siguiente manera:

Introducir:	54.8	(valor en grados de θ)
Oprimir [tan]:	1.4175904	(valor de $\tan\theta$)
Oprimir [1/x]:	0.7054224	(valor de $1/\tan\theta$)

Por lo tanto $54.8° \approx 0.7054224$. ■

Las funciones inversas correspondientes a las funciones trigonométricas se definen en la Sección 7.6, en donde se muestra que existe una función denotada por sen^{-1} tal que

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen}\,\theta) = \theta$$

siempre que

$$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \quad \text{o bien} \quad -90° \leq \theta \leq 90°.$$

Esto puede usarse para encontrar θ cuando se tiene $\text{sen}\,\theta$. Para los propósitos actuales, no es necesario considerar la restricción $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ o bien $-90° \leq \theta \leq 90°$, puesto que sólo nos interesan ángulos agudos. La razón de esta restricción para θ se discute en la Sección 7.6 en la que se tratan en detalle las *funciones trigonométricas inversas*.

Para usar sen^{-1} en algunas calculadoras, primero se oprime [INV] (para el valor inverso) y después [sen]. Esta técnica es análoga a la de la Sección 5.5, en la que dado $\log x$, se oprimía [INV] seguida de [log] para aproximar x. Algunas calculadoras tienen una tecla marcada con [sen^{-1}] o bien [arcsen] para obtener directamente los valores de las funciones trigonométricas inversas.

EJEMPLO 4 Si θ es un ángulo agudo, tal que $\text{sen}\,\theta = 0.5$, use una calculadora para evaluar (a) el valor de θ en grados; (b) el valor de θ en radianes.

SOLUCIÓN

(a) Se pone la calculadora en el modo de grados y se procede de la siguiente manera:

Ingresar:	0.5	(el valor de $\text{sen}\,\theta$)
Oprimir [INV] [sen]:	30	(el valor de θ en grados)

(b) Se pone la calculadora en el modo de radianes y se procede como sigue:

Ingresar:	0.5	(el valor de $\text{sen}\,\theta$)
Oprimir [INV] [sen]:	0.5235988	(la medida en radianes de θ)

El último número es una aproximación decimal para un ángulo de $\pi/6$ radianes. ■

En la Sección 7.6 también se definieron las funciones denotadas por $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$ tales que

$$\cos^{-1}(\cos\theta) = \theta \quad \text{si} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{o bien} \quad 0° \leq \theta \leq 180°$$

y

$$\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta \quad \text{si} \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2 \quad \text{o bien} \quad -90° < \theta < 90°$$

Estas pueden usarse del mismo modo que sen^{-1} en el Ejemplo 4.

EJEMPLO 5 Para un ángulo agudo θ con $\cos\theta = 0.4271$, obtener el valor en grados de θ aproximando (a) a $(0.01)°$; (b) $1'$.

SOLUCIÓN

(a) Se pone la calculadora en el modo de grados y así:

Ingresar 0.4271 (el valor de $\cos\theta$)
Oprimir INV cos: 64.7163341 (el valor en grados de θ)

Por lo tanto $\theta \approx 64.72°$.

(b) Para determinar θ al minuto más cercano se procede como en el Ejemplo 4 de la sección anterior y se obtiene

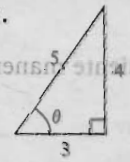
$$(0.716341)° = (0.716341)(1°) = (0.716341)(60') = 42.98046' \approx 43'$$

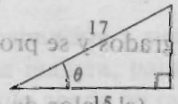
y por lo tanto $\theta \approx 64°43'$.

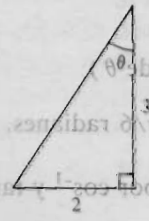
Para aproximar θ también se puede usar la Tabla 4 junto con el método de interpolación (véase el Apéndice I). ■

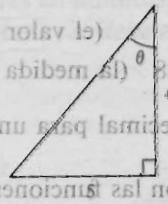
Ejercicios 6.2

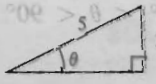
En los Ejercicios 1 a 10 encuentre el valor de las funciones trigonométricas de θ si θ es el ángulo del triángulo rectángulo indicado.

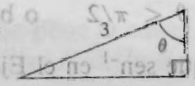
1. 

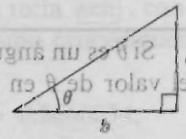
2. 

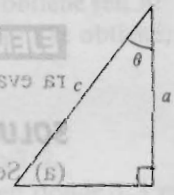
3. 

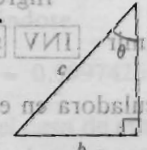
4. 

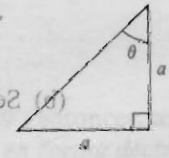
5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

10. 

En cada uno de los Ejercicios 11 a 18 encuentre el valor de las otras funciones trigonométricas del ángulo agudo θ.

11. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$
12. $\cos\theta = \frac{8}{17}$
13. $\sec\theta = \frac{6}{5}$
14. $\csc\theta = 4$
15. $\cos\theta = \sqrt{2}/2$
16. $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}/2$
17. $\operatorname{sen}\theta = b/\sqrt{a^2 + b^2}$, en donde $a^2 + b^2 \neq 0$
18. $\cos\theta = x$, en donde $0 < x < 1$

19. ¿Existe un ángulo agudo θ tal que $7 \operatorname{sen} \theta = 9$? Explique.

20. ¿Existe un ángulo agudo θ tal que $3 \csc \theta = 1$? Explique.

En los Ejercicios 21 a 26 obtenga el valor de la función a cuatro cifras significativas usando (a) la Tabla 4; (b) una calculadora.

21. cos 38°30′ **22.** sen 73°20′ **23.** cot 9°10′ **24.** csc 43°40′ **25.** sec 67°50′ **26.** tan 21°10′

En los Ejercicios 27 a 32 obtenga el valor de la función a cuatro cifras significativas usando (a) la Tabla 5; (b) una calculadora.

27. cos (0.68) **28.** sen (1.48) **29.** cot (1.13) **30.** csc (0.32) **31.** sec (0.26) **32.** tan (0.75)

Ejercicios para Calculadora 6.2

En los Ejercicios 1 a 8 aproxime el ángulo agudo (a) a (0.01)°; (b) a 1′.

1. $\cos \theta = 0.8620$ **2.** $\operatorname{sen} \theta = 0.6612$

3. $\tan \theta = 3.7$ **4.** $\cos \theta = 0.8$

5. $\operatorname{sen} \theta = 0.4217$ **6.** $\tan \theta = 4.91$

7. $\sec \theta = 4.246$ **8.** $\csc \theta = 11$

9. Si x es el valor en radianes de un ángulo agudo, el siguiente polinomio de quinto grado $P(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ es una excelente aproximación de $\operatorname{sen} x$ para $0 \leq x \leq \pi/4$. De hecho de una exactitud de cuatro cifras decimales. Use $P(x)$ para estimar $\operatorname{sen} \frac{1}{2}$ y compare el resultado con el que se obtuvo utilizando la tecla [sen] de la calculadora.

10. Las calculadoras científicas tienen teclas para sen, cos, tan junto con teclas para $1/x$ y x^2.
(a) Para calcular $\cos^2 x$, después de ingresar x, ¿cuál tecla se oprime primero?
(b) ¿Cómo se puede calcular $\csc x$?
(c) ¿Cómo puede obtenerse $\cot^4 x$?

6.3 Las identidades fundamentales

Entre las funciones trigonométricas existen muchas relaciones. Las fórmulas que se presentan en este libro son, sin duda, las identidades más importantes de la trigonometría, porque pueden utilizarse para simplificar y unificar muchos aspectos diferentes de la materia. Como forman parte de los fundamentos para el estudio de la trigonometría, se denominan *Identidades Fundamentales*.

Tres de las identidades trigonométricas fundamentales involucran cuadrados, como $(\operatorname{sen} \theta)^2$ y $(\cos \theta)^2$. En general, si n es un entero y $n \neq -1$, entonces potencias como $(\cos \theta)^n$ se escriben en la forma $\cos^n \theta$. Los símbolos sen^{-1} y $\cos^{-1}$ se reservan para las funciones trigonométricas inversas, que se discutirán en la Sección 7.6. Con esta convención en cuanto a la notación se tiene, por ejemplo,

$$\cos^2 \theta = (\cos \theta)^2 = (\cos \theta)(\cos \theta)$$

$$\tan^3 \theta = (\tan \theta)^3 = (\tan \theta)(\tan \theta)(\tan \theta)$$

$$\sec^4 \theta = (\sec \theta)^4 = (\sec \theta)(\sec \theta)(\sec \theta)(\sec \theta).$$

En primer lugar se enumerarán las identidades fundamentales y después se discutirán las demostraciones. Las fórmulas siguientes son verdaderas para todo ángulo agu-

do θ. Más adelante se verá que también son ciertas para conjuntos mayores de ángulos y para números reales.

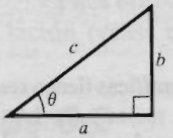
LAS IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

FIGURA 6.15



Las primeras tres fórmulas en la columna de la izquierda son las relaciones recíprocas que se discutieron en la sección anterior. Las otras pueden demostrarse haciendo referencia al triángulo rectángulo de la Figura 6.15. Por lo tanto

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}.$$

Entonces, también,

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Si se aplica el Teorema de Pitágoras al triángulo de la Figura 6.15, se obtiene

$$b^2 + a^2 = c^2.$$

Dividiendo ambos lados entre c^2 conduce a

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1, \quad \text{es decir, } \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Dividiendo ambos lados de la última ecuación entre $\cos^2\theta$ se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \text{o bien} \quad \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2.$$

Puesto que $\operatorname{sen}\theta/\cos\theta = \tan\theta$ y $1/\cos\theta = \sec\theta$, esto implica que

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta.$$

La demostración de que $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$ se deja al lector como ejercicio.

La identidad fundamental $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ puede usarse para expresar a $\operatorname{sen}\theta$ en términos de $\cos\theta$, o viceversa. Por ejemplo, puesto que

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

y como $\operatorname{sen}\theta$ es positivo,

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}.$$

Análogamente,

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}.$$

Las fórmulas $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ y $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$ se pueden usar de igual manera.

Cada función trigonométrica se puede expresar en términos de cualquier otra función trigonométrica. El siguiente ejemplo sirve como una ilustración. (Véanse también los Ejercicios 1 a 8.)

EJEMPLO 1 Expresar $\tan\theta$ en términos de $\cos\theta$, en donde θ es un ángulo agudo.

SOLUCIÓN Considérese $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$. Como $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ y θ es agudo, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}.$$

Por lo tanto,

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\theta}}{\cos\theta}.$$

■

EJEMPLO 2 Sea θ un ángulo agudo para el cual $\sec\theta = \frac{5}{3}$; aplicar las identidades trigonométricas para encontrar (a) $\tan\theta$ y (b) $\operatorname{sen}\theta$.

SOLUCIÓN

(a) Puesto que $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, se observa que

$$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$$

y por lo tanto

$$\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{25}{9} - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}.$$

(b) Nótese en primer lugar que $\cos\theta = 1/\sec\theta = \frac{3}{5}$. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

■

En los primeros dos ejemplos las raíces cuadradas fueron positivas. Más adelante, cuando se amplíen sus dominios, las funciones trigonométricas podían tomar valores negativos y será necesario escribir

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta} \quad \text{y} \quad \tan\theta = \pm\sqrt{\sec^2\theta - 1},$$

y elegir + o −, dependiendo de la naturaleza de θ.

El siguiente ejemplo ilustra la forma en que se pueden usar las funciones trigonométricas para simplificar expresiones que contienen funciones trigonométricas.

EJEMPLO 3 Emplear las identidades fundamentales para transformar la expresión $(\sec\theta - \cos\theta)\cos\theta$ en $\operatorname{sen}^2\theta$.

SOLUCIÓN Puede procederse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(\sec\theta - \cos\theta)\cos\theta &= \sec\theta\cos\theta - \cos^2\theta \\ &= \frac{1}{\cos\theta}\cos\theta - \cos^2\theta \\ &= 1 - \cos^2\theta \\ &= \operatorname{sen}^2\theta.\end{aligned}$$

■

Ejercicios 6.3

En los Ejercicios 1 a 8 escriba la primera expresión en términos de la segunda.

1. $\cot\theta$, $\operatorname{sen}\theta$
2. $\tan\theta$, $\operatorname{sen}\theta$
3. $\sec\theta$, $\operatorname{sen}\theta$
4. $\csc\theta$, $\cos\theta$
5. $\tan\theta$, $\sec\theta$
6. $\cot\theta$, $\csc\theta$
7. $\operatorname{sen}\theta$, $\sec\theta$
8. $\cos\theta$, $\cot\theta$

Demuestre las identidades de los Ejercicios 9 y 10.

9. (a) $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\csc\theta}$

   (b) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$

   (c) $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$

10. $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

En los Ejercicios 11 a 14, use las identidades fundamentales para encontrar los valores de las funciones trigonométricas restantes del ángulo agudo θ.

11. $\cos\theta = \frac{1}{2}$
12. $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{5}$
13. $\csc\theta = \frac{3}{2}$
14. $\cot\theta = \frac{4}{3}$

En los Ejercicios 15 a 28, aplique las identidades fundamentales para transformar la primera expresión en la segunda.

15. $\cos\theta\csc\theta$, $\cot\theta$
16. $\tan\theta\csc\theta$, $\sec\theta$
17. $\tan\theta\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$
18. $\cot\theta\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$
19. $\dfrac{\sec\theta}{\tan\theta}$, $\csc\theta$
20. $\dfrac{\cot\theta}{\csc\theta}$, $\cos\theta$
21. $\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta}$, $\cos^2\theta$
22. $\dfrac{\sec\theta}{\csc\theta}$, $\tan\theta$
23. $(1 + \cot^2\theta)\tan^2\theta$, $\sec^2\theta$
24. $(1 - \operatorname{sen}^2\theta)\sec^2\theta$, 1
25. $\operatorname{sen}\theta(\csc\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $\cos^2\theta$
26. $\dfrac{1 - \operatorname{sen}^2\theta}{1 - \cos^2\theta}$, $\cot^2\theta$
27. $\dfrac{1 + \tan^2\theta}{\tan^2\theta}$, $\csc^2\theta$
28. $\dfrac{\cos^2\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta}$, $1 + \operatorname{sen}\theta$

Demuestre que las fórmulas de los Ejercicios 29 y 30 son verdaderas para todo ángulo agudo θ.

29. $\log\csc\theta = -\log\operatorname{sen}\theta$
30. $\log\tan\theta = \log\operatorname{sen}\theta - \log\cos\theta$

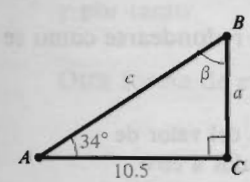
6.4 Aplicaciones de los triángulos rectángulos

Los primeros desarrollos de la trigonometría se relacionaron con la medición de ángulos y la determinación de la longitud de los lados de los triángulos. La solución de ese tipo de problemas ya no es la aplicación más importante; sin embargo las técnicas de las trigonometría aún se usan para resolver cuestiones respecto a triángulos que surgen en situaciones de la física y la matemática. En esta sección limitaremos nuestro estudio a triángulos rectángulos. En el Capítulo 8 se considerarán los ángulos que no contienen un ángulo recto.

En esta sección y en la que sigue usaremos generalmente la siguiente notación. Los vértices de un triángulo se denotarán comúnmente con A, B y C. Los ángulos del triángulo en A, B y C se denotarán con α, β y γ, respectivamente, y las longitudes de los lados opuestos a estos ángulos con a, b y c, respectivamente. A menudo se designa al triángulo como *triángulo ABC*. *Resolver* un triángulo significa encontrar todas sus partes, esto es, la longitud de los tres lados y la medida de los tres ángulos. Si el triángulo es rectángulo y se conoce uno de los ángulos agudos y un lado, o si dos lados están dados, entonces las fórmulas de la Sección 6.2, que expresan las funciones trigonométricas como razones de lados de un triángulo, pueden ser utilizadas para evaluar las partes restantes.

EJEMPLO 1 Si en el triángulo ABC, $\gamma = 90°$, $\alpha = 34°$ y $b = 10.5$, calcular aproximadamente las otras partes del triángulo.

FIGURA 6.16



SOLUCIÓN Como la suma de los ángulos es 180° y $\alpha + \gamma = 124°$, se concluye que $\beta = 56°$. Si nos referimos a la Figura 6.16 y usamos el hecho de que la tangente es igual a op/ady, tenemos que

$$\tan 34° = \frac{a}{10.5} \quad \text{o bien} \quad a = (10.5)\tan 34°.$$

Usando una calculadora o la Tabla 4, obtenemos

$$a \approx (10.5)(0.6745) \approx 7.1.$$

El lado c puede determinarse mediante la función coseno o la función secante. Como $\cos\alpha$ = ady/hip, podemos escribir

$$\cos 34° = \frac{10.5}{c} \quad \text{o bien} \quad c = \frac{10.5}{\cos 34°}.$$

Al usar la Tabla 4 o una calculadora obtenemos

$$c \approx \frac{10.5}{0.8290} \approx 12.7.$$

La división utilizada para encontrar c pudo haberse evitado por medio del uso de la secante, que es igual a hip/ady. Entonces,

$$\sec 34^\circ = \frac{c}{10.5} \quad \text{o bien} \quad c = (10.5)\sec 34^\circ.$$

Con la Tabla 4 o una calculadora,

$$c \approx (10.5)(1.2062) = 12.6651 \approx 12.7. \qquad \blacksquare$$

Como lo ilustra el Ejemplo 1, cuando trabajamos con triángulos debemos redondear las respuestas. Una razón para hacer esto es que en las aplicaciones, la longitud de los lados de los triángulos y la medida de los ángulos se obtienen comúnmente mediante dispositivos mecánicos y por lo tanto son sólo aproximaciones de los valores exactos. En consecuencia, un número como 10.5 en el Ejemplo 1 supuestamente ha sido redondeado a décimos. No se puede esperar mayor exactitud en los valores calculados para los otros lados y por lo tanto también deben redondearse al décimo más cercano.

En algunos problemas un número con muchos dígitos, como 36.4635, puede tenerse como lado de un triángulo. Si se emplea calculadora, el número puede introducirse como es usual; sin embargo, si se emplea la Tabla 4, un número tal debe redondearse antes de empezar los cálculos. Si un número x está representado en la forma científica $x = c \cdot 10^k$, con $1 \le c < 10$, entonces, antes de usar la Tabla 4, se debe redondear c a tres cifras decimales. Otra manera de decir esto es que x debe redondearse a cuatro *cifras significativas*. Algunos ejemplos ayudarán a aclarar el procedimiento. Si $x = 36.4635$, redondeamos a 36.46. El número 684 279 debe redondearse a 684 300. En el caso de una fracción decimal como 0.096202 se usa 0.09620. La razón por la cual, se redondea es que el valor de las funciones trigonométricas en la Tabla 4 está redondeado a cuatro cifras significativa , y por tanto no es de esperar más de cuatro cifras de precisión en los cálculos.

Cuando se determinan ángulos, las respuestas deben redondearse como se indica en la siguiente tabla.

Número de cifras significativas para los lados	Redondeo del valor de los ángulos a cero
2	1°
3	10′ o bien 0.1°
4	1′ o bien 0.01°

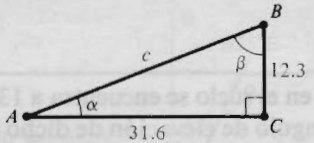
Para justificar esta tabla se requiere de un análisis cuidadoso de los problemas que contienen datos aproximados.

EJEMPLO 2 Si en el triángulo ABC, $\gamma = 90^\circ$, $a = 12.3$ y $b = 31.6$, determinar las partes restantes.

SOLUCIÓN Si nos referimos al triángulo ilustrado en la Figura 6.17 tenemos

$$\tan \alpha = \frac{12.3}{31.6} \approx 0.3892.$$

FIGURA 6.17



Puesto que los lados están dados con tres cifras significativas, la regla enunciada en la tabla anterior indica que α se debe redondear al múltiplo más cercano de 10′. Si se usa una calculadora para aproximar α se emplea el modo de grados y se procede de la siguiente manera:

Ingresar: 0.3892 (el valor de $\tan\alpha$)

Oprimir [INV] [tan]: $21.265988 \approx 21°16' \approx 21°20'$ (la aproximación de α)

Para encontrar α también se puede usar la Tabla 4.
Puesto que $\alpha \approx 21°20'$,

$$\beta \approx 90° - 21°20' = 68°40'.$$

Nuevamente, con referencia a la Figura 6.17,

$$\sec\alpha = \frac{c}{31.6} \quad \text{o bien} \quad c = (31.6)\sec\alpha$$

y por lo tanto, $c \approx (31.6)\sec 21°20' \approx (31.6)(1.0736) \approx 33.9.$

El lado c también puede encontrarse usando otras funciones trigonométricas. De la Figura 6.17 tenemos que

$$\cos\alpha = \frac{31.6}{c}$$

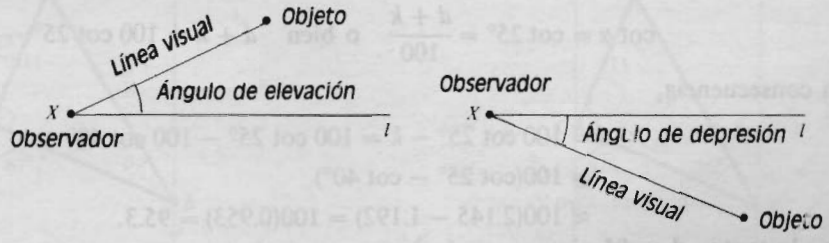
y por tanto $$c = \frac{31.6}{\cos 21°20'} \approx \frac{31.6}{0.9315} \approx 33.9.$$

Otra forma de evaluar c, aplicando el Teorema de Pitágoras, sería la siguiente:

$$c = \sqrt{(31.6)^2 + (12.3)^2} = \sqrt{1149.85} \approx 33.9$$ ■

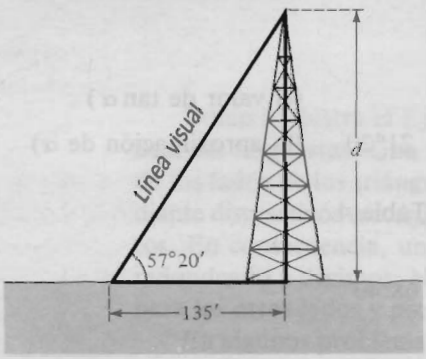
Cuando un observador mira un objeto, como se muestra en la Figura 6.18, el ángulo que forma la línea visual (o de visión) con la recta horizontal l se llama **ángulo de**

FIGURA 6.18



elevación, o **ángulo de depresión**, del objeto, dependiendo de si el objeto está por encima o por debajo de la horizontal. Esta terminología se usa en los dos ejemplos que siguen.

FIGURA 6.19



EJEMPLO 3 Un punto en el suelo se encuentra a 135 pie de la base de una torre. El ángulo de elevación de dicho punto a la cúspide de la estructura es 57°20′. Calcule la altura de la torre.

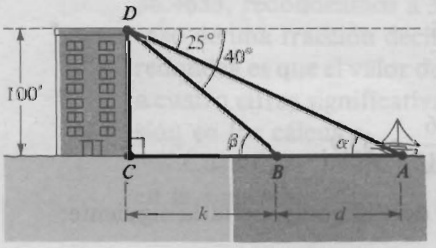
SOLUCIÓN Si h denota la altura de la torre, entonces la situación se representa con el triángulo de la Figura 6.13. En la figura vemos que

$$\tan 57°20' = \frac{h}{135} \quad \text{o bien} \quad h = (135)\tan 57°20'.$$

Al utilizar una tabla o una calculadora, tenemos

$$h \approx (135)(1.560) \approx 210.6 \approx 211 \text{ pie.}$$ ■

FIGURA 6.20



EJEMPLO 4 Desde la punta de un edificio que ve hacia el mar, una persona observa un bote que navega directamente hacia ella. Si se encuentra a 100 pie sobre el nivel del mar y el ángulo de depresión del bote cambia de 25° a 40° durante el periodo de observación, hallar la distancia aproximada que ha recorrido el bote durante ese tiempo.

SOLUCIÓN El problema se ilustra en la Figura 6.20, si A y B son las posiciones del bote que corresponden a los ángulos de 25° y 40°, respectivamente, suponemos que la persona está en el punto D y que C es el punto que se encuentra a 100 pie directamente abajo, d denota la distancia que recorre el bote y k es la distancia de B a C. Si α y β denotan los ángulos DAC y DBC, respectivamente, se concluye que $\alpha = 25°$ y $\beta = 40°$.

Del triángulo BCD,

$$\cot \beta = \cot 40° = \frac{k}{100} \quad \text{o bien} \quad k = 100 \cot 40°.$$

Del triángulo DAC,

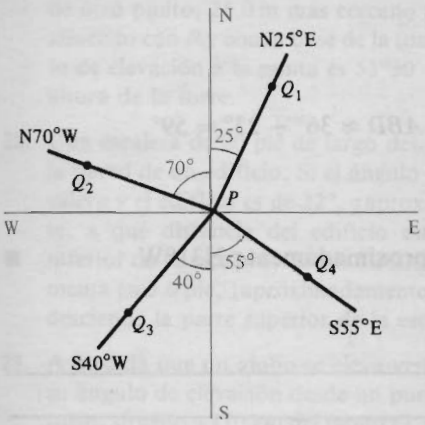
$$\cot \alpha = \cot 25° = \frac{d+k}{100} \quad \text{o bien} \quad d + k = 100 \cot 25°.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} d &= 100 \cot 25° - k = 100 \cot 25° - 100 \cot 40° \\ &= 100(\cot 25° - \cot 40°) \\ &\approx 100(2.145 - 1.192) = 100(0.953) = 95.3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d \approx 95$ pie. ■

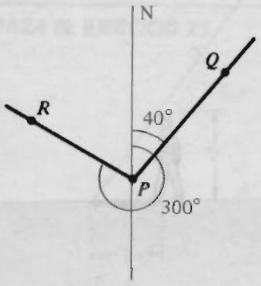
FIGURA 6.21



En ciertos problemas de navegación y de topografía o agrimensura, el **rumbo** o **dirección** de un punto P a un punto Q a menudo se especifica mediante el ángulo agudo que forma la semirrecta de P a Q hacia el este o el oeste respecto a la línea norte-sur. La Figura 6.21 ilustra cuatro de esas semirrectas. Las líneas norte-sur y este-oeste son las NS y OE, respectivamente. El rumbo de P a Q, es 25° al este del norte y se denota como N25°E. También se designa como *orientación* o *posición* N25°E, la dirección de P a Q. Las orientaciones de P a Q_2, Q_3 y Q_4 están representadas de manera similar en la figura.

En la navegación aérea, los rumbos o direcciones se especifican midiendo a partir del norte en el sentido de las manecillas del reloj. En esta situación particular se asigna al ángulo una medida positiva en vez de la medida negativa a la que estamos acostumbrados para rotaciones en el sentido de las manecillas del reloj. Entonces, en la Figura 6.22 vemos que la dirección de PQ es 40°, mientras que la dirección de PR es 300°.

FIGURA 6.22



EJEMPLO 5 Dos barcos A y B zarpan al mismo tiempo; el barco A navega en la dirección N23°E a una velocidad de 11 mi/h y el barco B navega en la dirección S67°E a 15 mi/h. Calcule la *posición* del barco B respecto de la embarcación A, una hora más tarde.

SOLUCIÓN El croquis de la Figura 6.23 indica las posiciones de los barcos en los puntos A y B después de una hora. El punto c representa el puerto. Nótese que

$$\angle ACB = 180° - (23° + 67°) = 90°$$

y por lo tanto el ángulo ABC es un triángulo rectángulo. Así,

$$\tan \beta = \frac{11}{15} \approx 0.7333.$$

FIGURA 6.23

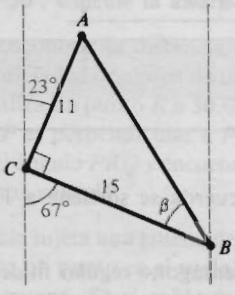
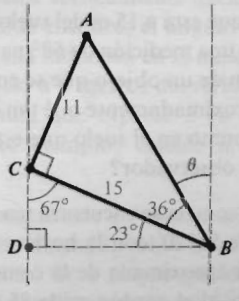


FIGURA 6.24



Usando una tabla (como la 4) o una calculadora se obtiene

$$\beta \approx 36°.$$

Refiriéndose a la Figura 6.24 se observa que

$$\angle CBD = 90° - 67° = 23° \quad \text{y} \quad \angle ABD \approx 36° + 23° = 59°.$$

Por lo tanto

$$\theta \approx 90° - 59° = 31°,$$

lo que implica que la orientación de B a A es aproximadamente N31°W. ■

Ejercicios 6.4

Dadas las partes indicadas del triángulo ABC con $\gamma = 90°$, calcule aproximadamente las partes restantes de cada triángulo en los Ejercicios 1 a 16.

1. $\alpha = 30°,\ b = 20$
2. $\beta = 45°,\ b = 35$
3. $\beta = 52°,\ a = 15$
4. $\alpha = 37°,\ b = 24$
5. $\alpha = 17°40',\ a = 4.50$
6. $\beta = 64°20',\ a = 20.1$
7. $\beta = 71°51',\ b = 240.0$
8. $\alpha = 31°10',\ a = 510$
9. $a = 25,\ b = 45$
10. $a = 31,\ b = 9.0$
11. $c = 5.8,\ b = 2.1$
12. $a = 0.42,\ c = 0.68$
13. $\alpha = 37°46',\ b = 512.0$
14. $\beta = 10°17',\ b = 68.40$
15. $a = 614,\ c = 806$
16. $c = 37.4,\ b = 21.6$

FIGURA PARA EL EJERCICIO 17

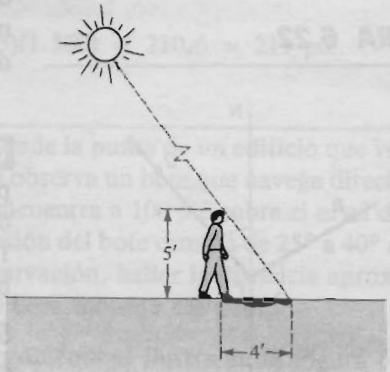
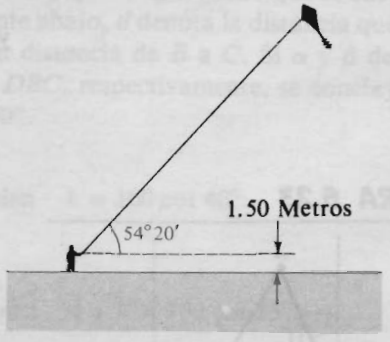


FIGURA PARA EL EJERCICIO 19



17. Encuentre el ángulo de elevación del Sol si un niño de 5.0 pie de estatura produce una sombra de 4.0 pie de longitud en el suelo.

18. Desde un punto que está a 15 m del suelo, un observador obtiene una medición de 68° para el ángulo de depresión de un objeto que se encuentra en el suelo. ¿Aproximadamente qué tan lejos está el objeto del punto en el suelo que está directamente bajo el observador?

19. El cordel de una cometa se encuentra tenso y forma un ángulo de 54°20′ con la horizontal. Encuentre la altura aproximada de la cometa, con respecto al suelo, si el cordón mide 85.0 m y el extremo de la cuerda se sostiene a 1.50 m del suelo.

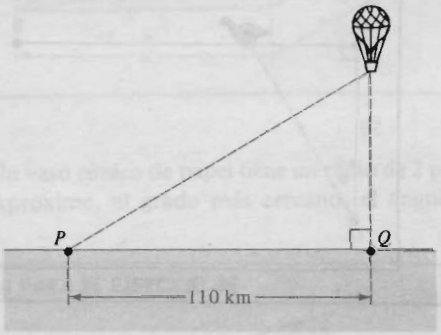
20. El lado de un pentágono regular mide 24.0 cm. Calcule el radio de la circunferencia circunscrita.

21. Desde un punto P en el suelo, el ángulo de elevación a la punta de una torre es de 26°50′. Desde otro punto, 25.0 m más cercano a la torre y alineado con P y con la base de la torre, el ángulo de elevación a la punta es 53°30′. Calcule la altura de la torre.

22. Una escalera de 20 pie de largo descansa sobre la pared de un edificio. Si el ángulo entre la escalera y el edificio es de 22°, ¿aproximadamente, a qué distancia del edificio está la parte inferior de la escalera? Si esa distancia se incrementa en 3.0 pie, ¿aproximadamente, qué tanto desciende la parte superior de la escalera?

23. A medida que un globo se eleva verticalmente, su ángulo de elevación desde un punto P, en el suelo, situado a 110 km del punto Q, que está directamente bajo el globo, cambia de 19°20′ a 31°50′. Determine qué tanto se eleva el globo durante ese periodo.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 23



24. Desde un punto A, a 8.20 m del suelo, el ángulo de elevación a la punta de un edificio es de 31°20′ y el ángulo de depresión a la base del mismo es de 12°50′. Calcule la altura del edificio.

25. Para encontrar la distancia d entre dos puntos P y Q en lados opuestos de un lago, un topógrafo localiza un punto R a 50.0 m de P, de manera que RP es perpendicular a PQ. A continuación mide el ángulo PRQ y encuentra que es de 72°40′. ¿Cuánto vale d?

26. Un cable sujeta una antena de radio desde la punta hasta un punto en el suelo a 40.0 m de la base de la antena. Si el cable forma un ángulo de 58°20′ con el suelo, ¿aproximadamente cuánto mide el citado cable?

27. Un octágono regular está inscrito en un círculo cuyo radio mide 12.0 cm. Encuentre el perímetro del octágono.

28. Un ingeniero desea construir una rampa de 24 pie de largo, que se levante a una altura de 5.0 pie del suelo. Calcule el ángulo que debe hacer la rampa con la horizontal.

29. Se dispara un cohete desde el nivel del mar y sube en un ángulo constante de 75° durante 10 000 pie. Calcule su altitud aproximada al pie más cercano.

30. Una antena de radio se encuentra instalada en el techo de un garaje que tiene 16 pie de altura. Desde un punto en el suelo, situado a 100 pie del punto que se encuentra directamente abajo de la antena, ésta subtiende un ángulo de 12°. Calcule la longitud aproximada de la antena.

31. Un avión vuela a una altitud de 10 000 pie y pasa directamente sobre un objeto fijo en tierra. Un minuto más tarde, el ángulo de depresión del objeto es 42°. Determine la velocidad aproximada del avión, a la milla por hora más cercana.

32. Un automovilista viaja en una carretera a nivel a 60 km/h directamente hacia una montaña distante. Observa que entre la 1:00 P.M. y la 1:10 P.M. el ángulo de elevación de la cima de la montaña cambia de 10° a 70°. Calcule la altura aproximada de la cumbre.

33. Un piloto de avión desea aproximarse a la pista de aterrizaje en un ángulo de 10° con la horizontal. Si vuela a una altitud de 5 000 pie, ¿aproximadamente a qué distancia de la pista debe empezar su descenso? Dé la respuesta redondeando a 100 pie.

34. Para medir la altura h de una nube, se dirige un reflector verticalmente hacia arriba desde tierra. Se mide entonces el ángulo de elevación θ de la mancha luminosa en la nube, desde un punto en el suelo a d metros del reflector. Encuentre una fórmula que exprese h en términos de d y θ. Como ejemplo, calcule h si $d = 1\,000$ m y $\theta = 59°$.

35. Un buque sale del puerto a la 1:00 P.M. y navega en dirección N34°O a una velocidad de 24 mi/h. Otro buque sale del puerto a la 1:30 P.M. y navega en dirección N56°E a 18 mi/h.

¿Aproximadamente qué distancia hay entre las dos embarcaciones a las 3:00 P.M.? ¿Cuál es la posición del primer barco respecto al segundo (redondeando a grados)?

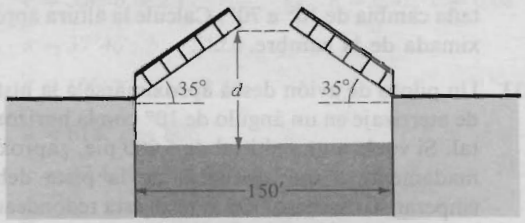
36. Desde un punto de observación A, un guardia forestal descubre un incendio en dirección S35°50′W. Desde otro punto B, a 5 millas directamente al oeste de A, otro guardia descubre el mismo incendio en dirección S54°10′E. Determine, aproximada al décimo de milla más cercano, a qué distancia de A se encuentra el fuego.

37. Un avión vuela desde un punto A a 360 mi/h en la dirección 137° durante 30 minutos, y luego vuela en la dirección 277° durante 45 minutos. Calcule redondeando a la milla más próxima, la distancia a que se encuentra el avión de A.

38. Un avión despega a un ángulo de 10° y viaja a una velocidad de 250 pie/s. ¿Cuánto tiempo tarda, aproximadamente, en alcanzar una altura de 15 000 pie?

39. Un puente levadizo tiene 150 pie de longitud cuando está en posición normal sobre un río. Las dos secciones del puente pueden girar hacia arriba hasta un ángulo de 35°; como se muestra en la figura.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 39

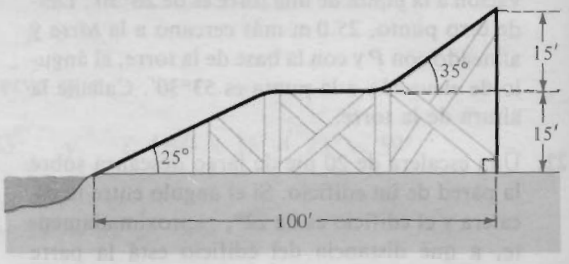


(a) Si el nivel del agua está 15 pie por debajo del puente, calcule la distancia d entre el extremo de una sección y el nivel del agua cuando el puente está completamente abierto.

(b) Determine la separación entre los extremos de las dos secciones cuando el puente está totalmente abierto.

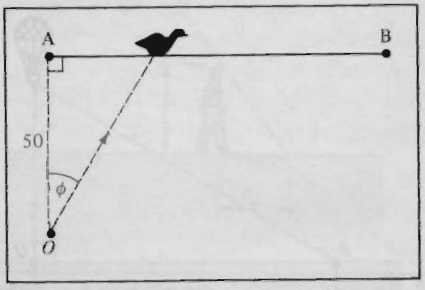
40. En la figura se muestra uno de los planos del diseño de un tobogán de agua. Calcule la longitud total del tobogán al pie más cercano.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 40



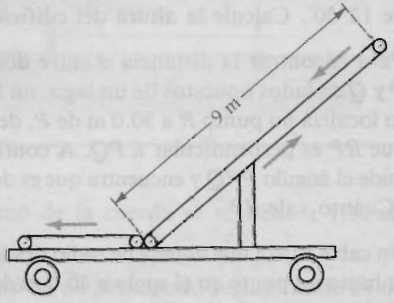
41. En la figura se ilustra la pantalla de un juego sencillo de video, en el que se ven volando patos de A a B con una velocidad de 10 cm/s. Del punto O, se disparan balas que viajan a 20 cm/s. Si un jugador dispara en cuanto aparece un pato en el punto A, ¿a qué ángulo debe orientar el rifle para darle?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 41



42. Una banda transportadora de 9 m de largo puede levantarse hidráulicamente hasta 40° para descargar equipaje de los aviones (véase la figura).

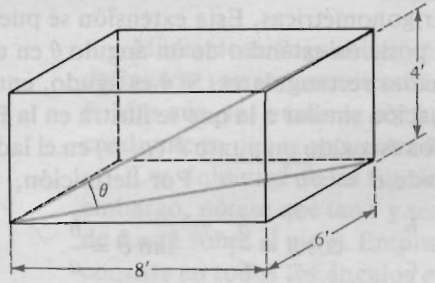
FIGURA PARA EL EJERCICIO 42



(a) Calcule el ángulo al que debe girarse la banda, al grado más cercano, para alcanzar una puerta que se encuentra a 4 m por encima del nivel de la banda.
(b) Aproxime la altura máxima que puede alcanzar la banda mencionada.

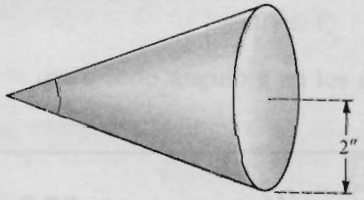
43. Las dimensiones de una caja rectangular son 8 × 6 × 4 pulgadas. Aproxime, al décimo de grado más cercano, el ángulo formado por la diagonal de la base y la diagonal de la caja que se muestran en la figura.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 43



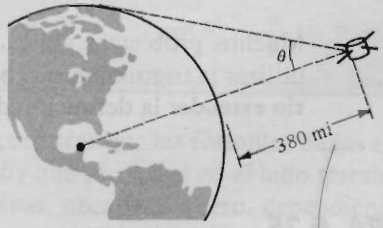
44. Un vaso cónico de papel tiene un radio de 2 pulg. Aproxime, al grado más cercano, el ángulo β (véase la figura), tal que el volumen del cono sea de 20 pulg^3.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 44



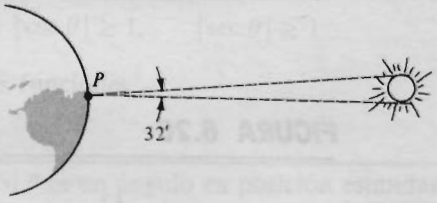
45. Un laboratorio espacial gira alrededor de la Tierra a una altitud de 380 millas. Cuando un astronauta mira al horizonte de la Tierra, el ángulo θ que se muestra en la figura es de 65.8°. Use esta información para calcular el radio r de la Tierra.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 45



46. Cuando se ve el Sol desde un punto P en la Tierra, su superficie subtiende un ángulo de 32′ (véase la figura). Usando un valor de 92 900 000 millas para la distancia entre P y el centro del Sol, estime el diámetro de éste.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 46



Ejercicios para Calculadora 6.4

Dadas las partes indicadas del triángulo ABC con $\gamma = 90°$, determine aproximadamente las otras partes de cada triángulo en los Ejercicios 1 a 10. Redondee las respuestas a cuatro cifras significativas.

1. $\alpha = 41.27°$, $a = 314.6$

2. $\beta = 24.96°$, $b = 209.3$

3. $\beta = 37.06°$, $a = 0.4613$

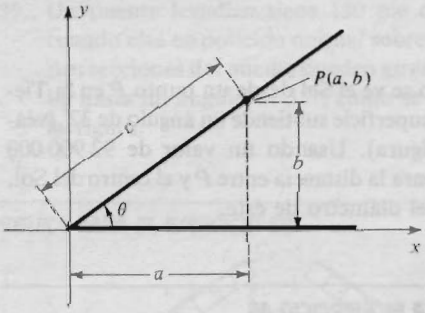
4. $\alpha = 17.69°$, $b = 1.307$

5. $\beta = 2.71°$, $b = 7149$
6. $\alpha = 84.07°$, $a = 0.1024$
7. $a = 46.87$, $b = 13.12$
8. $a = 6.948$, $b = 8.371$
9. $b = 2462$, $c = 5074$
10. $a = 88.12$, $c = 94.06$

6.5 Funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Muchos problemas aplicados requieren del uso de ángulos que no son agudos. Para utilizar la trigonometría como herramienta en la solución de tales problemas, es necesario extender la definición de las funciones trigonométricas. Esta extensión se puede lograr mediante la posición estándar de un ángulo θ en un sistema de coordenadas rectangulares. Si θ es agudo, entonces tenemos una situación similar a la que se ilustra en la Figura 6.25, donde hemos escogido un punto $P(a, b)$ en el lado terminal de θ y donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Por definición,

FIGURA 6.25

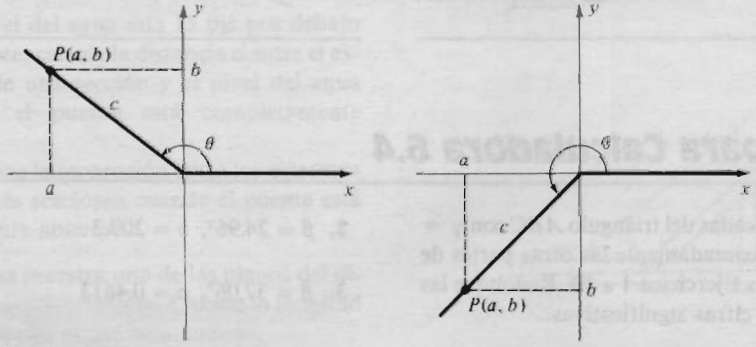


$$\text{sen } \theta = \frac{b}{c}, \qquad \cos \theta = \frac{a}{c}, \qquad \tan \theta = \frac{b}{a}.$$

Ahora deseamos considerar ángulos como los que aparecen en la Figura 6.26 (o cualquier *otro* ángulo, ya sea positivo, negativo o cero).

Nuestro objetivo es definir las funciones trigonométricas de modo que sus valores concuerden con los que se dieron previamente cuando el ángulo es agudo. La siguiente definición logra esto de una manera muy simple.

FIGURA 6.26



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER ÁNGULO

Sea θ un ángulo en posición estándar en un sistema de coordenadas rectangulares y sea $P(a, b)$ cualquier punto diferente de O en el lado terminal de θ. Si $d(O, P) = c = \sqrt{a^2 + b^2}$, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{c} \qquad \csc\theta = \frac{c}{b} \text{ (si } b \neq 0)$$

$$\cos\theta = \frac{a}{c} \qquad \sec\theta = \frac{c}{a} \text{ (si } a \neq 0)$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \text{ (si } a \neq 0) \qquad \cot\theta = \frac{a}{b} \text{ (si } b \neq 0)$$

Mediante triángulos semejantes se puede demostrar que las fórmulas dadas en esta definición son independientes del punto $P(a, b)$ que se escoge en el lado terminal de θ. Más aún, los números a y b pueden ser positivos, negativos o cero, dependiendo del cuadrante en que se encuentra θ, o cuando el lado terminal está sobre un eje coordenado.

Los dominios de las funciones seno y coseno consisten en todos los ángulos θ. Sin embargo, nótese que $\tan\theta$ y $\sec\theta$ están indefinidas si $a = 0$, esto es, si el lado terminal de θ está sobre el eje y. Entonces el dominio de las dos funciones, tangente y secante, consiste en todos los ángulos *excepto* los que miden $[(\pi/2) + n\pi]$ radianes, en donde n es cualquier entero. Algunos casos especiales son $\pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$, y $\pm 5\pi/2$. Los valores correspondientes en grados son $\pm 90°$, $\pm 270°$ y $\pm 450°$. De igual manera, los dominios de las funciones cotangente y cosecante consisten en todos los ángulos excepto aquéllos que conducen a $b = 0$, es decir, cuyo lado terminal se encuentra sobre el eje x, esto es, ángulos de $n\pi$ radianes (o bien, $n \cdot 180°$), en donde n es cualquier entero.

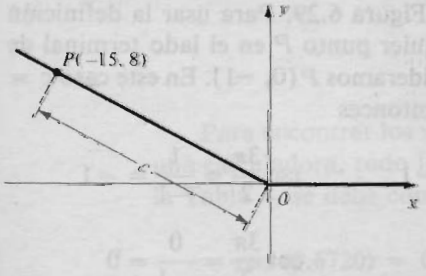
Para todos los puntos $P(a, b)$ de la definición tenemos que $|a| \leq c$ y $|b| \leq c$, y esto implica que

$$|\operatorname{sen}\theta| \leq 1, \quad |\cos\theta| \leq 1, \quad |\csc\theta| \geq 1, \quad |\sec\theta| \geq 1$$

para todo ángulo θ en los dominios de estas funciones.

EJEMPLO 1 Si θ es un ángulo en posición estándar en un sistema de coordenadas rectangulares y si el punto $P(-15, 8)$ está en el lado terminal de θ, encuentre los valores de las funciones trigonométricas de θ.

FIGURA 6.27

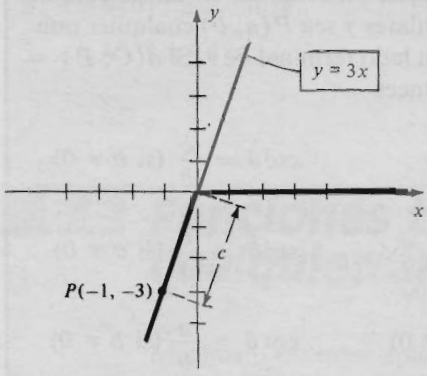


SOLUCIÓN El punto P se indica en la Figura 6.27. Por la fórmula de la distancia,

$$c = d(O, P) = \sqrt{(-15)^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64}$$

$$= \sqrt{289} = 17.$$

FIGURA 6.28



Si aplicamos la definición con $a = -15$, $b = 8$ y $c = 17$, obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \tfrac{8}{17} \qquad \csc\theta = \tfrac{17}{8}$$
$$\cos\theta = -\tfrac{15}{17} \qquad \sec\theta = -\tfrac{17}{15}$$
$$\tan\theta = -\tfrac{8}{15} \qquad \cot\theta = -\tfrac{15}{8}$$

■

EJEMPLO 2 Un ángulo θ está en posición estándar en un sistema de coordenadas rectangulares. Si su lado terminal está en el cuadrante III y si coincide con la recta $y = 3x$. Hallar los valores de las funciones trigonométricas de θ.

SOLUCIÓN En la Figura 6.28 se traza la tráfica de $y = 3x$, junto con los lados inicial y terminal (más grueso) de θ.

Empezamos por escoger un punto conveniente en el tercer cuadrante $P(-1, -3)$, en el lado terminal. La distancia c del origen a P es

$$c = d(O, P) = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}.$$

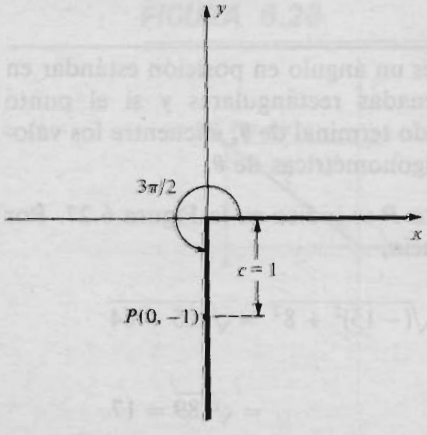
Si aplicamos la definición con $a = -1$, $b = -3$ y $c = -10$ obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10} \qquad \csc\theta = \frac{\sqrt{10}}{-3} = -\frac{\sqrt{10}}{3}$$
$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10} \qquad \sec\theta = \frac{\sqrt{10}}{-1} = -\sqrt{10}$$
$$\tan\theta = \frac{-3}{-1} = 3 \qquad \cot\theta = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

■

La definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo puede aplicarse si el lado terminal de θ está sobre un eje coordenado, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

FIGURA 6.29



EJEMPLO 3 Hallar los valores de las funciones trigonométricas de θ si $\theta = 3\pi/2$.

SOLUCIÓN Nótese que $3\pi/2 = 270°$. Si θ está en posición estándar, su lado terminal coincide con el eje negativo y, como lo muestra la Figura 6.29. Para usar la definición podemos escoger cualquier punto P en el lado terminal de θ. Por simplicidad consideramos $P(0, -1)$. En este caso $c = 1$, $a = 0$, $b = -1$, y entonces

$$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \csc\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{-1} = -1$$
$$\cos\frac{3\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cot\frac{3\pi}{2} = \frac{0}{-1} = 0$$

Las funciones tangente y secante están indefinidas, ya que al sustituir los valores en las fórmulas apropiadas, surgen las expresiones carentes de sentido $\tan\theta = (-1)/0$ y $\sec\theta = 1/0$. ■

Determinemos los signos asociados a las funciones trigonométricas. Si θ está en el cuadrante II, y $P(a, b)$ es un punto en el lado terminal, entonces a es negativa, b es positiva y por lo tanto, $\operatorname{sen}\theta$ y $\csc\theta$ son positivos, mientras que las otras cuatro funciones son negativas. El lector debe verificar los cuadrantes restantes. La tabla siguiente indica el signo en los cuatro cuadrantes.

SIGNO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Cuadrante que contiene θ	Funciones positivas	Funciones negativas
I	Todas	Ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, csc, cos, sec
IV	cos, sec	sen, csc, tan, cot

EJEMPLO 4 Si $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\cos\theta > 0$, determinar el cuadrante que contiene a θ si $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\cos\theta > 0$.

SOLUCIÓN Al referirnos a la tabla anterior, vemos que $\operatorname{sen}\theta < 0$ cuando θ está en los cuadrantes III o IV y $\cos\theta > 0$ cuando θ está en el cuadrante I o en el IV. Por lo tanto, para satisfacer ambas condiciones, θ debe estar en el cuadrante IV.

Las identidades fundamentales que se establecieron para ángulos agudos, también son ciertas para funciones trigonométricas de cualquier ángulo. En efecto, las demostraciones son idénticas a las que se dieron en la Sección 6.3. Haremos mucho uso de estas identidades en el capítulo siguiente.

En cálculo y otros cursos avanzados es necesario considerar funciones trigonométricas cuyos dominios son conjuntos de números reales. La definición siguiente indica cómo hacer la transición de ángulos a números reales.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE NÚMEROS REALES

Si t es un número real, entonces el valor de cualquier función trigonométrica en t es su valor en un ángulo de t radianes, siempre y cuando ese valor exista.

Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas de números reales con una calculadora, todo lo que se necesita es usar el modo en radianes. Cuando se usa la Tabla 4, se debe consultar la columna marcada con "t". Por ejemplo,

$\cos(0.6720) \approx 0.7826$ (de la Tabla 4 o usando la calculadora)

sen $(1.40) \approx 0.9854$ (de la Tabla 5 o por medio de la calculadora)

sec $(\pi/4) = \sqrt{2} \approx 1.4142$ (del Ejemplo 2 de la Sección 6.2)

El siguiente concepto es necesario cuando se usan tablas para encontrar valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo o número real. También se necesita si se utiliza una calculadora para encontrar todos los ángulos, o números reales, que corresponden al valor dado de una función.

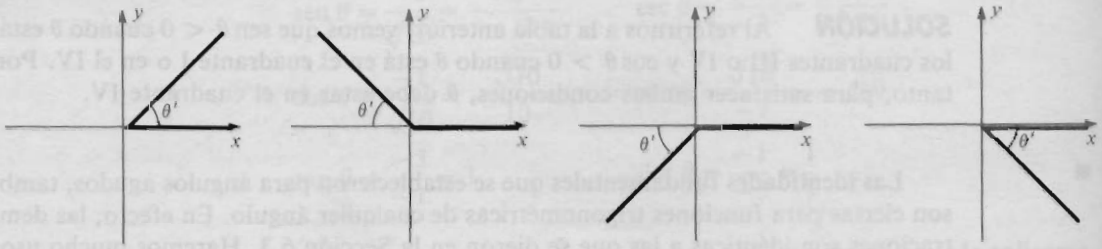
DEFINICIÓN

Si θ es un ángulo en posición estándar y el lado terminal no se encuentra sobre un eje coordenado, entonces el **ángulo de referencia** para θ es el ángulo agudo θ' que hace el lado terminal de θ con el eje x, positivo o negativo.

La Figura 6.30 ilustra el ángulo de referencia θ' de un ángulo θ en cada uno de los cuatro cuadrantes.

FIGURA 6.30

Ángulos de referencia



EJEMPLO 5 Trazar el ángulo de referencia θ' para cada uno de los ángulos siguientes y expresar la medida de θ' tanto en radianes como en grados.

(a) $\theta = 5\pi/6$ (b) $\theta = 315°$ (c) $\theta = -240°$ (d) $\theta = 4$

SOLUCIÓN Cada ángulo θ y su ángulo de referencia θ' se presentan en la Figura 6.31. Evidentemente las medidas son:

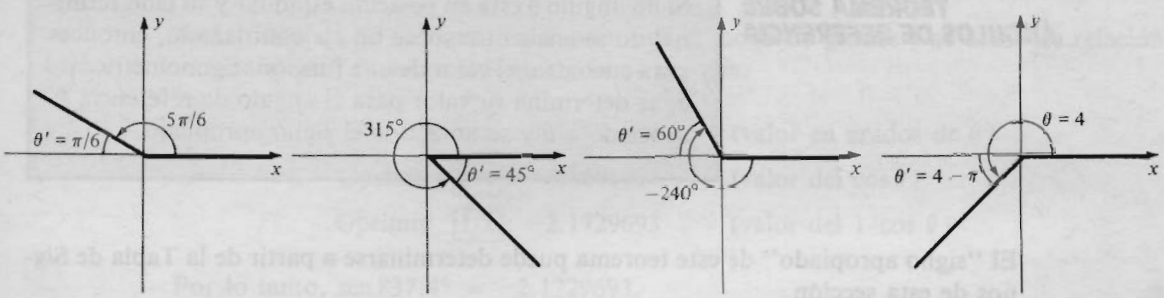
(a) $\theta' = \pi/6 = 30°$

(b) $\theta' = 45° = \pi/4$

(c) $\theta' = 60° = \pi/3$

(d) $\theta' = 4 - \pi = (4 - \pi)\left(\frac{180}{\pi}\right)° \approx 49.2°$ ■

FIGURA 6.31



Si el lado terminal de θ no coincide con un eje coordenado y si θ' es el ángulo de referencia de θ, entonces $0° < \theta' < 90°$. Supongamos que $P(a, b)$ es un punto en el lado terminal de θ y consideremos el punto $Q(a, 0)$ sobre el eje x. Los croquis de la Figura 6.32 ilustran situaciones típicas cuando θ está en cualquiera de los cuatro cuadrantes. Nótese que en todos los casos, la longitud de los lados del triángulo OPQ son

$$d(O, Q) = |a|, \qquad d(Q, P) = |b|, \qquad d(O, P) = \sqrt{a^2 + b^2} = c.$$

Al aplicar la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo y utilizar el triángulo OPQ obtenemos

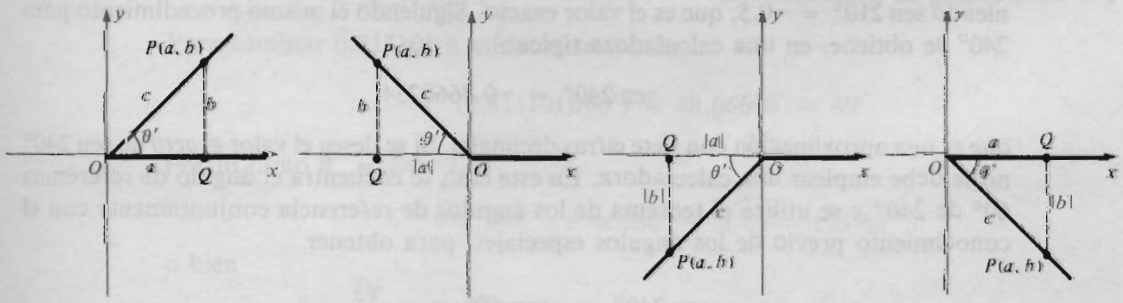
$$|\operatorname{sen}\theta| = \left|\frac{b}{c}\right| = \frac{|b|}{c} = \operatorname{sen}\theta'$$

$$|\cos\theta| = \left|\frac{a}{c}\right| = \frac{|a|}{c} = \cos\theta'$$

$$|\tan\theta| = \left|\frac{b}{a}\right| = \frac{|b|}{|a|} = \tan\theta'$$

y así sucesivamente. Esto nos lleva a la regla que se enuncia en el teorema siguiente. Si el lado terminal de θ se encuentra sobre un eje coordenado, entonces debe usarse la definición de las funciones trigonométricas para encontrar los valores.

FIGURA 6.32



TEOREMA SOBRE ÁNGULOS DE REFERENCIA

Si un ángulo θ está en posición estándar y su lado terminal no se encuentra sobre un eje coordenado, entonces para encontrar el valor de una función trigonométrica de θ, se determina su valor para el ángulo de referencia θ' asociado a θ y se antepone el signo apropiado.

El "signo apropiado" de este teorema puede determinarse a partir de la Tabla de Signos de esta sección.

EJEMPLO 6 Hallar $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$ si (a) $\theta = 5\pi/6$; (b) $\theta = 315°$.

SOLUCIÓN En la Figura 6.21 aparecen los ángulos y sus ángulos de referencia. Si empleamos el Teorema sobre Ángulos de Referencia y la Tabla A de la Sección 6.2 obtenemos

(a)
$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan\frac{5\pi}{6} = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(b)
$$\operatorname{sen} 315° = -\operatorname{sen} 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos 315° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan 315° = -\tan 45° = -1$$

■

Si se usa una calculadora para aproximar los valores funcionales no es necesario utilizar ángulos de referencia. Como ejemplo, para evaluar sen 210° se coloca la calculadora en el modo de grados, se introduce el número y se oprime la tecla [sen], obteniendo sen 210° = −0.5, que es el valor exacto. Siguiendo el mismo procedimiento para 240° se obtiene, en una calculadora típica

$$\operatorname{sen} 240° \approx -0.8660254,$$

que es una aproximación con siete cifras decimales. Si se desea el valor *exacto* de sen 240° no se debe emplear una calculadora. En este caso se encuentra el ángulo de referencia 60° de 240° y se utiliza el teorema de los ángulos de referencia conjuntamente con el conocimiento previo de los ángulos especiales, para obtener

$$\operatorname{sen} 240° = -\operatorname{sen} 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

EJEMPLO 7 Usar una calculadora para aproximar $\sec 837.4°$.

SOLUCIÓN Se coloca la calculadora en el modo de grados y se utiliza la relación recíproca $\sec\theta = 1/\cos\theta$ de la siguiente manera:

Ingresar:	837.4	(valor en grados de θ)
Oprimir [cos]:	−0.4601998	(valor del $\cos\theta$)
Oprimir [1/x]:	−2.1729693	(valor del $1/\cos\theta$)

Por lo tanto, $\sec 837.4° \approx -2.1729693$. ■

En la Sección 6.2 se señaló que las funciones sen^{-1}, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$ tienen las siguientes propiedades:

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen}\,\theta) = \theta \quad \text{para} \quad -90° \le \theta \le 90° \quad \text{o bien} \quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2.$$

$$\cos^{-1}(\cos\theta) = \theta \quad \text{para} \quad 0° \le \theta \le 180° \quad \text{o bien} \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

$$\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta \quad \text{para} \quad -90° < \theta < 90° \quad \text{o bien} \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

Cuando se usa una calculadora para determinar θ es importante tener en cuenta estas restricciones sore θ. Por ejemplo, hay muchos valores de θ tales que $\tan\theta = 1$; sin embargo, la calculadora de solamente el valor que está entre $-90°$ y $90°$ (o bien $-\pi/2$ y $\pi/2$). Si se desean otros valores, entonces se deben usar los ángulos de referencia, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Si $\tan\theta = -0.4623$ y $0 \le \theta \le 360°$, evaluar θ al minuto más cercano.

SOLUCIÓN Existen dos valores posibles de θ que satisfacen las condiciones dadas, uno en el cuadrante II y otro en el cuadrante IV. Si θ' es el ángulo de referencia, entonces

$$\tan\theta' = 0.4623.$$

Usando el modo de grados de una calculadora se puede proceder así:

Ingresar:	0.4623	(el valor de $\tan\theta'$)
Oprimir [INV] [tan]:	24.811101	(aproximación en grados para θ')

Para cambiar 0.811101 a minutos se escribe

$$(0.811101)(60') = 48.66606' \approx 49'$$

Por lo tanto $\theta' \approx 24°49'$ y

$$\theta = 180° - \theta' \approx 180° - 24°49' = 155°11'$$

o bien

$$\theta = 360° - \theta' \approx 360° - 24°49' = 335°11'.$$ ■

Ejercicios 6.5

En los Ejercicios 1 a 18 encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas de θ si θ está en posición estándar y satisface las condiciones dadas.

1. El punto $P(4, -3)$ está en el lado terminal de θ.
2. El punto $P(-8, -15)$ está en el lado terminal de θ.
3. El punto $P(-2, -5)$ está en el lado terminal de θ.
4. El punto $P(-1, 2)$ está en el lado terminal de θ.
5. El lado terminal de θ está en el cuadrante II y cae sobre la línea $y = -4x$.
6. El lado terminal de θ está en el cuadrante IV y cae sobre la línea $3y + 5x = 0$.
7. El lado terminal de θ está en el cuadrante III y es paralelo a la línea $2y - 7x + 2 = 0$.
8. El lado terminal de θ está en el cuadrante II y es paralelo a la línea que pasa por los puntos $A(1, 4)$ y $B(3, -2)$.
9. El lado terminal de θ está en el cuadrante I y cae sobre una recta con pendiente $\frac{4}{3}$.
10. El lado terminal de θ biseca al tercer cuadrante.

11. $\theta = 90°$
12. $\theta = 0°$
13. $\theta = 180°$
14. $\theta = -270°$
15. $\theta = 2\pi$
16. $\theta = 5\pi/2$
17. $\theta = 7\pi/2$
18. $\theta = 3\pi$

En los Ejercicios 19 a 28 encuentre el cuadrante que contiene θ si se cumplen las condiciones dadas.

19. $\cos\theta > 0$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$.
20. $\tan\theta < 0$ y $\cos\theta > 0$.
21. $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\cot\theta > 0$.
22. $\sec\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$.
23. $\csc\theta > 0$ y $\sec\theta < 0$.
24. $\csc\theta > 0$ y $\cot\theta < 0$.
25. $\sec\theta < 0$ y $\tan\theta > 0$.
26. $\operatorname{sen}\theta < 0$ y sec $\theta > 0$.
27. $\cos\theta > 0$ y $\tan\theta > 0$.
28. $\cos\theta < 0$ y csc $\theta < 0$.
29. ¿Existe un número real t tal que $7 \operatorname{sen} t = 9$? Explíquelo.
30. ¿Existe un número real t tal que $3 \csc t = 1$? Explíquelo.
31. Encuentre todos los números reales t tales que $\operatorname{sen} t > \sec t$.
32. Encuentre todos los números correspondientes a t tales que $\sec t < 1$.

En los Ejercicios 33 a 40 encuentre el ángulo de referencia θ' si θ tiene el valor dado.

33. (a) $240°$ (b) $340°$ (c) $-110°$
34. (a) $165°$ (b) $275°$ (c) $-202°$
35. (a) $130°40'$ (b) $-405°$ (c) $-260°35'$
36. (a) $335°20'$ (b) $-620°$ (c) $-185°40'$
37. (a) $3\pi/4$ (b) $4\pi/3$ (c) $-\pi/6$
38. (a) $7\pi/6$ (b) $2\pi/3$ (c) $-3\pi/4$
39. (a) $9\pi/4$ (b) $11\pi/6$ (c) $-2\pi/3$
40. (a) $8\pi/3$ (b) $7\pi/4$ (c) $-7\pi/6$

En los Ejercicios 41 a 46 encuentre los valores exactos sin utilizar tablas o calculadoras.

41. (a) $\operatorname{sen}(2\pi/3)$ (b) $\operatorname{sen}(4\pi/3)$
42. (a) $\cos(5\pi/6)$ (b) $\cos(7\pi/6)$
43. (a) $\tan(-5\pi/4)$ (b) $\cot 315°$
44. (a) $\operatorname{sen} 210°$ (b) $\csc(-150°)$
45. (a) $\csc 300°$ (b) $\sec(-120°)$
46. (a) $\tan(-135°)$ (b) $\sec 225°$

En los Ejercicios 47 a 58 use la Tabla 2 para encontrar los valores pedidos aproximando a cuatro cifras decimales y compare las respuestas con las obtenidas por calculadora.

47. $\cos 213°20'$
48. $\operatorname{sen} 98°10'$
49. $\tan 105°40'$
50. $\cot 231°40'$
51. $\sec 294°10'$
52. $\csc 320°50'$
53. $\operatorname{sen}(0.37)$
54. $\cos(0.65)$

55. cos 1.46 **56.** sen(0.82)

57. tan 3 **58.** cot 6

En los Ejercicios 59 a 66 calcule, aproximando al mínumo más próximo, la medida en grados de todos los ángulos θ que están en el intervalo $[0°, 360°]$ utilizando (a) una tabla; (b) una calculadora.

59. $\operatorname{sen}\theta = -0.5640$ **60.** $\cos\theta = 0.7490$

61. $\tan\theta = 2.798$ **62.** $\cot\theta = -0.9601$

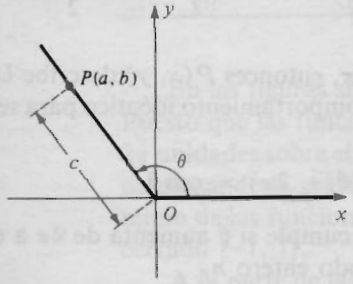
63. $\sec\theta = -1.116$ **64.** $\csc\theta = 1.485$

65. $\cos\theta = 0.6604$

66. $\operatorname{sen}\theta = -0.8225$

6.6 Variación y gráficas de las funciones trigonométricas

FIGURA 6.33



Sea θ un ángulo en la posición estándar y sea $P(a, b)$ un punto en el lado terminal, como se ilustra en la Figura 6.33. Como es lo usual, sea $c = d(O, P) = \sqrt{a^2 + b^2}$. Se desea estudiar la variación de $\operatorname{sen}\theta = b/c$ y de $\cos\theta = a/c$, conforme θ aumenta o disminuye. Puesto que P puede ser cualquier punto sore el lado terminal, que no sea O, podemos elegir a $P(a, b)$ tal que $c = 1$ para todo θ. Esto significa que $P(a, b)$ siempre está sobre la circunferencia unitaria U, con centro en el origen (véase la Figura 6.34). Puesto que $c = 1$ las fórmulas $\operatorname{sen}\theta = b/c$ y $\cos\theta = a/c$ toman las formas simples

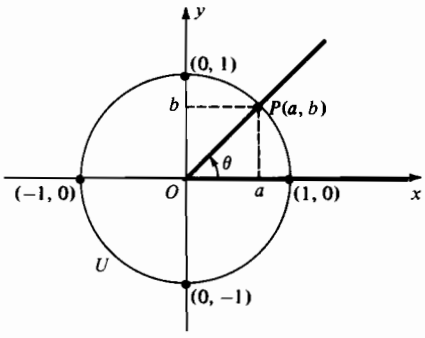
$$\operatorname{sen}\theta = b \quad \text{y} \quad \cos\theta = a.$$

Entonces, si θ varía, se pueden estudiar los valores correspondientes de la función seno observando la ordenada del punto P, o sea, b. De la misma manera, la variación de la función coseno puede determinarse observando la abscisa a de P. La tabla siguiente indica cómo varían $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ conforme θ cambia de 0 a 2π radianes.

θ	$P(a, b)$	$\operatorname{sen}\theta = b$	$\cos\theta = a$
$0 \to \frac{\pi}{2}$	$(1, 0) \to (0, 1)$	$0 \to 1$	$1 \to 0$
$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$(0, 1) \to (-1, 0)$	$1 \to 0$	$0 \to -1$
$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$(-1, 0) \to (0, -1)$	$0 \to -1$	$-1 \to 0$
$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$	$(0, -1) \to (1, 0)$	$-1 \to 0$	$0 \to 1$

La notación $0 \to \pi/2$ significa que θ aumenta de 0 a $\pi/2$, y la notación $(1, 0) \to (0, 1)$ denota la variación correspondiente a $P(a, b)$ sobre U. Se observa que conforme θ crece de 0 a $\pi/2$, $\operatorname{sen}\theta$ aumenta de 0 a 1; esto se denota por $0 \to 1$. Más aún, $\operatorname{sen}\theta$

FIGURA 6.34



toma todo valor entre 0 y 1. Conforme θ aumenta de $\pi/2$ a π, sen θ decrece de 1 a 0. Los otros datos de la tabla se pueden interpretar de la misma manera.

Analicemos con mayor detalle las variaciones de sen θ y cos θ. En la siguiente tabla se muestra una lista de valores para $0 \le \theta \le 2\pi$, en la que θ está medido en radianes o es un número real. Los valores especiales $\pm\sqrt{2}/2 \approx \pm 0.7$ se determinan como en las secciones anteriores. Se podría usar una tabla o una calculadora para encontrar más valores.

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen θ	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Si hacemos que θ varíe en el intervalo de 2π a 4π, entonces $P(x, y)$ describe U la circunferencia nuevamente y se repite un patrón de comportamiento idéntico para sen θ y cos θ, esto es,

$$\text{sen}\,(\theta + 2\pi) = \text{sen}\,\theta \quad \text{y} \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

para todo θ en el intervalo de 0 a 2π. Lo mismo se cumple si θ aumenta de 4π a 6π, de 6π a 8π, y así sucesivamente. De hecho, para todo entero n,

$$\text{sen}\,(\theta + 2\pi n) = \text{sen}\,\theta \quad \text{y} \quad \cos(\theta + 2\pi n) = \cos\theta.$$

Esta variación repetitiva se especifica diciendo que las funciones seno y coseno son *periódicas*. En general se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN

Una función f es periódica si existe un número real positivo k tal que

$$f(x + k) = f(x)$$

para toda x en el dominio de f. El menor número real positivo k, si existe tal número, se denomina periodo de f.

El periodo de las funciones seno y coseno es 2π. (Véanse los Ejercicios 5 y 6.)

La discusión anterior indica que las gráficas de las funciones $y = \text{sen}\,\theta$ y $y = \cos\theta$ tienen la forma que se ilustra en las Figuras 6.35 y 6.36, en las que se ha empleado un sistema coordenado θy, y en las que θ es un número real o el valor del ángulo en radianes.

FIGURA 6.35

$y = \operatorname{sen}\theta$

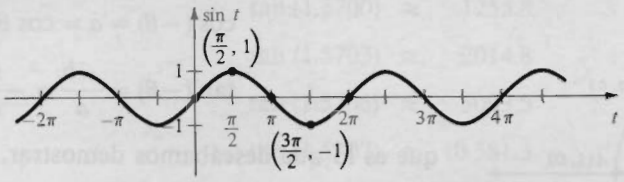
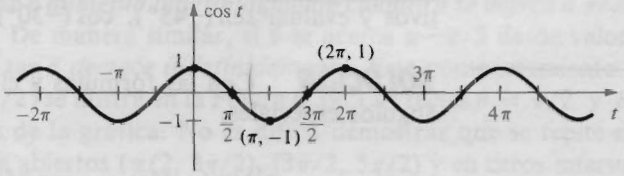


FIGURA 6.36

$y = \cos\theta$



En las figuras se han localizado varios puntos de la forma $(\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y $(\theta, \cos\theta)$. Puesto que las funciones seno y coseno tienen periodo 2π, sus gráficas se repiten cada 2π unidades sobre el eje horizontal. Nótese que la gráfica de $y = \cos\theta$ se puede obtener desplazando la gráfica de $y = \operatorname{sen}\theta$ hacia la izquierda una distancia $\pi/2$. El contradominio de las funciones seno y coseno consiste en todos los números reales del intervalo cerrado $[-1, 1]$.

A la parte de las gráficas correspondiente al intervalo $[0, 2\pi]$ se le llama **ciclo**. En el caso de la función seno, también se designa a un ciclo como **onda del seno** o **senoide**. Por la forma en que se ha empleado el círculo unitario U en esta discusión, las funciones trigonométricas se llaman, en ocasiones, **funciones circulares**.

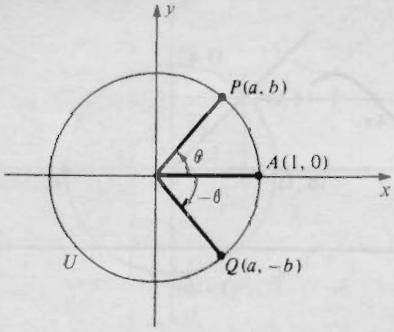
Antes de continuar la discusión de las gráficas, es conveniente establecer tres fórmulas que contienen a las funciones trigonométricas de $-\theta$, donde θ es cualquier ángulo o número real. Se llaman *Fórmulas para Ángulos Negativos*.

FÓRMULAS PARA ÁNGULOS NEGATIVOS

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

DEMOSTRACIÓN Considérese el círculo unitario U de la Figura 6.37. Si hacemos a θ variar de 0 a 2π, entonces el punto $P(a, b)$ describe el círculo unitario U una vez en sentido contrario a las manecillas del reloj, mientras que el punto $Q(a, -b)$, correspondiente a $-\theta$ describe U una vez en el sentido del reloj. Al aplicar la definición de funciones trigonométricas de cualquier ángulo con $(c = 1)$,

FIGURA 6.37



$$\operatorname{sen}(-\theta) = -b = -\operatorname{sen}\theta$$

$$\cos(-\theta) = a = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a} = -\tan\theta,$$

que es lo que deseábamos demostrar. ■

EJEMPLO 1 Utilizar las fórmulas para ángulos negativos y evaluar $\operatorname{sen}(-45°)$, $\cos(-30°)$ y $\tan(-\pi/3)$.

SOLUCIÓN Con las fórmulas y el conocimiento de los ángulos especiales,

$$\operatorname{sen}(-45°) = -\operatorname{sen} 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(-30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$ ■

Si $f(\theta) = \cos\theta$, entonces

$$f(-\theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta = f(\theta)$$

y, por consiguiente, la función coseno es par. Como se mencionó en la página 133, esto implica que la gráfica es simétrica con respecto al eje y (véase la Figura 6.36).

Análogamente, si $f(\theta) = \operatorname{sen}\theta$, entonces

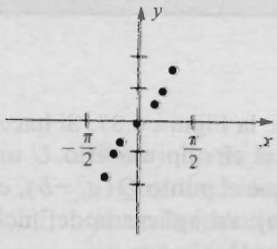
$$f(-\theta) = \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta = -f(\theta).$$

Por lo que la función seno es impar y la gráfica es simétrica con respecto al origen. (Véase Figura 6.35.)

En la tabla siguiente se dan varios valores de la función tangente.

θ	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan\theta$	$-\sqrt{3} \approx -1.7$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3} \approx -0.6$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.6$	1	$\sqrt{3} \approx 1.7$

FIGURA 6.38



Los puntos correspondientes aparecen en la Figura 6.38. Los valores de $\tan\theta$ cercanos a $\theta = \pi/2$ requieren de cuidado especial. Obsérvese primero que $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$. A medida que θ crece hasta $\pi/2$ el numerador $\operatorname{sen}\theta$ se aproxima a 1, mientras que el denominador $\cos\theta$ se aproxima a 0, y por consiguiente, $\tan\theta$ toma valores positivos grandes. Recuérdese que $\pi/2 \approx \frac{1}{2}(3.1416) = 1.5708$. Los siguientes valores

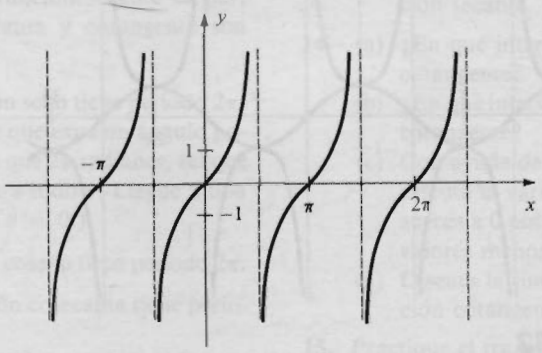
de $\tan\theta$ para θ cercano a $\pi/2$ se obtuvieron mediante una calculadora:

$$\begin{aligned}\tan(1.5700) &\approx 1255.8\\ \tan(1.5703) &\approx 2014.8\\ \tan(1.5706) &\approx 5093.5\\ \tan(1.5707) &\approx 10\,381.3\\ \tan(1.57079) &\approx 158\,057.9\end{aligned}$$

Nótese lo rápido del aumento de $\tan\theta$ a medida que θ se acerca a $\pi/2$. Decimos entonces que $\tan\theta$ *aumenta indefinidamente cuando* θ *se acerca a* $\pi/2$ *desde valores menores que* $\pi/2$. De manera similar, si θ se acerca a $-\pi/2$ desde valores mayores que $-\pi/2$, entonces $\tan\theta$ *decrece indefinidamente*. Este comportamiento en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$ se ilustra en la Figura 6.39. Las rectas $\theta = \pi/2$ y $\theta = -\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica. No es difícil demostrar que se repite el mismo patrón en los intervalos abiertos $(\pi/2, 3\pi/2)$, $(3\pi/2, 5\pi/2)$ y en otros intervalos similares de longitud π, como se muestra en la figura. Entonces, *la función tangente tiene periodo* π.

FIGURA 6.39

$y = \tan\theta$



De las fórmulas para ángulos negativos, $\tan(-\theta) = -\tan\theta$. Esto implica que la función tangente es impar. Por lo tanto, la gráfica es simétrica con respecto al origen.

Las gráficas para las tres funciones trigonométricas restantes pueden ya, obtenerse muy fácilmente. Por ejemplo, como $\csc\theta = 1/\operatorname{sen}\theta$, podemos encontrar la ordenada de un punto de la gráfica de la función cosecante, tomando el recíproco de la ordenada correspondiente de la gráfica del seno. Esto es posible excepto para $\theta = n\pi$, en donde n es entero, ya que en este caso $\operatorname{sen}\theta = 0$ y por lo tanto $1/\operatorname{sen}\theta$ es indefinido. Como ayuda para trazar la gráfica de la función cosecante, es conveniente dibujar primero, con líneas en color, la gráfica de la función seno (vea la Figura 6.40) y luego tomar los recíprocos de las ordenadas para obtener los puntos de la gráfica de la cosecante.

Obsérvese la forma en que la función cosecante crece o decrece indefinidamente cuando θ se acerca a $n\pi$, en donde n es entero. La gráfica tiene las asíntotas verticales que se indican en la figura.

FIGURA 6.40

$y = \csc \theta$

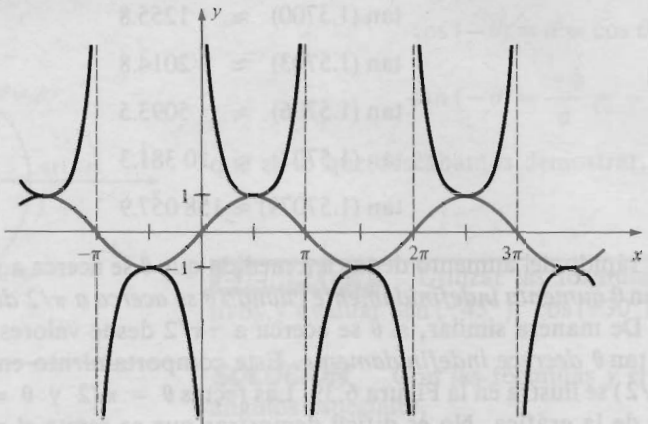


FIGURA 6.41

$y = \sec \theta$

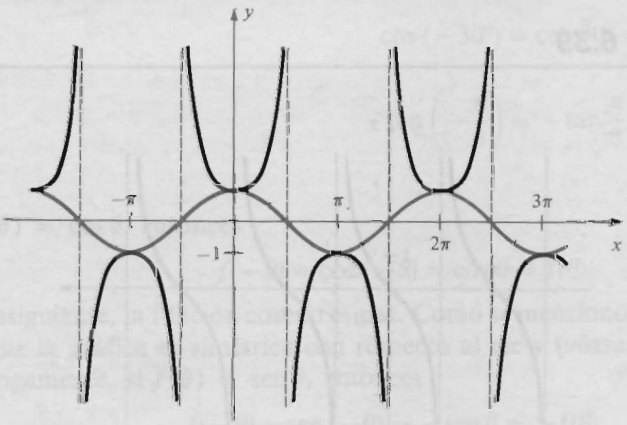
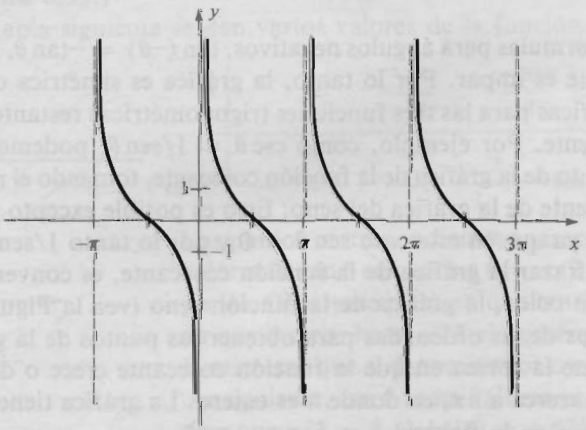


FIGURA 6.42

$y = \cot \theta$



Como $\sec\theta = 1/\cos\theta$ y $\cot\theta = 1/\tan\theta$, las gráficas de las funciones secante y cotangente se pueden obtener de igual manera (véanse las Figuras 6.41 y 6.42). Su verificación se deja al lector como ejercicio.

Ejercicios 6.6

En los Ejercicios 1 y 2 use las fórmulas para ángulos negativos para encontrar los valores exactos.

1. (a) $\operatorname{sen}(-30°)$
   (b) $\cos(-\pi/4)$
   (c) $\tan(-\pi/6)$

2. (a) $\tan(-45°)$
   (b) $\cos(-\pi/3)$
   (c) $\operatorname{sen}(-\pi/3)$

3. Demuestre que (a) a (c) se cumplen para todo θ en el dominio de la función.
   (a) $\csc(-\theta) = -\csc\theta$
   (b) $\sec(-\theta) = \sec\theta$
   (c) $\cot(-\theta) = -\cot\theta$

4. Demuestre que (a) la función secante es par; (b) las funciones cosecante y cotangente son impares.

5. Demuestre que la función seno tiene periodo 2π. (*Sugerencia:* Supóngase que exite un ángulo positivo α que mide menos que 2π radianes, tal que $\operatorname{sen}(\theta + \alpha) = \operatorname{sen}\theta$ para todo θ. Llegue a una contradicción haciendo $\theta = 0$.)

6. Verifique que la función coseno tiene periodo 2π.

7. Demuestre que la función cosecante tiene periodo 2π.

8. Demuestre que la función secante tiene periodo 2π.

9. Verifique que el contradominio de la función tantente es $\mathbb{R}$ probando que si a es cualquier número real, entonces existe un punto P en el círculo unitario U tal que $\tan\theta = a$, en donde el lado terminal de θ contiene a P. (*Sugerencia:* Si (x, y) está en U, considere la ecuación $\tan\theta = y/x = a$, en donde $x^2 + y^2 = 1$.)

10. Demuestre que el contradominio de la función cotangente es $\mathbb{R}$.

11. ¿Cuál es el contradominio de la función secante?

12. ¿Cuál es el contradominio de la función cosecante?

13. (a) Describa los intervalos entre -2π y 2π en los cuales la función secante es creciente.
    (b) Describa los intervalos entre -2π y 2π en los cuales la función secante es decreciente.
    (c) Con ayuda de la Tabla 4 o una calculadora discuta la variación de $\sec\theta$ conforme θ se acerca a $\pi/2$ por valores menores que $\pi/2$ y por valores mayores que $\pi/2$.
    (d) Analice la simetría de la gráfica de la función secante.

14. (a) ¿En qué intervalos es creciente la función cotangente?
    (b) ¿En qué intervalos es decreciente la función cotangente?
    (c) Con ayuda de la Tabla 4 o una calculadora discuta la variación de $\cot\theta$ conforme θ se acerca a 0 por valores mayores que 0 y por valores menores que 0.
    (d) Discuta la simetría de la gráfica de la función cotangente.

15. Practique el trazo de las gráficas de las funciones seno, coseno y tangente, tomando diferentes unidades de longitud en los ejes horizontal y vertical. Continúe esta práctica hasta que llegue un momento en que si se le despierta de un sueño profundo en la noche y se le pide trazar una de estas gráficas, pueda hacerlo en menos de treinta segundos.

16. Repita el Ejercicio 15 para las funciones cosecante, secante y cotangente.

Ejercicios para Calculadora 6.6

Si f es una función, la notación

$$f(t) \to L \quad \text{cuando} \quad t \to a^+$$

se usa comúnmente para expresar el hecho de que $f(t)$ se acerca mucho a L cuando t se acerca a a (desde valores mayores que a). Utilice una calculadora de

mano para verificar los Ejercicios 1 a 6, sustituyendo los siguientes valores para t:

1. $\dfrac{\operatorname{sen} t}{t} \to 1$ cuando $t \to 0^+$.

2. $\dfrac{\tan t}{t} \to 1$ cuando $t \to 0^+$.

3. $\dfrac{1 - \cos t}{t} \to 0$ cuando $t \to 0^+$.

4. $\dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t} \to 0$ cuando $t \to 0^+$.

5. $t \cot t \to 1$ cuando $t \to 0^+$.

6. $\dfrac{t + \tan t}{\operatorname{sen} t} \to 2$ cuando $t \to 0^+$.

6.7 Gráficas trigonométricas

En esta sección estudiaremos las gráficas de las ecuaciones de la forma

$$y = a \operatorname{sen}(bx + c) \quad \text{y} \quad y = a \cos(bx + c)$$

en donde a, b y c son números reales. En vez de usar un sistema de coordenadas θy como en la Sección 6.6, usaremos ahora el sistema de coordenadas xy común. Ahora la letra x se usa en lugar de θ. Podemos pensar que x es una medida en radianes de un ángulo; sin embargo, en cálculo x generalmente es un número real. Es un punto de vista equivalente, ya que el seno o el coseno de un ángulo de x radianes es lo mismo que el seno o el coseno del número real x. Nuestro propósito consiste en trazar una gráfica sin situar muchos puntos. Para hacerlo se utilizará lo expresado acerca de las funciones seno y coseno en la sección anterior.

En primer lugar considérese el caso especial $c = 0$ y $b = 1$; es decir

$$y = a \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad y = a \cos x.$$

Se pueden encontrar las ordenadas de los puntos sobre las gráficas multiplicando por a las coordenadas y de los puntos sobre las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$. Por lo tanto, si $y = 2 \operatorname{sen} x$, se multiplica por 2; si $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$ se multiplica por $\frac{1}{2}$; y así sucesivamente. Las gráficas de estas dos ecuaciones se muestran en la Figura 6.43(i) y (ii), en donde para comparar se indica también en otro color la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$.

FIGURA 6.43

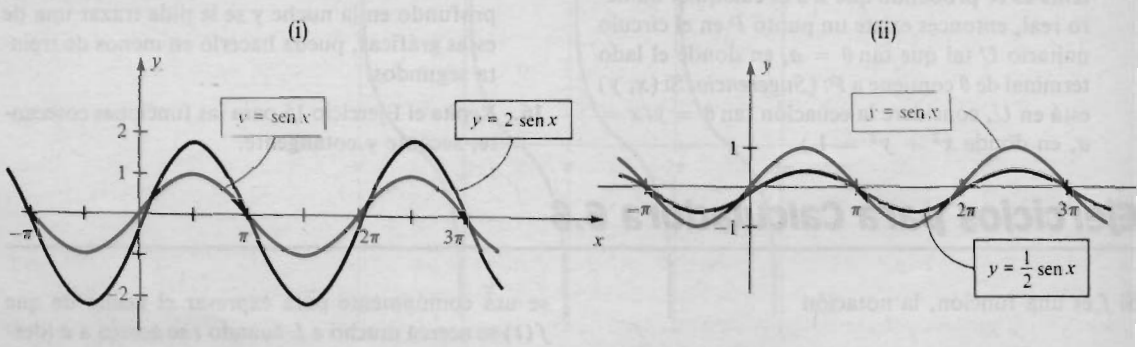
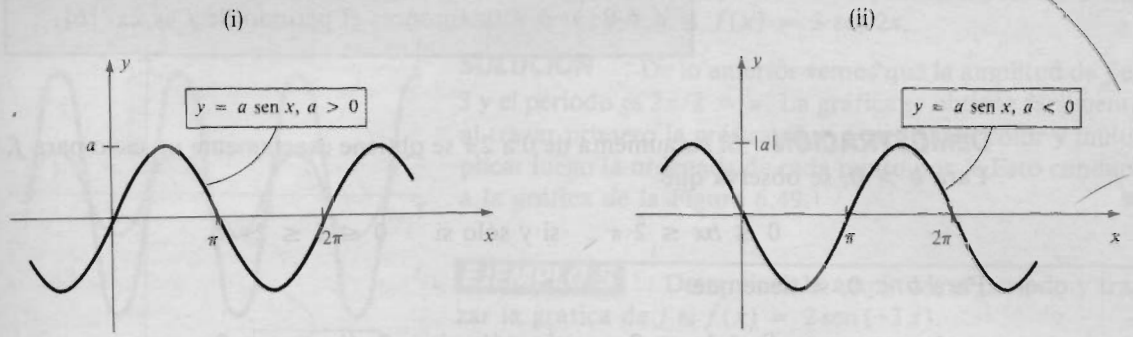
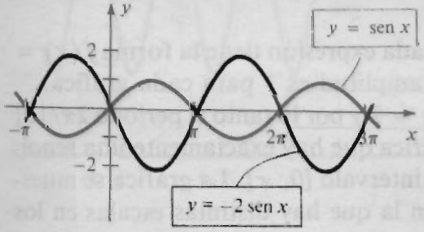


FIGURA 6.44



La gráfica de $y = a \operatorname{sen} x$ siempre tiene la apariencia general de una de las gráficas que se muestran en la Figura 6.44. El valor mayor $|a|$ de y se conoce como la **amplitud** de la gráfica, o la amplitud de la función dada por $f(x) = a \operatorname{sen} x$. Por ejemplo, la amplitud en la Figura 6.43(i) es 2, mientras que la de la parte (ii) de la figura es $\frac{1}{2}$.

FIGURA 6.45



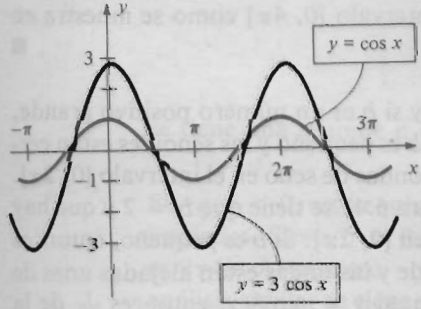
Si $a < 0$, entonces las ordenadas de los puntos en la gráfica de $y = a \operatorname{sen} x$ son los negativos de las ordenadas correspondientes a los puntos de la gráfica de $y = |a| \operatorname{sen} x$. Por tanto, la gráfica de la Figura 6.44(ii) es una reflexión, a través del eje x, de la gráfica en (i) de la figura.

EJEMPLO 1 Determinar la amplitud y trazar la gráfica de $y = -2 \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Primero trazamos la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ con una línea punteada y luego multiplicamos cada ordenada por -2. Esto nos da la gráfica que se muestra en la Figura 6.45. También se puede obtener la gráfica por reflexión de la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x$ a través del eje x. ■

Para $y = a \cos x$ se pueden utilizar técnicas parecidas.

FIGURA 6.46



EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de $y = 3 \cos x$.

SOLUCIÓN Como se indica en la Figura 6.46, primero se traza la gráfica de $y = \cos x$ en color y se multiplican las coordenadas y por 3. La amplitud en este caso es 3. ■

Considérese en seguida $y = a \operatorname{sen} bx$ y $y = a \cos bx$ para cualquier $b \neq 0$. Al igual que en los casos anteriores, la amplitud en $|a|$. El siguiente teorema describe los periodos de estas gráficas.

TEOREMA Si $f(x) = a \operatorname{sen} bx$ o bien $f(x) = a \cos bx$, en donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces el periodo de f es $2\pi/|b|$.

DEMOSTRACIÓN Si bx aumenta de 0 a 2π se obtiene exactamente un ciclo para f. Para $b > 0$, se observa que

$$0 \leq bx \leq 2\pi \quad \text{si y sólo si} \quad 0 \leq x \leq 2\pi/b.$$

Para $b < 0$, se tiene que

$$0 \leq bx \leq 2\pi \quad \text{si y sólo si} \quad 2\pi/b \leq x \leq 0.$$

En cualquier caso, cabe exactamente un ciclo en el intervalo de longitud $2\pi/|b|$. □

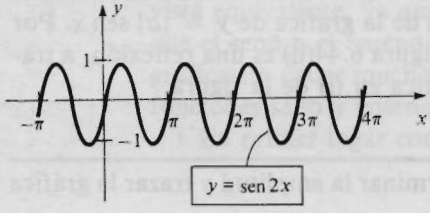
EJEMPLO 3 Determinar la amplitud, el período, y trazar la gráfica de f si

(a) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ (b) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$.

SOLUCIÓN Como cada expresión tiene la forma $f(x) = a \operatorname{sen} bx$ con $a = 1$, la amplitud es 1 para cada gráfica.

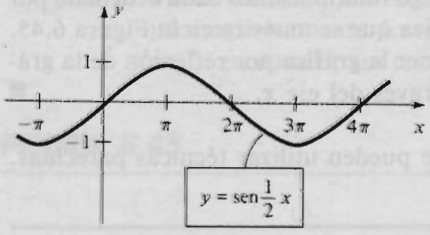
En (a) se tiene que $b = 2$ y por lo tanto el periodo $2\pi/|b|$ es $2\pi/2 = \pi$. Esto significa que hay exactamente una senoide (de amplitud 1) en el intervalo $[0, \pi]$. La gráfica se muestra en la Figura 6.47, en la que hay distintas escalas en los ejes x, y.

FIGURA 6.47



En (b), se observa que $b = \frac{1}{2}$, y por lo tanto, el periodo $2\pi/|b|$ es $2\pi/(\frac{1}{2}) = 4\pi$. Por consiguiente, hay una senoide (de amplitud 1) en el intervalo $[0, 4\pi]$ como se muestra en la Figura 6.48. ■

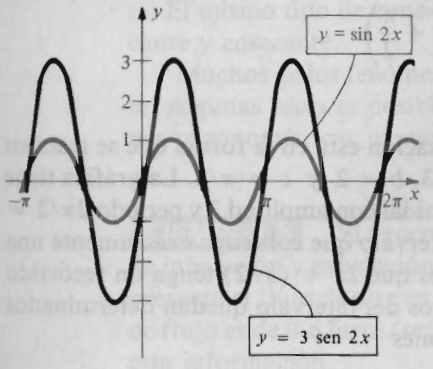
FIGURA 6.48



Si $f(x) = a \operatorname{sen} bx$ y si b es un número positivo grande, entonces el periodo $2\pi/b$ es pequeño y las senoides están cercanas. De hecho, hay b ondas de seno en el intervalo $[0, 2\pi]$. Por ejemplo, en la Figura 6.47 se tiene que $b = 2$ y que hay dos ondas sinusoidales en $[0, 2\pi]$. Si b es pequeño, entonces el periodo $2\pi/b$ es grande y las ondas están alejadas unas de otras. Como ilustración, si $y = \operatorname{sen} \frac{1}{10}x$, entonces $\frac{1}{10}$ de la senoide se tiene en $[0, 2\pi]$, y un intervalo de 20π unidades se requiere para un ciclo completo. (Véase también la Figura 6.48, en donde $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$ y sólo hay la mitad de una onda sinusoidal en $[0, 2\pi]$.)

Si $b < 0$ podemos usar el hecho de que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ para obtener la gráfica de $y = a \operatorname{sen} bx$. Para ilustrarlo, la gráfica de $y = \operatorname{sen}(-2x)$ es la misma que la gráfica de $y = -\operatorname{sen} 2x$.

FIGURA 6.49



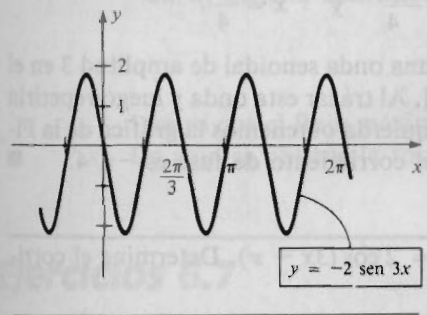
EJEMPLO 4 Determinar la amplitud, el periodo y trazar la gráfica de f si $f(x) = 3 \operatorname{sen} 2x$.

SOLUCIÓN De lo anterior vemos que la amplitud de f es 3 y el periodo es $2\pi/2 = \pi$. La gráfica se obtiene fácilmente al trazar primero la gráfica de $y = \operatorname{sen} 2x$ en color y multiplicar luego la ordenada de cada punto por 3. Esto conduce a la gráfica de la Figura 6.49. ■

EJEMPLO 5 Determinar la amplitud, el periodo y trazar la gráfica de f si $f(x) = 2 \operatorname{sen}(-3x)$.

SOLUCIÓN Como $f(x) = -2 \operatorname{sen} 3x$, vemos que la amplitud es 2 y el periodo es $2\pi/3$. Entonces hay un ciclo en un intervalo de longitud $2\pi/3$. El signo menos indica una reflexión a través del eje x. Si consideramos el intervalo $[0, 2\pi/3]$ y trazamos una onda senoidal de amplitud 2 (reflejada a través del eje x) es evidente la forma de la gráfica. La forma que toma en el intervalo $[0, 2\pi/3]$ se repite en forma periódica, como se ilustra en la Figura 6.50. ■

FIGURA 6.50



Por último, considérese la gráfica de

$$f(x) = a \operatorname{sen}(bx + c).$$

Como antes, la amplitud es $|a|$. Se obtiene una onda senoidal si

$$0 \leq bx + c \leq 2\pi$$

o bien

$$-c \leq bx \leq 2\pi - c.$$

Entonces si $b > 0$ cuando x varía a través del intervalo

$$\left[-\frac{c}{b}, \frac{2\pi - c}{b}\right], \quad \text{o bien} \quad \left[-\frac{c}{b}, -\frac{c}{b} + \frac{2\pi}{b}\right].$$

se tiene una senoide u onda senoidal.

Si $-c/b < 0$, esto equivale a *correr* la gráfica de $y = a \operatorname{sen} bx$ hacia la izquierda $-c/b$ unidades. Si $-c/b > 0$, el corrimiento es hacia la derecha. Por tanto, el periodo de f es $2\pi/b$. Al número $-c/b$ se le llama **corrimiento de fase** asociado a la función. Un análisis similar se tiene si $b < 0$ o si $f(x) = a \cos(bx + c)$. No es necesario recordar una fórmula general para encontrar el corrimiento de fase. En cualquier problema específico se puede determinar el intervalo que contiene exactamente un ciclo, resolviendo las ecuaciones

$$bx + c = 0 \quad \text{y} \quad bx + c = 2\pi$$

para evaluar x, como se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 6 Trazar la gráfica de f si

$$f(x) = 3 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

y hallar el corrimiento de fase.

SOLUCIÓN La ecuación está en la forma que se trata en esta sección, con $a = 3$, $b = 2$ y $c = \pi/2$. La gráfica tiene un patrón de onda senoidal con amplitud 3 y periodo $2\pi/2 = \pi$. Para obtener un intervalo que contenga exactamente una onda senoidal hacemos que $2x + (\pi/2)$ tenga un recorrido de 0 a 2π. Los extremos del intervalo quedan determinados al resolver las ecuaciones

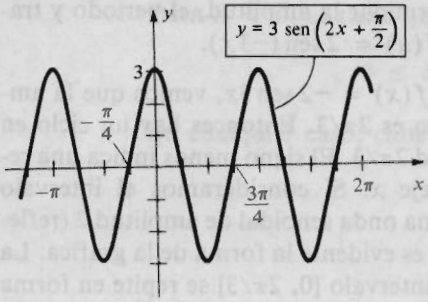
$$2x + \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{y} \quad 2x + \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

Esto da

$$x = -\frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad x = \frac{3\pi}{4}.$$

Entonces, se presenta una onda senoidal de amplitud 3 en el intervalo $[-\pi/4, 3\pi/4]$. Al trazar esta onda y luego repetirla hacia la derecha y la izquierda obtenemos la gráfica de la Figura 6.51. Se ve que el corrimiento de fase es $-\pi/4$. ■

FIGURA 6.51



EJEMPLO 7 Trazar la gráfica de f si $f(x) = 2\cos(3x - \pi)$. Determine el corrimiento de fase o de fasamiento.

SOLUCIÓN La función está dada por $f(x) = a\cos(bx + c)$ con $a = 2$, $b = 3$ y $c = -\pi$. Entonces la amplitud es 2 y el periodo es $2\pi/3$. Para obtener el intervalo que contiene un ciclo (del coseno) se hace que $3x - \pi$ varíe de 0 a 2π. Los extremos de este intervalo son las soluciones de las ecuaciones

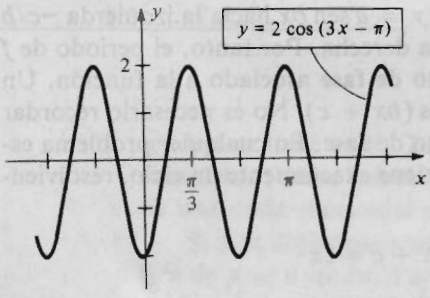
$$3x - \pi = 0 \quad \text{y} \quad 3x - \pi = 2\pi.$$

Esto da

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad x = \frac{3\pi}{3} = \pi.$$

Por lo tanto, se tiene una curva del tipo coseno de amplitud 2 en el intervalo $[\pi/3, \pi]$. Trazando esa parte de la gráfica y repitiéndola luego a la derecha y a la izquierda se obtiene la Figura 6.52. En la gráfica puede verse que el defasamiento es $\pi/3$. ■

FIGURA 6.52



Si $f(x) = a\tan(bx + c)$ el periodo es $\pi/|b|$ puesto que la función tangente tiene periodo π. No hay ninguna ordenada que sea el máximo para los puntos sobre la gráfica de la función tangente, y por ello no nos referimos a su amplitud; sin embargo, todavía se puede usar el procedimiento

de multiplicar por a las ordenadas para obtener puntos sobre la gráfica de $y = a\tan(bx + c)$. Tampoco se hará referencia a los defasamientos de la función tangente. El mismo tipo de consideraciones puede hacerse para las funciones cotangente, secante y cosecante.

Muchos de los fenómenos que ocurren en la naturaleza varían cíclica o rítmicamente. Algunas veces es posible representar ese tipo de comportamiento mediante funciones trigonométricas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 El proceso rítmico de la respiración consiste en periodos alternantes de inhalación y exhalación. Cada 5 minutos se lleva a cabo un ciclo completo. Si F representa el flujo de aire en el tiempo t (en litros por segundo) y si la máxima intensidad de flujo es de 0.6 litros/segundo (*l*/s), obtener una fórmula $F = a\,\text{sen}\,bt$ que represente esta información.

SOLUCIÓN La intensidad de flujo de aire F es una función de t, es decir, $F = f(t)$ para alguna f. Si $f(t) = a\,\text{sen}(bt)$ para alguna $b > 0$, entonces el periodo de f es $-2\pi/b$. En esta aplicación el periodo es de 5 segundos y, por lo tanto,

$$\frac{2\pi}{b} = 5 \quad \text{o bien} \quad b = \frac{2\pi}{5}.$$

Puesto que el flujo máximo corresponde a la amplitud a de f, puede hacerse $a = 0.6$. De aquí se obtiene la fórmula

$$F = 0.6\ \text{sen}\ (\tfrac{2}{5}\pi t).$$

■

Ejercicios 6.7

1. Sin señalar muchos puntos, grafique y determine la amplitud y el periodo de cada función f definida a continuación

   (a) $f(x) = 4\,\text{sen}\,x$ (b) $f(x) = \text{sen}\,4x$

   (c) $f(x) = \frac{1}{4}\,\text{sen}\,x$ (d) $f(x) = \text{sen}\,\frac{1}{4}x$

   (e) $f(x) = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{4}x$ (f) $f(x) = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,4x$

   (g) $f(x) = -4\,\text{sen}\,x$ (h) $f(x) = \text{sen}(-4x)$

2. Grafique las funciones para el coseno análogas a las que se definen en el Ejercicio 1.

3. Grafique cada función f definida a continuación y determine la amplitud y periodo en cada caso.

   (a) $f(x) = 3\cos x$ (b) $f(x) = \cos 3x$

   (c) $f(x) = \frac{1}{3}\cos x$ (d) $f(x) = \cos\frac{1}{3}x$

   (e) $f(x) = 2\cos\frac{1}{3}x$ (f) $f(x) = \frac{1}{3}\cos 2x$

   (g) $f(x) = -3\cos x$ (h) $f(x) = \cos(-3x)$

4. Grafique las funciones para el seno, análogas a las que se definen en el Ejercicio 3.

Grafique las ecuaciones de los Ejercicios 5 a 44. Siempre que sea apropiado indique la amplitud, el periodo y el defasamiento.

5. $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

6. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

7. $y = 3\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

8. $y = 4\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

9. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

10. $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

11. $y = 4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

12. $y = 5\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

13. $y = \text{sen}(3x + \pi)$

14. $y = \cos(2x + \pi)$

15. $y = -2\,\text{sen}(3x + \pi)$

16. $y = 3\cos(3x - \pi)$

17. $y = 5\,\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

18. $y = -4\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

19. $y = 6 \operatorname{sen} \pi x$

20. $y = 3 \cos \frac{1}{2}\pi x$

21. $y = 2 \cos \frac{\pi}{2} x$

22. $y = 4 \operatorname{sen} 3\pi x$

23. $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\pi x$

24. $y = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} x$

25. $y = \frac{1}{2} \sec x$

26. $y = \frac{1}{4} \csc x$

27. $y = -2 \csc x$

28. $y = -3 \sec x$

29. $y = \sec 2x$

30. $y = \csc 3x$

31. $y = \csc\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

32. $y = \sec\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

33. $y = \tan \frac{1}{2}x$

34. $y = \cot 2x$

35. $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

36. $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

37. $y = \frac{1}{2} \cot x$

38. $y = -2 \tan x$

39. $y = \tan(-x)$

40. $y = -\cot x$

41. $y = 2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

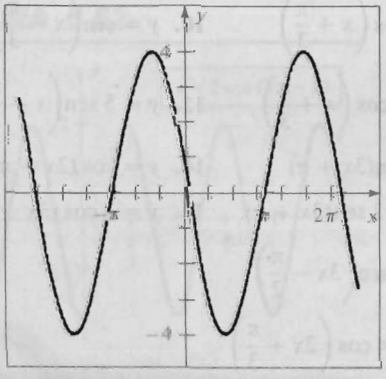
42. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

43. $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

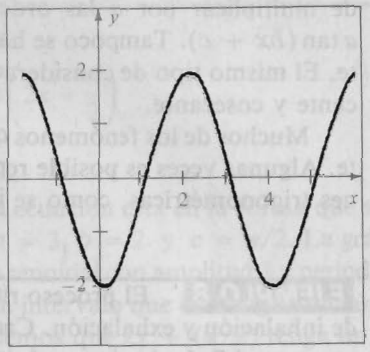
44. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Para las gráficas generadas con una computadora, que se muestran en los Ejercicios 45 a 48, encuentre (a) la amplitud y el periodo; (b) una ecuación para la gráfica en la forma $y = a \operatorname{sen}(bx + c)$; y (c) el defasamiento.

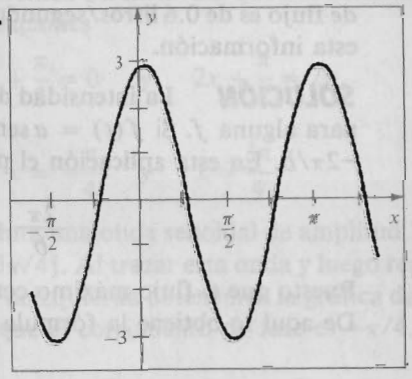
45.



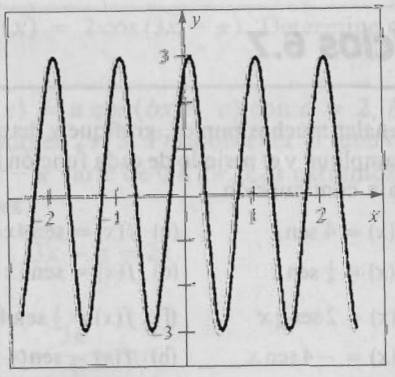
46.



47.

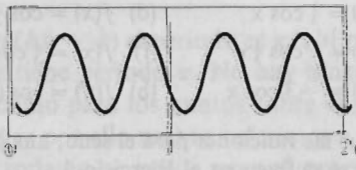


48.



49. En la figura se muestra un encefalograma de las ondas producidas durante el sueño en el cerebro humano. Si se usa $W = a \operatorname{sen}(bt + c)$ para representar a estas ondas, ¿Cuál es el valor de b?

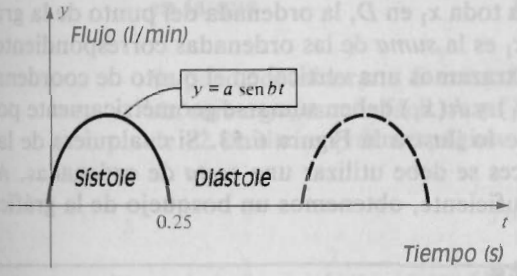
FIGURA PARA EL EJERCICIO 49



50. La intensidad luminosa equivalente I en un día de primavera alcanza su valor máximo de 510 cal/cm^2 al medio día. Si $t = 0$ corresponde al amanecer y hay 13 horas de claridad en el día, deduzca una fórmula $I = a \operatorname{sen} bt$ que se ajuste a esta información.

51. La acción de bombeo del corazón consiste en la *fase sistólica* (o *sístole*) en la que la sangre pasa del ventrículo izquierdo hacia la aorta, y la *fase diastólica* (o *diástole*) durante la cual se relaja el músculo cardiaco. Para modelar un ciclo completo de este proceso se usa la función cuya gráfica se muestra en la figura. Para un individuo en particular, la fase sistólica dura $\frac{1}{4}$ de segundo y corresponde a una intensidad máxima de flujo de 8 litros por minuto (*l*/min). Obtenga a y b.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 51



52. La popular teoría del biorritmo usa las gráficas de tres funciones senoidales sencillas para hacer predicciones acerca del potencial físico, emocional e intelectual de un individuo para un día en particular. Las gráficas están dadas por $y = a \operatorname{sen} bt$, en la que $t = 0$ corresponde al nacimiento y en las que $a = 1$ se usa para representar el 100% del potencial.
   (a) Encuentre el valor de b para el ciclo físico cuyo periodo es de 23 días; para el ciclo emocional (periodo, 28 días) y para el ciclo intelectual (periodo, 33 días).
   (b) ¿Qué es lo que le dice una tabla de biorritmo a una persona que acaba de cumplir 21 años y que tiene exactamente 7 660 días de edad?

53. La altura de la marea en un punto particular en la costa se puede predecir usando siete funciones trigonométricas (llamadas *componentes de la marea*) de la forma $f(t) = a \cos(bt + c)$. La *componente lunar principal* se puede aproximar mediante

$$f(t) = a \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{11}{12}\pi\right)$$

en la que t está en horas y $t = 0$ corresponde a la medianoche. Trace la gráfica de f si $a = 0.5$ m.

54. Refiérase al Ejercicio 53. La *componente principal solar diurna* se puede aproximar mediante

$$f(t) = a \cos\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{7\pi}{12}\right).$$

Trace la gráfica de f si $a = 0.2$ m.

6.8 Otras técnicas para trazar gráficas

En aplicaciones matemáticas es común encontrar funciones que se definen en términos de sumas y productos de expresiones como

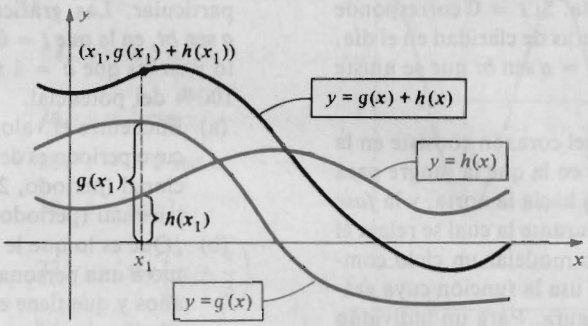
$$f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos x \quad \text{o bien} \quad f(x) = 2^{-x} \operatorname{sen} x.$$

Cuando se trabaja con sumas, la técnica de graficar llamada *suma de ordenadas* resulta muy útil, además de ser un método aplicable no sólo a expresiones trigonométricas sino también a expresiones arbitrarias. Si f es una suma de dos funciones g y h con el mismo dominio D, entonces

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

para toda x en D. Se puede obtener la gráfica de f a partir de las gráficas de g y h,

FIGURA 6.53



de la manera siguiente. Empezamos por trazar las gráficas de las ecuaciones $y = g(x)$ y $y = h(x)$ en el mismo sistema de ejes coordenados, como se ilustra con las curvas en color en la Figura 6.53.

Como $f(x_1) = g(x_1) = h(x_1)$ para toda x_1 en D, la ordenada del punto de la gráfica de $y = g(x) + h(x)$ con abscisa x_1 es la *suma* de las ordenadas correspondientes a los puntos de las gráficas de g y h. Si trazamos una vertical en el punto de coordenadas $(x_1, 0)$, entonces las ordenadas $g(x_1)$ y $h(x_1)$ deben sumarse geométricamente por medio de un compás o una regla, como lo ilustra la Figura 6.53. Si cualquiera de las dos $g(x_1)$ o $h(x_1)$, es negativa, entonces se debe utilizar una *resta* de ordenadas. Al usar esta técnica un número de veces suficiente, obtenemos un bosquejo de la gráfica de f.

FIGURA 6.54

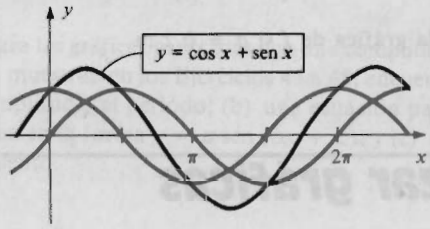
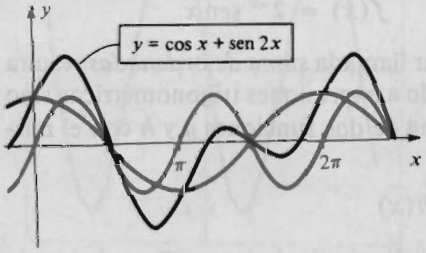


FIGURA 6.55



EJEMPLO 1 Si $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$, utilizar el método de suma de ordenadas para construir la gráfica de f.

SOLUCIÓN Empezamos por delinear (con línea punteada) las gráficas de las ecuaciones $y = \cos x$ y $y = \operatorname{sen} x$. A continuación, para algunos números x_1, se suman ordenadas geométricamente. Después de haber sumado un buen número de ordenadas surge un patrón o contorno y luego se traza una curva alisada a través de los puntos, como se indica en la Figura 6.54. Con el objeto de verificar, vale la pena determinar algunos puntos de la gráfica mediante sustitución de números en vez de x. Dejaremos tales verificaciones al lector. Se puede ver en la gráfica que la función f es periódica con periodo 2π. ■

EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de la ecuación $y = \cos x + \operatorname{sen} 2x$.

SOLUCIÓN Trazamos (con línea punteada) las gráficas de las ecuaciones $y = \cos x$ y $y = \operatorname{sen} 2x$ en los mismos ejes coordenados y utilizamos el método de la suma de ordenadas. En la Figura 6.55 se ilustra la gráfica. Evidentemente f es periódica y su periodo es 2π.

EJEMPLO 3 El número de horas de luz al día $D(t)$ en una época particular del año se puede aproximar mediante

$$D(t) = \frac{K}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{365}(t - 79) + 12$$

en la que t está en días y $t = 0$ corresponde al día 1 de enero. La constante K determina la variación total de la duración de la claridad diurna y depende de la latitud de la localidad.

(a) Para Boston, MA, se tiene $K \approx 6$. Trace la gráfica de D para $0 \leq t \leq 365$.

(b) ¿Cuándo dura más la claridad o luz del día? ¿Cuándo dura menos?

SOLUCIÓN (a) Si $K = 6$, entonces $K/2 = 3$ y se puede escribir $D(t)$ en la forma

$$D(t) = f(t) + 12$$

en la que

$$f(t) = 3 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{365}(t - 79).$$

Se puede considerar a D como la suma de f y la función constante g, con $g(t) = 12$; sin embargo, es más fácil trazar la gráfica de f y después efectuar una traslación vertical de 12 unidades (véanse páginas 134 y 135). La expresión

$$f(t) = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365} t - \frac{158}{365}\pi\right)$$

es de la forma $f(t) = a \operatorname{sen}(bt + c)$, con $a = 3$, $b = 2\pi/365$ y $c = -158\pi/365$. Del trabajo en la sección anterior, la amplitud es 3 y el periodo de f es

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2\pi/365} = 365 \text{ días.}$$

Con respecto a la forma de $f(t)$ se observa que exactamente una onda de seno ocurre si

$$0 \leq \frac{2\pi}{365}(t - 79) \leq 2\pi,$$

o bien

$$0 \leq t - 79 \leq 365,$$

o bien

$$79 \leq t \leq 444.$$

Dividiendo el intervalo de tiempo [79, 444] en cuatro partes iguales se obtiene la tabla siguiente, que indica el patrón familiar de la onda sinusoidal de amplitud 3.

t	79	170.25	261.5	352.75	444
$f(t)$	0	3	0	−3	0

Para encontrar otros valores de $f(t)$ se puede usar una calculadora o la Tabla 5. Por ejemplo, si $t = 0$,

$$f(0) = 3 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{365}(-79) \approx 3 \operatorname{sen}(-1.36) \approx -2.9.$$

Puesto que el periodo de f es 365, esto implica que $f(365) = -2.9$.

La gráfica de f para el intervalo [0, 444] se muestra en la Figura 6.56, en la que se han usado diferentes escalas para los ejes y se ha redondeado t al día entero más cercano.

Haciendo una traslación vertical de 12 unidades se obtiene la gráfica de D para $0 \leq t \leq 365$, que se muestra en la Figura 6.57.

(b) El día más largo, es decir, el valor máximo de $D(t)$, ocurre 170 días después del 1 de enero. Excepto por el año bisiesto, esto corresponde al 20 de junio. El día más corto ocurre 353 días después del 1 de enero, o sea, el 20 de diciembre.

FIGURA 6.56

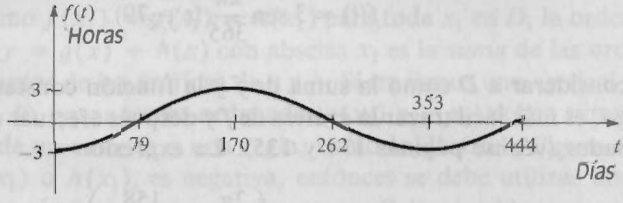
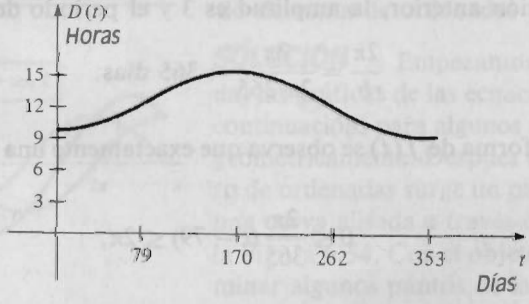


FIGURA 6.57

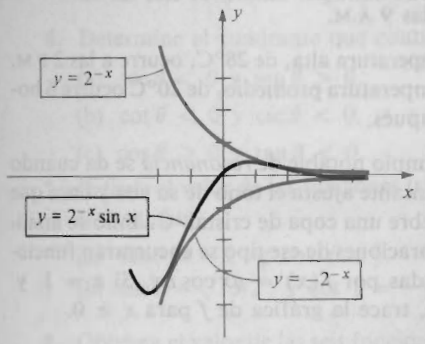


El ejemplo siguiente ilustra el hecho de que si f es el producto de dos funciones g y h, entonces se pueden usar las gráficas de g y h para obtener información respecto a la gráfica de f.

EJEMPLO 4 Construir la gráfica de f si $f(x) = 2^{-x} \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN La función f es el producto de dos funciones g y h, en donde $g(x) =$

FIGURA 6.58



2^{-x} y $h(x) = \operatorname{sen} x$. Si usamos las propiedades de los valores absolutos vemos que $|f(x)| = |2^{-x}|\,|\operatorname{sen} x|$, y como $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ y $2^{-x} > 0$, se concluye que $|f(x)| \leq 2^{-x}$ para toda x. En consecuencia,

$$-2^{-x} \leq f(x) \leq 2^{-x},$$

lo cual implica que la gráfica de f cae entre las gráficas de las ecuaciones $y = -2^{-x}$ y $y = 2^{-x}$. La gráfica de f coincide con una de estas curvas cuando $|\operatorname{sen} x| = 1$, esto es, cuando $x = (\pi/2) + n\pi$, en donde n es entero. Como $2^{-x} > 0$, las intersecciones de x con la gráfica de f ocurren en $\operatorname{sen} x = 0$, esto es, en $x = n\pi$. Con esta información obtenemos la gráfica que muestra la Figura 6.58. ■

La gráfica de $y = 2^{-x} \operatorname{sen} x$, mostrada en la Figura 6.58 se denomina **onda senoidal amortiguada** y a 2^{-x} se le llama **factor de amortiguamiento**. Mediante el uso de diferentes factores de amortiguamiento podemos obtener otras variaciones de tales ondas senoidales, comprimidas o expandidas. El análisis de estas gráficas es importante en física e ingeniería.

Ejercicios 6.8

Utilice la suma de ordenadas para trazar las gráficas de las ecuaciones en los Ejercicios 1 a 20.

1. $y = \cos x + 3 \operatorname{sen} x$
2. $y = \operatorname{sen} x + 3 \cos x$
3. $y = 2 \cos x + 3 \operatorname{sen} x$
4. $y = 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$
5. $y = \operatorname{sen} x + \cos 2x$
6. $y = 2 \cos x + \operatorname{sen} 2x$
7. $y = \cos x - \operatorname{sen} x$
8. $y = 2 \operatorname{sen} x - \cos x$
9. $y = 2 \cos x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$
10. $y = 2 \cos x + \cos \frac{1}{2}x$
11. $y = 1 + \operatorname{sen} x$
12. $y = 2 + \tan x$
13. $y = \frac{1}{2}x + \operatorname{sen} x$
14. $y = 1 + \cos x$
15. $y = 2^x + \operatorname{sen} x$
16. $y = \csc x - 1$
17. $y = 2 + \sec x$
18. $y = x - \operatorname{sen} x$
19. $y = \cos x - 1$
20. $y = |x + 1| + \cos 2x$

En cada uno de los Ejercicios 21 a 30 trace la gráfica de f.

21. $f(x) = 2^{-x} \cos x$
22. $f(x) = 2^x \operatorname{sen} x$
23. $f(x) = |x| \operatorname{sen} x$
24. $f(x) = (1 + x^2) \cos x$
25. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} x$
26. $f(x) = \cot x \tan x$
27. $f(x) = |\operatorname{sen} x|$
28. $f(x) = |\cos x| + 1$
29. $f(x) = \operatorname{sen}|x|$
30. $f(x) = \cos|x + 1|$

31. Si la fórmula para $D(t)$ en el Ejemplo 3, se usa para Fairbanks, Alaska, $K \approx 12$. Trace la gráfica de D en este caso para $0 \leq t \leq 365$.

32. Basándose en los datos meteorológicos de muchos años, la temperatura baja esperada T (en °F) en Fairbanks, Alaska, se puede aproximar mediante

$$T = 36 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{365}(t - 101) + 14$$

en la que t está en días y $t = 0$ corresponde al día 1 de enero.

(a) Trace la gráfica de T para $0 \leq t \leq 365$.
(b) Prediga cuándo será el día más frío del año.

Los científicos utilizan con frecuencia la fórmula $f(t) = a \operatorname{sen}(bt + c) + d$ para simular las variaciones de temperatura durante el día. En los Ejercicios 33 a 36, $t = 0$ corresponde a la medianoche, el tiempo t está medido en horas y $f(t)$ en °C. Para cada ejercicio, (a) encuentre los valores de a, b, c y d que se ajustan a la información, y (b) trace la gráfica de f para $0 \le t \le 24$.

33. La temperatura alta es 10°C, y la baja, de −10°C, ocurre a las 4 A.M.

34. La temperatura a medianoche es de 15°C, y las temperaturas alta y baja son 20°C y 10°C.

35. La temperatura varía entre 10°C y 30°C, y la temperatura promedio de 20°C ocurre por primera vez a las 9 A.M.

36. La temperatura alta, de 28°C, ocurre a las 2 P.M. y la temperatura promedio, de 20°C ocurre 6 horas después.

37. Un ejemplo notable de *resonancia* se da cuando una cantante ajusta el tono de su voz y hace que se quiebre una copa de cristal. Cuando se analizan vibraciones de ese tipo se encuentran funciones dadas por $f(x) = ax \cos bx$. Si $a = 1$ y $b = 2$, trace la gráfica de f para $x \ge 0$.

6.9 Repaso

Defina o examine cada uno de los siguientes temas.

1. Ángulos.

2. Lados inicial y terminal.

3. Lados coterminales.

4. Posición estándar de un ángulo.

5. Ángulos positivos y negativos.

6. Medida en radianes.

7. Medida en grados.

8. Ángulos agudos y obtusos.

9. Ángulo recto.

10. Ángulos complementarios.

11. Ángulos suplementarios.

12. Relación entre grados y radianes.

13. Funciones trigonométricas de ángulos agudos.

14. Las identidades fundamentales.

15. Funciones trigonométricas de cualquier ángulo.

16. Signos de las funciones trigonométricas.

17. Funciones trigonométricas de números reales.

18. Ángulos de referencia.

19. Dominios y contradominios de las funciones trigonométricas.

20. Función periódica; periodo; periodos de las funciones trigonométricas.

21. Fórmulas para ángulos negativos.

22. Gráficas de las funciones trigonométricas.

23. Las gráficas de

$$f(x) = a \operatorname{sen}(bx + c)$$

y

$$f(x) = a \cos(bx + c)$$

24. Suma de ordenadas y.

Ejercicios 6.9

1. Encuentre la medida en radianes que corresponde a los siguientes valores en grados: 330°, 405°, −150°, 240°, 36°.

2. Encuentre la medida en grados que corresponde a los siguientes valores en radianes: $9\pi/2$, $-2\pi/3$, $7\pi/4$, 5π, $\pi/5$.

3. Halle el ángulo de referencia de cada uno de los siguientes: 245°, 137°10′, 892°, $5\pi/4$, $-\pi/6$, $9\pi/8$.

4. Un ángulo central θ determina un arco de 20 cm de largo en una circunferencia de radio $r = 2$ m. ¿Cuánto mide θ en radianes?

5. Si θ es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y si el lado adyacente y la hipotenusa mi-

den 4 y 7, respectivamente, encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas de θ.

6. Determine el cuadrante que contiene a θ si:

(a) $\sec\theta < 0$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$.

(b) $\cot\theta < 0$ y $\csc\theta < 0$.

(c) $\cos\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$.

7. Calcule el valor de las funciones trigonométricas restantes si

(a) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{4}{5}$ y $\cos\theta = \frac{3}{5}$.

(b) $\csc\theta = \sqrt{13}/2$ y $\cot\theta = -\frac{3}{2}$.

8. Obtenga el valor de las seis funciones trigonométricas de θ si θ está en posición estándar y satisface la condición dada.

(a) El punto $(30, -40)$ está en el lado terminal de θ.

(b) El lado terminal de θ está en el cuadrante II y es paralelo a la recta $2x + 3y + 6 = 0$.

(c) $\theta = -90°$.

9. Sin usar tablas o calculadora, obtenga los valores de las funciones trigonométricas correspondientes a cada uno de los siguientes ángulos.

(a) $\theta = 9\pi/2$ (b) $\theta = -5\pi/4$

(c) $\theta = 0$ (d) $\theta = 11\pi/6$

10. Calcule en cada uno de los siguientes casos sin usar tablas o calculadora.

(a) $\cos 225°$ (b) $\tan 150°$

(c) $\operatorname{sen}(-\pi/6)$ (d) $\sec(4\pi/3)$

(e) $\cot(7\pi/4)$ (f) $\csc(300°)$

En cada uno de los Ejercicios 11 a 18, encuentre la amplitud y el periodo, y grafique la función f.

11. $f(x) = 5\cos x$ **12.** $f(x) = \frac{2}{3}\operatorname{sen} x$

13. $f(x) = -\tan x$ **14.** $f(x) = 4\operatorname{sen} 3x$

15. $f(x) = 3\cos 4x$ **16.** $f(x) = -4\operatorname{sen}\frac{1}{3}x$

17. $f(x) = 2\sec\frac{1}{2}x$ **18.** $f(x) = \frac{1}{2}\csc(2x)$

Trace la gráfica de la ecuación en cada uno de los Ejercicios 19 a 25.

19. $y = 2\operatorname{sen}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$

20. $y = -4\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

21. $y = 5\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

22. $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

23. $y = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$ **24.** $y = 1 + x + \cos x$

25. $y = 2^{-x}\operatorname{sen} 2x$

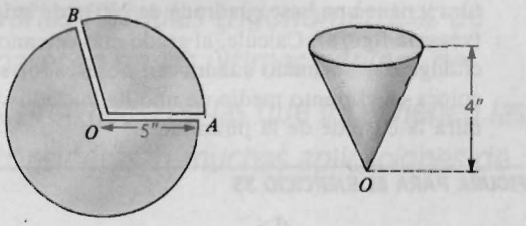
Dadas las partes del triángulo ABC de los Ejercicios 26 a 28, con $\gamma = 90°$, calcule aproximadamente las partes restantes.

26. $\beta = 60°$, $b = 40$ **27.** $\alpha = 54°40'$, $b = 220$

28. $\alpha = 62$, $b = 25$

29. Un vaso cónico de papel se hace cortando un sector AOB de una circunferencia de radio de 5 pulg y pegando el borde OA al borde OB (véase la figura). Calcule el ángulo AOB tal que el vaso tenga una profundidad de 4 pulg.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 29



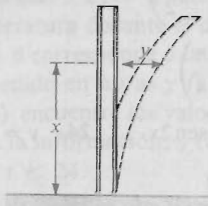
30. La hélice de aeroplano más grande que se ha utilizado tenía un diámetro de 22 pie y 7.5 pulg. El avión era propulsado mediante cuatro motores que hacían girar a la hélice a 545 rpm.

(a) Calcule la velocidad angular de la hélice en radianes por segundo.

(b) Aproxime la velocidad (en mi/h) con la que el extremo de la hélice describía la circunferencia respectiva.

31. Para simular la respuesta de una estructura a un terremoto, se debe elegir una forma para el desplazamiento inicial de las vigas del edificio. Cuando la viga tiene una longitud de L pies y el desplazamiento máximo es de a pies, los ingenieros han utilizado la fórmula $y = a - a\cos(\pi x/2L)$ para el desplazamiento y (véase la figura). Si $a = 1$ y $L = 10$, trace la gráfica de la ecuación para $0 \le x \le 10$.

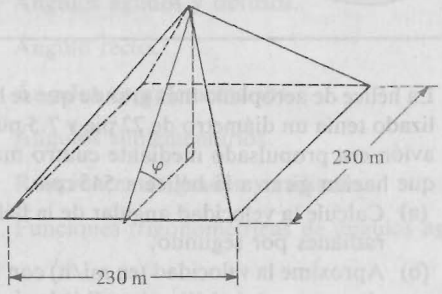
FIGURA PARA EL EJERCICIO 31



32. La variación de la temperatura del cuerpo es un ejemplo de un *ritmo circadiano*, es decir, un proceso biológico que se repite aproximadamente cada 24 horas. La temperatura del cuerpo es máxima alrededor de la 5 P.M. y mínima a las 5 A.M. Sean y la temperatura del cuerpo (en °F) y $t = 0$ la medianoche. Si las temperaturas alta y baja del cuerpo son 98.3 y 98.9, respectivamente, deduzca la fórmula $y = 98.6 + a \operatorname{sen}(bt + c)$ que se ajuste a esta información.

33. La Gran Pirámide de Egipto mide 147 m de altura y tiene una base cuadrada de 230 m de lado (véase la figura). Calcule, al grado más cercano, el ángulo φ formado cuando un observador se coloca en el punto medio de uno de los lados y mira la cúspide de la pirámide.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 33



34. Cuando se ve la punta de la Torre Eiffel, en París, desde una distancia de 200 pie desde la base, el ángulo de elevación es de 79.2°. Calcule la altura de la torre.

35. Se va a construir un túnel para una carretera nueva que pasará a través de una montaña de 260 pie de altura. A una distancia de 200 pie de la base de la montaña, el ángulo de elevación es de 36° (véase la figura). Desde una distancia de 150 pie, por el otro lado, el ángulo de elevación es de 47°. Calcule la longitud del túnel redondeando al pie más cercano.

36. Cuando cierto rascacielos se ve desde arriba de un edificio de 50 pie de altura, el ángulo de elevación es de 59° (véase la figura). Cuando se ve desde la acera junto al edificio pequeño, el ángulo de elevación es de 62°.
    (a) Aproxime la altura del rascacielos redondeando al décimo de pie más cercano.
    (b) Aproximadamente, ¿cuál es la distancia entre los dos edificios?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 35

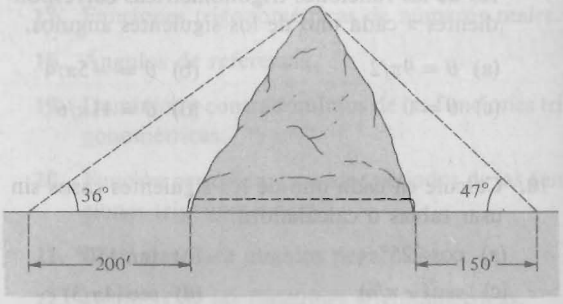
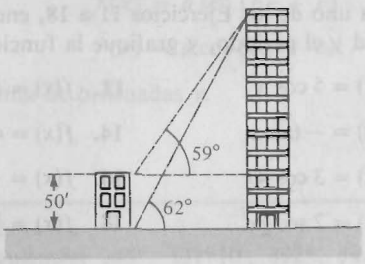


FIGURA PARA EL EJERCICIO 36



CAPÍTULO 7

Trigonometría analítica

En este capítulo deduciremos varias fórmulas trigonométricas de gran importancia que también aparecen en las últimas páginas del texto. ■ Además de las técnicas formales en las que intervienen las expresiones trigonométricas, se considerarán muchas aplicaciones de la trigonometría.

7.1 Identidades trigonométricas

Una expresión matemática que contiene símbolos como $\operatorname{sen} x$, $\cos \beta$, $\tan \nu$, y así sucesivamente, en donde las letras x, β y ν son variables, se denomina **expresión trigonométrica**. Los siguientes son ejemplos de expresiones trigonométricas:

$$x + \operatorname{sen} x \qquad \frac{\sqrt{\theta} + 2^{\operatorname{sen}\theta}}{\cot \theta} \qquad \frac{\cos(3y+1)}{x^2 + \tan^2(z - y^2)}$$

Como para las expresiones algebraicas, se supone que el dominio de cada variable es el conjunto de números reales (o ángulos) para los cuales las expresiones son significativas.

Las identidades fundamentales que fueron presentadas en la Sección 6.2 se pueden emplear como ayuda para simplificar expresiones trigonométricas complicadas. Empecemos recordando estas importantes fórmulas y resolviendo un ejemplo. La variable t en cada identidad fundamental puede representar un número real o el valor de un ángulo.

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} \qquad 1 + \tan^2 t = \sec^2 t$$

$$\cot t = \frac{1}{\tan t} \qquad\qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

EJEMPLO 1 Simplificar la expresión $(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \operatorname{sen}\theta)$.

SOLUCIÓN Justificar cada uno de los siguientes pasos:

$$\begin{aligned}(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \operatorname{sen}\theta) &= \left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)(1 - \operatorname{sen}\theta) \\ &= \left(\frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)(1 - \operatorname{sen}\theta) \\ &= \frac{1 - \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta} \\ &= \cos\theta.\end{aligned}$$

■

Existen otras formas de resolver el Ejemplo 1. Podemos efectuar el producto de los dos factores y después simplificar y combinar términos. Frecuentemente, el método

que empleamos (de cambiar todas las expresiones a expresiones que sólo contienen senos y cosenos) es el más conveniente. Sin embargo, esta técnica no siempre conduce a la más rápida simplificación posible.

La mayoría de las identidades a investigar en el resto de esta sección no son propiamente importantes. Lo importante es que se adquiera práctica en el manejo de expresiones trigonométricas, ya que esta práctica es esencial en cursos avanzados de matemáticas y otras ciencias.

A menudo, se emplea la frase "verifique la identidad" en vez de "demuestre que la ecuación dada es una identidad". De manera análoga a la que utilizamos en la resolución del Ejemplo 1, emplearemos las identidades fundamentales junto con manipulaciones algebraicas para verificar identidades trigonométricas. El método más adecuado para demostrar que una ecuación es una identidad, consiste en transformar un lado de la igualdad en el otro, como se ilustra en los tres ejemplos siguientes.

EJEMPLO 2 Verificar la identidad

$$\frac{\tan t + \cos t}{\operatorname{sen} t} = \sec t + \cot t.$$

SOLUCIÓN Transformaremos el lado izquierdo de la igualdad hasta obtener la expresión de la derecha. Así,

$$\frac{\tan t + \cos t}{\operatorname{sen} t} = \frac{\tan t}{\operatorname{sen} t} + \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} = \frac{\left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)}{\operatorname{sen} t} + \cot t$$

$$= \frac{1}{\cos t} + \cot t = \sec t + \cot t. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Verificar la identidad $\sec \alpha - \cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha \tan \alpha$.

SOLUCIÓN Podemos transformar el lado izquierdo en el derecho como sigue:

$$\sec \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}\right)$$

$$= \operatorname{sen} \alpha \tan \alpha. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Verificar la identidad

$$\frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

SOLUCIÓN Multiplicamos primero numerador y denominador de la fracción del lado izquierdo de la igualdad por $1 + \operatorname{sen} x$. Obtenemos así

$$\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}$$
$$= \frac{\cos x\,(1+\operatorname{sen} x)}{1-\operatorname{sen}^2 x}$$
$$= \frac{\cos x\,(1+\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

■

Otro método para probar que la ecuación $p = q$ es una identidad, consiste en transformar el lado izquierdo p en una expresión s, mediante pasos *reversibles*, es decir, que sea posible pasar de nuevo de s a p por un procedimiento inverso al empleado. En este caso, la ecuación $p = s$ es una identidad. Después, por *separado* y por medio de pasos también reversibles, se prueba que el lado derecho q se puede transformar en s de forma que $q = s$ sea una identidad. Si esto se cumple, se concluye que $p = q$ es una identidad. En el siguiente ejemplo se ilustra este método.

EJEMPLO 5 Verificar la identidad

$$(\tan\theta - \sec\theta)^2 = \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}.$$

SOLUCIÓN Para comprobar la identidad mostraremos que se puede transformar cada lado de la ecuación en una misma expresión. El lado izquierdo se puede escribir

$$(\tan\theta - \sec\theta)^2 = \tan^2\theta - 2\tan\theta\sec\theta + \sec^2\theta$$
$$= \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2 - 2\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}\right) + \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2$$
$$= \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} - \frac{2\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos^2\theta}.$$

Se puede cambiar el lado derecho de la ecuación dada, multiplicando numerador y denominador por $1 - \operatorname{sen}\theta$. Se obtiene,

$$\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}$$
$$= \frac{1-2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta}{1-\operatorname{sen}^2\theta}$$
$$= \frac{1-2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}$$

que es la misma expresión que se obtuvo a partir de $(\tan\theta - \sec\theta)^2$. La ecuación dada es una identidad, puesto que todos los pasos son reversibles. ■

En el cálculo es conveniente, algunas veces, cambiar la forma de ciertas expresiones algebraicas haciendo **sustitución trigonométrica**, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6 Expresar $\sqrt{a^2 - x^2}$ como una función trigonométrica de θ, en la que no aparezcan radicales, haciendo la sustitución $x = a\,\text{sen}\,\theta$, con $a > 0$ y $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.

SOLUCIÓN Haciendo $x = a\,\text{sen}\,\theta$,

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a\,\text{sen}\,\theta)^2}\\ &= \sqrt{a^2 - a^2\,\text{sen}^2\,\theta}\\ &= \sqrt{a^2(1 - \text{sen}^2\,\theta)}\\ &= \sqrt{a^2\cos^2\theta}\\ &= a\cos\theta.\end{aligned}$$

La última igualdad es válida porque (i) $\sqrt{a^2} = a$ si $a > 0$ y (ii) si $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, entonces $\cos\theta \ge 0$ y por lo tanto $\sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$. ■

Ejercicios 7.1

Verifique las identidades de los Ejercicios 1 a 88.

1. $\cos\theta\sec\theta = 1$
2. $\tan\alpha\cot\alpha = 1$
3. $\text{sen}\,\theta\sec\theta = \tan\theta$
4. $\text{sen}\,\alpha\cot\alpha = \cos\alpha$
5. $\dfrac{\csc x}{\sec x} = \cot x$
6. $\cot\beta\sec\beta = \csc\beta$
7. $(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha) = \text{sen}^2\,\alpha$
8. $\cos^2 x(\sec^2 x - 1) = \text{sen}^2\,x$
9. $\cos^2 t - \text{sen}^2\,t = 2\cos^2 t - 1$
10. $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$
11. $\dfrac{\text{sen}\,t}{\csc t} + \dfrac{\cos t}{\sec t} = 1$
12. $1 - 2\,\text{sen}^2\,x = 2\cos^2 x - 1$
13. $(1 + \text{sen}\,\alpha)(1 - \text{sen}\,\alpha) = \dfrac{1}{\sec^2\alpha}$
14. $(1 - \text{sen}^2\,t)(1 + \tan^2 t) = 1$
15. $\sec\beta - \cos\beta = \tan\beta\,\text{sen}\,\beta$
16. $\dfrac{\text{sen}\,w + \cos w}{\cos w} = 1 + \tan w$
17. $\dfrac{\csc^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \cot^2\theta$
18. $\text{sen}\,x + \cos x\cot x = \csc x$
19. $\text{sen}\,t(\csc t - \text{sen}\,t) = \cos^2 t$
20. $\cot t + \tan t = \csc t\sec t$
21. $\csc\theta - \text{sen}\,\theta = \cot\theta\cos\theta$
22. $\cos\theta(\tan\theta + \cot\theta) = \csc\theta$
23. $\dfrac{\sec^2 u - 1}{\sec^2 u} = \text{sen}^2\,u$
24. $(\tan u + \cot u)(\cos u + \text{sen}\,u) = \sec u + \csc u$
25. $(\cos^2 x - 1)(\tan^2 x + 1) = 1 - \sec^2 x$
26. $(\cot\alpha + \csc\alpha)(\tan\alpha - \text{sen}\,\alpha) = \sec\alpha - \cos\alpha$

27. $\sec t \csc t + \cot t = \tan t + 2 \cos t \csc t$

28. $\dfrac{1 + \cos^2 y}{\operatorname{sen}^2 y} = 2 \csc^2 y - 1$

29. $\sec^2 \theta \csc^2 \theta = \sec^2 \theta + \csc^2 \theta$

30. $\dfrac{\sec x - \cos x}{\tan x} = \dfrac{\tan x}{\sec x}$

31. $\dfrac{1 + \cos t}{\operatorname{sen} t} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t} = 2 \csc t$

32. $\tan^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \tan^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha$

33. $\dfrac{1 + \tan^2 v}{\tan^2 v} = \csc^2 v$

34. $\dfrac{\sec \theta + \csc \theta}{\sec \theta - \csc \theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta + \cos \theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos \theta}$

35. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} - \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} = 4 \tan x \sec x$

36. $\dfrac{1}{1 - \cos \gamma} + \dfrac{1}{1 + \cos \gamma} = 2 \csc^2 \gamma$

37. $\dfrac{1 + \csc \beta}{\sec \beta} - \cot \beta = \cos \beta$

38. $\dfrac{\cos x \cot x}{\cot x - \cos x} = \dfrac{\cot x + \cos x}{\cos x \cot x}$

39. $(\sec u - \tan u)(\csc u + 1) = \cot u$

40. $\dfrac{\cot \theta - \tan \theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos \theta} = \csc \theta - \sec \theta$

41. $\dfrac{\cot \alpha - 1}{1 - \tan \alpha} = \cot \alpha$

42. $\dfrac{1 + \sec \beta}{\tan \beta + \operatorname{sen} \beta} = \csc \beta$

43. $\csc^4 t - \cot^4 t = \cot^2 t + \csc^2 t$

44. $\cos^4 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = \operatorname{sen}^4 \theta + \cos^2 \theta$

45. $\dfrac{\cos \beta}{1 - \operatorname{sen} \beta} = \sec \beta + \tan \beta$

46. $\dfrac{1}{\csc y - \cot y} = \csc y + \cot y$

47. $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \dfrac{1 - \cos x}{\cos x}$

48. $\dfrac{\cot x}{\csc x + 1} = \dfrac{\csc x - 1}{\cot x}$

49. $\dfrac{\cot u - 1}{\cot u + 1} = \dfrac{1 - \tan u}{1 + \tan u}$

50. $\dfrac{1 + \sec x}{\operatorname{sen} x + \tan x} = \csc x$

51. $\operatorname{sen}^4 r - \cos^4 r = \operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r$

52. $\operatorname{sen}^4 \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta = 1$

53. $\tan^4 k - \sec^4 k = 1 - 2 \sec^2 k$

54. $\sec^4 u - \sec^2 u = \tan^4 u + \tan^2 u$

55. $(\sec t + \tan t)^2 = \dfrac{1 + \operatorname{sen} t}{1 - \operatorname{sen} t}$

56. $\sec^2 \gamma + \tan^2 \gamma = (1 - \operatorname{sen}^4 \gamma)\sec^4 \gamma$

57. $(\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta)^3 = 1$

58. $\dfrac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t} = \csc t + \cot t$

59. $\dfrac{1 + \csc \beta}{\cot \beta + \cos \beta} = \sec \beta$

60. $\dfrac{\operatorname{sen} z \tan z}{\tan z - \operatorname{sen} z} = \dfrac{\tan z + \operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} z \tan z}$

61. $\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\tan^4 x}\right)^3 \left(\dfrac{\csc^3 x}{\cot^6 x}\right)^2 = 1$

62. $\dfrac{\cos^3 x - \operatorname{sen}^3 x}{\cos x - \operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{sen} x \cos x$

63. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \cos \theta}{\tan^2 \theta - 1} = \dfrac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos \theta}$

64. $(\csc t - \cot t)^4 (\csc t + \cot t)^4 = 1$

65. $(a \cos t - b \operatorname{sen} t)^2 + (a \operatorname{sen} t + b \cos t)^2 = a^2 + b^2$

66. $\sin^6 v + \cos^6 v = 1 - 3 \operatorname{sen}^2 v \cos^2 v$

67. $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} = \dfrac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

68. $\dfrac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v} = \dfrac{\cot v - \cot u}{1 + \cot u \cot v}$

69. $\sqrt{\dfrac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} = \dfrac{1 - \cos t}{|\operatorname{sen} t|}$

70. $\sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}} = \dfrac{|\cos \theta|}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

71. $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \dfrac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = 2 \csc \alpha$

72. $\dfrac{\csc x}{1+\csc x} - \dfrac{\csc x}{1-\csc x} = 2\sec^2 x$

73. $\dfrac{1}{\tan\beta + \cot\beta} = \operatorname{sen}\beta\cos\beta$

74. $\dfrac{\cot y - \tan y}{\operatorname{sen} y \cos y} = \csc^2 y - \sec^2 y$

75. $\sec\theta + \csc\theta - \cos\theta - \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta\tan\theta + \cos\theta\cot\theta$

76. $\operatorname{sen}^3 t + \cos^3 t = (1 - \operatorname{sen} t\cos t)(\operatorname{sen} t + \cos t)$

77. $(1 - \tan^2\phi)^2 = \sec^4\phi - 4\tan^2\phi$

78. $\cos^4 w + 1 - \operatorname{sen}^4 w = 2\cos^2 w$

79. $\dfrac{\tan x}{1-\cot x} + \dfrac{\cot x}{1-\tan x} = 1 + \sec x\csc x$

80. $\dfrac{\cos\gamma}{1-\tan\gamma} + \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{1-\cot\gamma} = \cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma$

81. $\operatorname{sen}(-t)\sec(-t) = -\tan t$

82. $\dfrac{\cot(-v)}{\csc(-v)} = \cos v$

83. $\log 10^{\tan t} = \tan t$

84. $10^{\log|\operatorname{sen} t|} = |\operatorname{sen} t|$

85. $\ln\cot x = -\ln\tan x$

86. $\ln\sec\theta = -\ln\cos\theta$

87. $-\ln|\sec\theta - \tan\theta| = \ln|\sec\theta + \tan\theta|$

88. $\ln|\csc x - \cot x| = -\ln|\csc x + \cot x|$

En los Ejercicios 89 a 100 muestre que las ecuaciones dadas no son identidades. (*Sugerencia:* Obtenga un número del dominio de t o θ para el cual la ecuación no se cumple.)

89. $\cos t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$

90. $\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = \operatorname{sen} t + \cos t$

91. $\sqrt{\operatorname{sen}^2 t} = \operatorname{sen} t$

92. $\sec t = \sqrt{\tan^2 t + 1}$

93. $(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta$

94. $\log(1/\operatorname{sen} t) = 1/(\log\operatorname{sen} t)$

95. $\cos(-t) = -\cos t$

96. $\operatorname{sen}(t+\pi) = \operatorname{sen} t$

97. $\cos(\sec t) = 1$

98. $\cot(\tan\theta) = 1$

99. $\operatorname{sen}^2 t - 4\operatorname{sen} t - 5 = 0$

100. $3\cos^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$

En los Ejercicios 101 a 104 haga la sustitución trigonométrica $x = a\operatorname{sen}\theta$ para $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, y emplee las identidades fundamentales para simplificar la expresión resultante. (Compare con el Ejemplo 6.)

101. $(a^2 - x^2)^{3/2}$

102. $\dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$

103. $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

104. $\dfrac{1}{x\sqrt{a^2 - x^2}}$

En los Ejercicios 105 a 108 haga la sustitución trigonométrica $x = a\operatorname{sen}\theta$ para $-\pi/2 \le \theta < \pi/2$ y simplifique la expresión resultante.

105. $\sqrt{a^2 + x^2}$

106. $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

107. $\dfrac{1}{x^2 + a^2}$

108. $\dfrac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{x}$

En los Ejercicios 109 a 112 haga la sustitución trigonométrica $x = a\operatorname{sen}\theta$ para $0 < \theta < \pi/2$ y simplifique la expresión resultante.

109. $\sqrt{x^2 - a^2}$

110. $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2 - a^2}}$

111. $x^3\sqrt{x^2 - a^2}$

112. $\dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2}$

7.2 Ecuaciones trigonométricas

Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación que contiene expresiones trigonométricas. Las soluciones de ecuaciones trigonométricas se pueden expresar en función de nú-

meros reales o ángulos. Los métodos para resolver ecuaciones trigonométricas que no son identidades son similares a los empleados para encontrar las soluciones de ecuaciones algebraicas. La diferencia principal radica en que las ecuaciones trigonométricas se resuelven para evaluar $\operatorname{sen} x$, $\cos\theta$, etc., y de allí se determinan los valores de x y θ, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1 Resolver la ecuación $\operatorname{sen}\theta \tan\theta = \operatorname{sen}\theta$.

SOLUCIÓN Las siguientes ecuaciones son equivalentes a la que se quiere resolver:

$$\operatorname{sen}\theta \tan\theta - \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta(\tan\theta - 1) = 0$$

Para obtener las soluciones, igualamos a cero cada uno de los factores del lado izquierdo. De este modo,

$$\operatorname{sen}\theta = 0 \quad \text{o bien} \quad \tan\theta = 1.$$

Las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}\theta = 0$ son $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$; es decir, $\theta = n\pi$, en donde n es cualquier entero.

Como la función tangente tiene periodo π, basta encontrar las soluciones de la ecuación $\tan\theta = 1$ en el intervalo $[0, \pi)$, y una vez que éstas son conocidas, determinar los otros valores de θ sumándoles múltiplos de π. En $[0, \pi)$, $\pi/4$ es la única solución de $\tan\theta = 1$ y, por consiguiente, cada valor de θ que satisface la ecuación tiene la forma

$$\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

en donde n es un número entero.

Se deduce que las soluciones de la ecuación dada son todos los números de la forma

$$n\pi \quad \text{o bien} \quad \frac{\pi}{4} + n\pi$$

en donde n es cualquier entero. Algunas soluciones particulares son $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pi/4, 5\pi/4, -3\pi/4$ y $-7\pi/4$. ■

Nótese que hubiera sido incorrecto dividir la ecuación del Ejemplo 1 entre $\operatorname{sen}\theta$, ya que no se hubieran encontrado las soluciones de $\operatorname{sen}\theta = 0$.

EJEMPLO 2 Resolver la ecuación $2\operatorname{sen}^2 t - \cos t - 1 = 0$.

SOLUCIÓN Con el objeto de obtener una ecuación que contenga sólo $\cos t$, factorizamos de la manera siguiente:

$$2(1 - \cos^2 t) - \cos t - 1 = 0$$

$$2 - 2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0$$

$$-2\cos^2 t - \cos t + 1 = 0$$

$$2\cos^2 t + \cos t - 1 = 0$$

$$(2\cos t - 1)(\cos t + 1) = 0$$

Las soluciones de la última ecuación se obtienen de

$$2\cos t - 1 = 0 \quad \text{o bien} \quad \cos t + 1 = 0$$

o equivalentemente, de $\cos t = \frac{1}{2}$ o bien $\cos t = -1$.

Es suficiente obtener las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$; si a éstas se le suman múltiplos de 2π, se tendrán todos los valores de t que satisfacen la ecuación.

Si $\cos t = \frac{1}{2}$, entonces el número (o el ángulo) de referencia es $\pi/3$ (o 60°). Como $\cos t$ es positivo, el ángulo t se encuentra en los cuadrantes I o IV. Por lo tanto, en el intervalo $[0, 2\pi)$.

$$t = \frac{\pi}{3} \quad \text{o bien} \quad t = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

Si $\cos t = -1$, entonces $t = \pi$.

Se deduce que las soluciones de la ecuación dada son

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \qquad \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \qquad \pi + 2\pi n$$

en donde n es cualquier número entero. Si deseamos expresar las soluciones en grados, podemos escribir

$$60° + 360°n, \qquad 300° + 360°n, \qquad 180° + 360°n. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Hallar las soluciones de $4\,\text{sen}^2 x \tan x - \tan x = 0$ que estén en el intervalo $[0, 2\pi)$.

SOLUCIÓN Factorizando el lado izquierdo de la ecuación, obtenemos:

$$\tan x\,(4\text{sen}^2 x - 1) = 0$$

Por lo tanto, $\tan x = 0$ o bien $\text{sen}^2 x = \frac{1}{4}$.

Equivalentemente,

$$\tan x = 0, \quad \text{sen}\, x = \tfrac{1}{2}, \quad \text{o bien} \quad \text{sen}\, x = -\tfrac{1}{2}.$$

En el intervalo $[0, 2\pi)$ las soluciones de la ecuación $\tan x = 0$ son 0 y π. Los valores de x que satisfacen $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$ son $\pi/6$ y $5\pi/6$. La ecuación $\text{sen}\, x = -\frac{1}{2}$ da valores entre π y 2π que tienen como número o ángulo de referencia $\pi/6$. Estos valores son

$$\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \quad \text{y} \quad 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}.$$

Por lo tanto, en el intervalo $[0, 2\pi)$ las soluciones de la ecuación dada son

$$0, \quad \pi, \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{7\pi}{6}, \quad \frac{11\pi}{6}.$$ ■

EJEMPLO 4 Obtener las soluciones de la ecuación $\csc^4 2u - 4 = 0$.

SOLUCIÓN Factorizando el lado izquierdo de la ecuación obtenemos

$$(\csc^2 2u - 2)(\csc^2 2u + 2) = 0.$$

Entonces

$$\csc^2 2u = 2 \quad \text{o bien} \quad \csc^2 2u = -2.$$

La ecuación $\csc^2 2u = -2$ no tiene soluciones reales. Las soluciones de $\csc^2 2u = 2$ están dadas por las soluciones de las ecuaciones

$$\csc 2u = \sqrt{2} \quad \text{o bien} \quad \csc 2u = -\sqrt{2}.$$

Si $\csc 2u = \sqrt{2}$, entonces

$$2u = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad \text{o bien} \quad 2u = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

en donde n es cualquier número entero. Si dividimos entre 2 ambos lados de las dos últimas igualdades,

$$u = \frac{\pi}{8} + \pi n \quad \text{o bien} \quad u = \frac{3\pi}{8} + \pi n.$$

Análogamente, de $\csc 2u = -\sqrt{2}$, obtenemos

$$2u = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \quad \text{o bien} \quad 2u = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$$

en donde n es cualquier entero. Dividiendo entre 2 ambos lados de las dos últimas igualdades, tenemos

$$u = \frac{5\pi}{8} + \pi n \quad \text{o bien} \quad u = \frac{7\pi}{8} + \pi n.$$

Resumiendo la información anterior, todas las soluciones son de la forma

$$u = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n \quad \text{en donde } n \text{ es cualquier entero.}$$ ■

El siguiente ejemplo ilustra cómo se usa la calculadora para resolver una ecuación trigonométrica.

EJEMPLO 5 Calcular redondeando a grados las soluciones de la ecuación siguiente en el intervalo $[0°, 360°)$:

$$5 \operatorname{sen}\theta \tan\theta - 10 \tan\theta + 3 \operatorname{sen}\theta - 6 = 0$$

SOLUCIÓN Es posible factorizar la ecuación agrupando los términos de la siguiente manera:

$$5 \tan\theta (\operatorname{sen}\theta - 2) + 3 (\operatorname{sen}\theta - 2) = 0$$

$$(5 \tan\theta + 3)(\operatorname{sen}\theta - 2) = 0$$

Como la ecuación $\operatorname{sen}\theta = 2$ no tiene soluciones ya que $\operatorname{sen}\theta \leq 1$ para todo θ, los valores de θ que satisfacen la ecuación dada son los que verifican

$$\tan\theta = -\tfrac{3}{5} = -0.6000.$$

Se empieza aproximando el ángulo de referencia, es decir, el ángulo agudo θ' tal que $\tan\theta' = \frac{3}{5} = 0.6$. Utilizando una calculadora en el modo de grados, resulta lo siguiente.

Ingresar:	0.6	(valor de $\tan\theta'$)
Oprimir INV tan:	30.963757	(valor en grados de θ')

Por lo tanto, $\theta' \approx 31°$. Como θ' está en el cuadrante II o en el IV, esto implica que

$$\theta \approx 180° - 31° = 149° \quad \text{o bien} \quad \theta \approx 360° - 31° = 329°. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 6 En Boston, MA, el número de horas de luz diurna $D(t)$ en una época particular del año se puede aproximar mediante

$$D(t) = 3 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{365}(t - 79) + 12$$

en donde t está en días y $t = 0$ corresponde al 1 de enero. ¿Cuántos días del año tienen más de 10.5 horas de claridad?

SOLUCIÓN En el Ejemplo 3 de la Sección 6.8 se presentó la gráfica de D (véase la Figura 6.57). Si se pueden encontrar dos números a y b, tales que $D(a) = 10.5$, $D(b) = 10.5$ y $0 < a < b < 365$, entonces habrá más de 10.5 horas de luz diurna en el t-ésimo día del año si $a < t < b$. Resolviendo la ecuación $D(t) = 10.5$, es decir,

$$3 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{365}(t - 79) + 12 = 10.5.$$

La cual es equivalente a

$$3 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{365}(t - 79) = -1.5$$

o bien

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{365}(t - 79) = -0.5 = -\frac{1}{2}.$$

Si $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$, entonces el ángulo de referencia es $\pi/6$ y el ángulo θ está en el cuadrante III o en el IV. Por consiguiente, se pueden encontrar los números a y b resolviendo las ecuaciones

$$\frac{2\pi}{365}(t-79) = \frac{7\pi}{6} \quad \text{y} \quad \frac{2\pi}{365}(t-79) = \frac{11\pi}{6}.$$

De la primera de estas ecuaciones se obtiene

$$t - 79 = \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{365}{2\pi} = \frac{2555}{12} \approx 212.9$$

o bien $$t \approx 212.9 - 79 = 133.9.$$

De la misma manera, la segunda ecuación da

$$t \approx 255.6.$$

De aquí se sigue que habrá al menos 10.5 horas de luz desde $t = 134$ hasta $t = 255$; esto es, durante 121 días del año.

Ejercicios 7.2

En cada uno de los Ejercicios 1 a 16, encuentre todas las soluciones de la ecuación dada.

1. $2\cos t + 1 = 0$
2. $\cot\theta + 1 = 0$
3. $\tan^2 x = 1$
4. $4\cos\theta - 2 = 0$
5. $(\cos\theta - 1)(\operatorname{sen}\theta + 1) = 0$
6. $2\cos x = \sqrt{3}$
7. $\sec^2\alpha - 4 = 0$
8. $3 - \tan^2\beta = 0$
9. $\sqrt{3} + 2\operatorname{sen}\beta = 0$
10. $4\operatorname{sen}^2 x - 3 = 0$
11. $\cot^2 x - 3 = 0$
12. $(\operatorname{sen} t - 1)\cos t = 0$
13. $(2\operatorname{sen}\theta + 1)(2\cos\theta + 3) = 0$
14. $(2\operatorname{sen} u - 1)(\cos u - \sqrt{2}) = 0$
15. $\operatorname{sen} 2x\,(\csc 2x - 2) = 0$
16. $\tan\alpha + \tan^2\alpha = 0$

En cada uno de los Ejercicios 17 a 36, resuelva las ecuaciones dadas para el intervalo $[0, 2\pi)$; exprese también los resultados en grados.

17. $2 - 8\cos^2 t = 0$
18. $\cot^2\theta - \cot\theta = 0$
19. $2\operatorname{sen}^2 u = 1 - \operatorname{sen} u$
20. $2\cos^2 t + 3\cos t + 1 = 0$
21. $\tan^2 x \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$
22. $\sec\beta \csc\beta = 2\csc\beta$
23. $2\cos^2\gamma + \cos\gamma = 0$
24. $\operatorname{sen} x - \cos x = 0$
25. $\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta - 6 = 0$
26. $2\operatorname{sen}^2 u + \operatorname{sen} u - 6 = 0$
27. $1 - \operatorname{sen} t = \sqrt{3}\cos t$
28. $\cos\theta - \operatorname{sen}\theta = 1$
29. $\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha = 1$
30. $2\tan t - \sec^2 t = 0$
31. $\tan\theta + \sec\theta = 1$
32. $\cot\alpha + \tan\alpha = \csc\alpha \sec\alpha$
33. $2\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x - 1 = 0$
34. $\sec^5\theta = 4\sec\theta$
35. $2\tan t \csc t + 2\csc t + \tan t + 1 = 0$
36. $2\operatorname{sen} v \csc v - \csc v = 4\operatorname{sen} v - 2$

En cada uno de los Ejercicios 37 a 40 aplique una calculadora para determinar con una aproximación de diez minutos las soluciones de la ecuación dada en el intervalo $[0°, 360°)$.

37. $\operatorname{sen}^2 t - 4\operatorname{sen} t + 1 = 0$
38. $\tan^2\theta + 3\tan\theta + 2 = 0$
39. $12\operatorname{sen}^2 u - 5\operatorname{sen} u - 2 = 0$

40. $5\cos^2\alpha + 3\cos\alpha - 2 = 0$

41. Una ola de 50 pie de altura y de 30 min de periodo se acerca a un malecón que está a 20 pie sobre el nivel del mar. Desde un punto en la playa, la distancia y desde el nivel del mar hasta la cresta de la ola está dada por $y = 25\cos(\pi/15)t$, en donde t está en minutos. Aproximadamente, ¿cuántos minutos de cada periodo de 30 min está la cresta de la ola por arriba del malecón?

42. La temperatura baja esperada T (en °F) en Fairbanks, Alaska, se puede aproximar mediante

$$T = 36\,\text{sen}\frac{2\pi}{365}(t - 101) + 14$$

en la que t está en días y $t = 0$ corresponde al 1 de enero. (Véase el Ejercicio 32 de la Sección 6.8.) ¿Cuántos días del año se espera que la temperatura esté por debajo de −4°F?

43. En un día despejado con D horas de claridad, se sabe, a partir de estudios empíricos, que la intensidad (equivalente) de la luz solar I (en cal/cm³) se puede describir adecuadamente mediante $I = I_M\,\text{sen}^3(\pi t/D)$ para $0 \le t \le D$, en donde $t = 0$ corresponde al amanecer e I_M es la intensidad máxima. Aproximadamente, ¿a qué hora se tiene que $I = I_M/2$?

44. Refiérase al Ejercicio 43. En los días nublados, la intensidad solar I se representa mejor mediante $I = I_M\,\text{sen}^2(\pi t/D)$. ¿A qué hora del día es $I = I_M/2$?

45. Refiérase a los Ejercicios 43 y 44. Un especialista dermatólogo recomienda protección del sol cuando la intensidad I excede el 75% de la intensidad máxima. Si $D = 12$ horas, aproxima el número de horas que es necesaria la protección (a) en un día claro, (b) en un día nublado.

46. En la ingeniería de carreteras se estudian los problemas relativos a la penetración de la helada en el suelo. La temperatura T en el tiempo t horas y a la profundidad de x pies está representada por

$$T = T_0\,e^{-\lambda x}\,\text{sen}(\omega t - \lambda x)$$

en la que T_0, ω y λ son constantes y el periodo de $\text{sen}(\omega t - \lambda x)$ es de 24 horas.

(a) Encuentre una fórmula para la temperatura en la superficie. ¿A qué horas es mínima la temperatura mencionada?

(b) Para $\lambda = 2.5$, determine a qué horas es mínima la temperatura a una profundidad de 1 pie.

(c) ¿A qué profundidad es la temperatura la mitad de la temperatura en la superficie?

(*Nota:* La expresión para T es una solución de la ecuación de calor unidimensional de la física. Si se desea más información, consultar *The Frost Penetration Problem in Highway Engineering*, A.R. Junikis, Rutger's University Press (1955), pp. 43-61.)

47. En la figura se muestra una gráfica, generada por computadora, de la ecuación $y = \frac{1}{2}x + \text{sen}\,x$ para $-2\pi \le t \le 2\pi$. Usando el cálculo se puede demostrar que las coordenadas x de las crestas y los valles de la gráfica son soluciones de la ecuación $\frac{1}{2} + \cos x = 0$. Determine las coordenadas de los puntos A, B, C y D.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 47

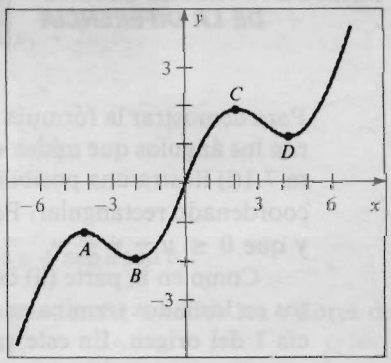
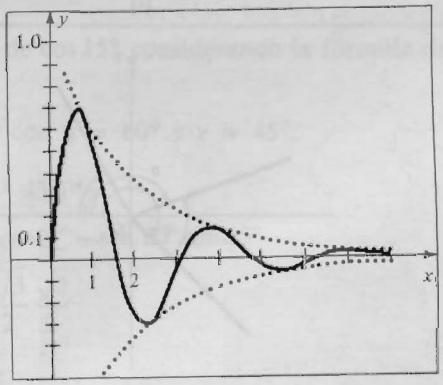


FIGURA PARA EL EJERCICIO 48



48. Las *oscilaciones amortiguadas* son aquellas oscilaciones de magnitud decreciente que se presentan cuando se consideran las fuerzas de fricción. En la figura se muestra la gráfica de la oscilación amortiguada que corresponde a la ecuación

$$y = e^{-x/2} \operatorname{sen} 2x.$$

Usando el cálculo se puede demostrar que las crestas y los valles de la gráfica son las soluciones de $2\cos 2x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x = 0$. Aproxime las coordenadas x de estas crestas y valles para $x > 0$.

7.3 Fórmulas para la suma y la diferencia de dos ángulos

En esta sección derivaremos fórmulas en las que aparecen funciones trigonométricas de $u + v$ y de $u - v$, donde u y v representan ángulos o números reales. Tales fórmulas se denominan *de adición* o *sustracción*, respectivamente. La primera fórmula que se discutirá se puede expresar de la siguiente manera:

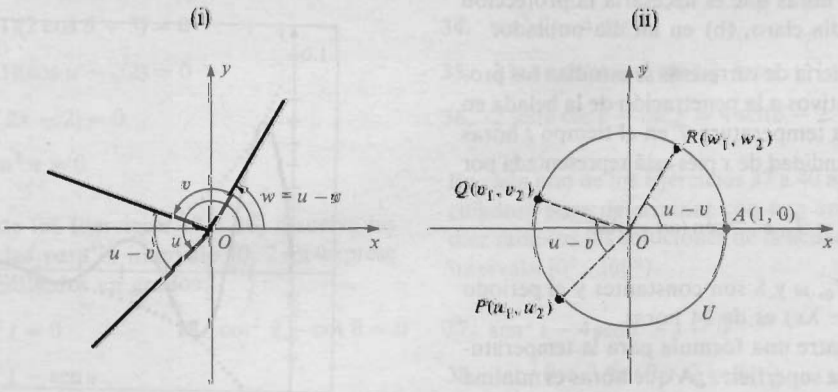
FÓRMULA PARA EL COSENO DE LA DIFERENCIA

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v.$$

Para demostrar la fórmula se toman los números reales cualesquiera u y v, y se consideran los ángulos que miden en radianes u y v, respectivamente. Sea $w = u - v$. La Figura 7.1(i) ilustra una posibilidad, con los ángulos en la posición estándar, en un sistema coordenado rectangular. Por conveniencia, se supone que tanto u como v son positivos y que $0 \leq u - v < v$.

Como en la parte (ii) de la figura, sean $P(u_1, u_2)$, $Q(v_1, v_2)$ y $R(w_1, w_2)$ los puntos en los lados terminales de los ángulos indicados que están, cada uno, a una distancia 1 del origen. En este caso, P, Q y R están en el círculo unitario U con centro en

FIGURA 7.1



el origen. A partir de la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo (con $c = 1$),

$$(*) \qquad \begin{array}{lll} \cos u = u_1, & \cos v = v_1, & \cos(u - v) = w_1 \\ \operatorname{sen} u = u_2, & \operatorname{sen} v = v_2, & \operatorname{sen}(u - v) = w_2. \end{array}$$

El símbolo (*) se usa para referencia posterior a estas fórmulas.

En seguida puede observarse que la distancia entre $A(1, 0)$ y R debe ser igual a la distancia entre P y Q, pues los ángulos tienen el mismo valor $u - v$. Con la fórmula de la distancia

$$\sqrt{(w_1 - 1)^2 + (w_2 - 0)^2} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y desarrollando los términos bajo los radicales

$$w_1^2 - 2w_1 + 1 + w_2^2 = u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2.$$

Puesto que los puntos (u_1, u_2), (v_1, v_2) y (w_1, w_2) están sobre el círculo unitario U y una ecuación para U es $x^2 + y^2 = 1$, puede sustituirse por 1, $u_1^2 + u_2^2$, $v_1^2 + v_2^2$ y $w_1^2 + w_2^2$. Con lo anterior y simplificando queda

$$2 - 2w_1 = 2 - 2u_1v_1 - 2u_2v_2,$$

que se reduce a

$$w_1 = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Sustituyendo de las fórmulas (*) resulta

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,$$

que es lo que se quería demostrar. Es posible extender a todos los valores de u y de v, no sólo los representados en la Figura 7.1.

El siguiente ejemplo muestra el uso de la fórmula de la diferencia para encontrar el valor exacto de cos 15°. Por supuesto, si sólo se desea una aproximación se podría usar una calculadora o bien la Tabla 4.

EJEMPLO 1 Calcular el valor exacto de cos 15° considerando la fórmula de sustracción y que $15° = 60° - 45°$.

SOLUCIÓN Con la fórmula anterior y con $u = 60°$ y $v = 45°$:

$$\begin{aligned} \cos 15° &= \cos(60° - 45°) \\ &= \cos 60° \cos 45° + \operatorname{sen} 60° \operatorname{sen} 45° \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

■

Es sencillo determinar una fórmula para $\cos(u + v)$. Simplemente escribimos $u + v = u - (-v)$ y empleamos la fórmula que se dedujo anteriormente. De este modo,

$$\begin{aligned}\cos(u + v) &= \cos[u - (-v)] \\ &= \cos u \cos(-v) + \operatorname{sen} u \operatorname{sen}(-v).\end{aligned}$$

Con las fórmulas de ángulos negativos (véase la página 297), $\cos(-v) = \cos v$ y $\operatorname{sen}(-v) = -\operatorname{sen} v$, para todo v; por lo tanto,

FÓRMULA PARA EL COSENO DE LA SUMA

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v.$$

EJEMPLO 2 Utilice los ángulos $\pi/3$ y $\pi/4$ para determinar $\cos(7\pi/12)$.

SOLUCIÓN Si consideramos que $7\pi/12 = (\pi/3) + (\pi/4)$ y empleamos la fórmula de $\cos(u + v)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\cos\frac{7\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

■

Se acostumbra designar a las funciones seno y coseno como **cofunciones** (una de otra). Así mismo, las funciones tangente y cotangente son cofunciones, como la secante y la cosecante. La fórmula de la diferencia para el coseno se puede usar para obtener los siguientes tres hechos acerca de las cofunciones, en donde u es un número real o el valor en radianes de un ángulo.

FÓRMULAS PARA LAS COFUNCIONES

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u, \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u,$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u$$

La primera de ellas se puede probar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos u + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} u \\ &= (0)\cos u + (1)\operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u.\end{aligned}$$

Para obtener la segunda, sustituimos u por $(\pi/2) - v$ en la primera identidad,

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - v\right)\right] = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

o equivalentemente,

$$\cos v = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - v\right).$$

Puesto que el símbolo v es arbitrario, esto es equivalente a $\cos u = \operatorname{sen}[(\pi/2) - u]$. Finalmente,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u} = \cot u.$$

Si θ denota el ángulo en grados, podemos escribir

$$\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta, \qquad \operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta, \qquad \tan(90° - \theta) = \cot\theta.$$

Si θ es agudo, entonces θ y $90° - \theta$ son ángulos complementarios, puesto que su suma es igual a 90°. Las últimas tres fórmulas describen en parte el hecho de que *cualquier valor funcional de θ es igual a la cofunción del ángulo complementario* $90° - \theta$.

Ahora podemos establecer las siguientes identidades:

FÓRMULAS PARA EL SENO Y LA TANGENTE DE LA SUMA Y DE LA DIFERENCIA

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

DEMOSTRACIÓN Probaremos la primera fórmula y la tercera, y dejaremos, como ejercicio, la demostración de las otras dos. Se deben justificar cada uno de los siguientes pasos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(u + v) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (u + v)\right] \\
&= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - u\right) - v\right] \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\cos v + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\operatorname{sen} v \\
&= \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v.
\end{aligned}$$

Para verificar la fórmula para $\tan(u + v)$, procedemos de la manera siguiente:

$$\tan(u + v) = \frac{\operatorname{sen}(u + v)}{\cos(u + v)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v}{\cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}.$$

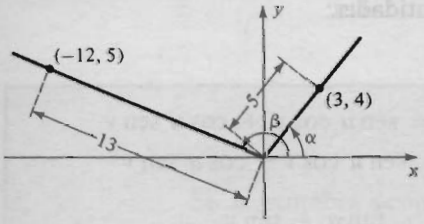
Después se divide numerador y denominador entre $\cos u \cos v$ (suponiendo naturalmente que $\cos u \cos v \neq 0$) y así

$$\tan(u + v) = \frac{\left(\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\right)\left(\frac{\cos v}{\cos v}\right) + \left(\frac{\cos u}{\cos u}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} v}{\cos v}\right)}{\left(\frac{\cos u}{\cos u}\right)\left(\frac{\cos v}{\cos v}\right) - \left(\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} v}{\cos v}\right)}$$

$$= \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}.$$

Si $\cos u \cos v \neq 0$, entonces $\cos u$ o bien $\cos v = 0$. En este caso $\tan u$ o $\tan v$, no está definido y la fórmula no es válida. □

FIGURA 7.2



EJEMPLO 3 Dados $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$ y $\cos\beta = -\frac{12}{13}$, donde α y β están en los cuadrantes I y II, respectivamente, obtener los valores exactos de $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, $\tan(\alpha + \beta)$ y determinar el cuadrante donde se localiza $\alpha + \beta$.

SOLUCIÓN Es conveniente representar α y β geométricamente, como se ilustra en la Figura 7.2. No se pierde generalidad si, como en la figura, se considera que α y β son ángulos positivos entre 0 y 2π. Como $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$, puede tomarse el punto (3, 4) sobre la recta que determina a α. De manera análoga, como $\cos\beta = -\frac{12}{13}$, el punto (−12, 5) está en la recta que determina a β. Si nos referimos a la Figura 7.2 y empleamos la definición de las funciones trigonométricas (pág. 287), obtenemos

$$\cos\alpha = \tfrac{3}{5}, \quad \tan\alpha = \tfrac{4}{3}, \quad \operatorname{sen}\beta = \tfrac{5}{13}, \quad \text{y} \quad \tan\beta = -\tfrac{5}{12}.$$

Mediante las fórmulas para la suma, obtenemos

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = -\frac{33}{65}.$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

$$= \frac{\frac{4}{3} + \left(-\frac{5}{12}\right)}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{5}{12}\right)} = \frac{33}{56}.$$

Como sen $(\alpha + \beta)$ es negativo y tan $(\alpha + \beta)$ es positivo, $\alpha + \beta$ está en el cuadrante III. ■

Las fórmulas para la suma son de gran importancia en el cálculo donde se requieren simplificaciones del tipo de las del siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Siendo $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $h \neq 0$, probar que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \operatorname{sen} x \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right).$$

SOLUCIÓN De acuerdo con la definición de f y la fórmula para el seno de una suma,

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x (\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h}{h} \\ &= \operatorname{sen} x \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right).\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 Demostrar que para toda x,

$$a \cos Bx + b \operatorname{sen} Bx = A \cos(Bx - C)$$

en donde $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\tan C = b/a$.

SOLUCIÓN Empleando la fórmula para $\cos(u - v)$ con $u = Bx$ y $v = C$, obtenemos

$$A \cos(Bx - C) = A(\cos Bx \cos C + \operatorname{sen} Bx \operatorname{sen} C).$$

Concluiremos la demostración determinando las condiciones que deben cumplir a y b para que se verifique

$$a \cos Bx + b \operatorname{sen} Bx = A \cos Bx \cos C + A \operatorname{sen} Bx \operatorname{sen} C.$$

La última fórmula se cumple para toda x si y sólo si

$$a = A \cos C \quad \text{y} \quad b = A \operatorname{sen} C$$

(para verificar esto hagamos $x = 0$). Como consecuencia,

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= A^2 \cos^2 C + A^2 \operatorname{sen}^2 C \\ &= A^2(\cos^2 C + \operatorname{sen}^2 C) = A^2\end{aligned}$$

y podemos elegir $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Finalmente, notemos que

$$\frac{b}{a} = \frac{A \operatorname{sen} C}{A \cos C} = \frac{\operatorname{sen} C}{\cos C} = \tan C.$$

Lo cual establece la identidad. ■

EJEMPLO 6 En el Ejemplo 1 de la Sección 6.8 se trazó la gráfica de $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$ mediante la suma de ordenadas (Figura 6.54). Use la fórmula del Ejemplo 5 para obtener la amplitud, el periodo y el defasamiento de f.

SOLUCIÓN Haciendo $a = 1$, $b = 1$ y $B = A$ en la fórmula del Ejemplo 5, obtenemos

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \tan C = b/a = 1/1 = 1.$$

Como $\tan C = 1$, podemos elegir $C = \pi/4$. Al sustituir en la fórmula, obtenemos

$$\cos x + \operatorname{sen} x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

De acuerdo con la Sección 6.7, la amplitud es $\sqrt{2}$, el periodo es 2π y el defasamiento es $\pi/4$. Esto puede comprobarse con la Figura 6.54. ■

Ejercicios 7.3

Escriba las expresiones de los Ejercicios 1 a 4 en términos de las cofunciones de los ángulos complementarios.

1. (a) $\operatorname{sen} 46°37'$
   (b) $\cos 73°12'$
   (c) $\tan(\pi/6)$
   (d) $\sec 17.28°$

2. (a) $\tan 24°12'$
   (b) $\operatorname{sen} 89°41'$
   (c) $\cos(\pi/3)$
   (d) $\cot 61.87°$

3. (a) $\cos(7\pi/20)$
   (b) $\operatorname{sen} \frac{1}{4}$
   (c) $\tan 1$
   (d) $\csc(0.53)$

4. (a) $\operatorname{sen}(\pi/12)$
   (b) $\cos(0.64)$
   (c) $\tan\sqrt{2}$
   (d) $\sec(1.2)$

En los Ejercicios 5 a 10, encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas dadas.

5. (a) $\cos(\pi/4) + \cos(\pi/6)$
   (b) $\cos(5\pi/12)$

6. (a) $\operatorname{sen}(2\pi/3) + \operatorname{sen}(\pi/4)$
   (b) $\operatorname{sen}(11\pi/12)$

7. (a) $\tan 60° + \tan 225°$
   (b) $\tan 285°$

8. (a) $\cos 135° - \cos 60°$
   (b) $\cos 75°$

9. (a) $\operatorname{sen}(3\pi/4) - \operatorname{sen}(\pi/6)$
   (b) $\operatorname{sen}(7\pi/12)$

10. (a) $\tan(3\pi/4) - \tan(\pi/6)$
    (b) $\tan(7\pi/12)$

En los Ejercicios 11 a 16 exprese en términos de una función de un solo ángulo.

11. $\cos 48° \cos 23° + \operatorname{sen} 48° \operatorname{sen} 23°$

12. $\cos 13° \cos 50° - \operatorname{sen} 13° \operatorname{sen} 50°$

13. $\cos 10° \operatorname{sen} 5° - \operatorname{sen} 10° \cos 5°$

14. $\operatorname{sen} 57° \cos 4° + \cos 57° \operatorname{sen} 4°$

15. $\cos 3 \operatorname{sen}(-2) - \cos 2 \operatorname{sen} 3$

16. $\operatorname{sen}(-5) \cos 2 + \cos 5 \operatorname{sen}(-2)$

17. Sean α y β dos ángulos agudos tales que $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ y $\tan \beta = \frac{8}{15}$. Encuentre los valores de $\cos(\alpha + \beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y el cuadrante en donde está $\alpha + \beta$.

18. Sean $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{4}{5}$ y $\sec \beta = \frac{5}{3}$, en donde α y β son ángulos del tercer y primer cuadrantes, respectivamente. Halle los valores de $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, $\tan(\alpha + \beta)$ y el cuadrante de $\alpha + \beta$.

19. Sean $\tan \alpha = -\frac{7}{24}$ y $\cot \beta = \frac{3}{4}$, en donde α y β están en el segundo y tercer cuadrantes, respectivamente. Halle los valores de $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, así como también de $\cos(\alpha + \beta)$, $\tan(\alpha + \beta)$, $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, $\tan(\alpha - \beta)$.

20. Para los puntos $P(u)$ y $P(v)$ en el cuadrante III con $\cos u = -\frac{2}{5}$ y $\cos v = -\frac{3}{5}$, determine $\operatorname{sen}(u - v)$, $\cos(u - v)$ y el correspondiente cuadrante de $P(u - v)$.

Verifique las identidades de los Ejercicios 21 a 40.

21. $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

22. $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$

23. $\cos\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} \theta$

24. $\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos \alpha$

25. $\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\operatorname{sen}\theta + \cos \theta)$

26. $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\cos \theta - \operatorname{sen}\theta)$

27. $\tan\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \tan u}{1 - \tan u}$

28. $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$

29. $\tan\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot u$

30. $\cot\left(t - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3} \tan t + 1}{\tan t - \sqrt{3}}$

31. $\operatorname{sen}(u + v) \cdot \operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen}^2 u - \operatorname{sen}^2 v$

32. $\cos(u + v) \cdot \cos(u - v) = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 v$

33. $\cos(u + v) + \cos(u - v) = 2 \cos u \cos v$

34. $\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v) = 2 \operatorname{sen} u \cos v$

35. $\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$. (*Sugerencia:* $2u = u + u$.)

36. $\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$

37. $\frac{\operatorname{sen}(u + v)}{\cos(u - v)} = \frac{\tan u + \tan v}{1 + \tan u \tan v}$

38. $\frac{\cos(u + v)}{\cos(u - v)} = \frac{1 - \tan u \tan v}{1 + \tan u \tan v}$

39. $\frac{\operatorname{sen}(u + v)}{\operatorname{sen}(u - v)} = \frac{\tan u + \tan v}{\tan u - \tan v}$

40. $\tan u + \tan v = \frac{\operatorname{sen}(u + v)}{\cos u \cos v}$

41. Exprese $\operatorname{sen}(u + v + w)$ en términos de funciones de u, v y w. (*Sugerencia:* Considere que $\operatorname{sen}(u + v + w) = \operatorname{sen}[(u + v) + w]$ y use la fórmula de la suma.)

42. Exprese $\tan(u + v + w)$ en términos de funciones de u, v y w.

43. Deduzca la fórmula
$$\cot(u + v) = \frac{\cot u \cot v - 1}{\cot u + \cot v}.$$

44. Sean α y β dos ángulos complementarios. Demuestre que
$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta = 1.$$

45. Deduzca las fórmulas para la diferencia de las funciones seno y tangente.

46. Demuestre cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $\sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$

(b) $\csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$

(c) $\cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$

47. Siendo $f(x) = \cos x$, demuestre que
$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \cos x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \operatorname{sen} x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right).$$

48. Siendo $f(x) = \tan x$, demuestre que
$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \sec^2 x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)\frac{1}{\cos h - \operatorname{sen} h \tan x}.$$

En los Ejercicios 49 y 50 determine las soluciones de la ecuación dada, que se encuentran en el intervalo $[0, 2\pi)$ y obtenga también la medida en grados de cada solución.

49. $\operatorname{sen} 4t \cos t = \operatorname{sen} t \cos 4t$

50. $\cos 5t \cos 3t = 2^{-1} + \operatorname{sen}(-5t) \operatorname{sen} 3t$

En los Ejercicios 51 a 54 use la fórmula del Ejemplo 5 para expresar f en términos de la función coseno y determine la amplitud, periodo y corrimiento de fase.

51. $f(x) = \sqrt{3} \cos 2x + \operatorname{sen} 2x$

52. $f(x) = \cos 4x + \sqrt{3} \operatorname{sen} 4x$

53. $f(x) = 2 \cos 3x - 2 \operatorname{sen} 3x$

54. $f(x) = -5 \cos 10x + 5 \operatorname{sen} 10x$

55. Una masa fija a un resorte se eleva y_0 pie y se le da una velocidad inicial vertical de v_0 pie/s, la posición subsecuente y de la masa está dada por

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t$$

en la que t es el tiempo en segundos y ω es una constante positiva.

(a) Si $\omega = 1$, $y_0 = 2$ y $v_0 = 3$ pie por segundo, encuentre la amplitud y el periodo del movimiento resultante expresando primero y en la forma $A \cos(Bx - C)$. (*Sugerencia:* Use la fórmula del Ejemplo 5.)

(b) Determine los tiempos para los que $y = 0$; es decir, encuentre cuándo pasa la masa por la posición de equilibrio.

56. Refiérase al Ejercicio 55. Si $y_0 = 1$ y $\omega = 2$, encuentre las velocidades iniciales que resulten en una amplitud de 4 pie.

En muchas aplicaciones en la ingeniería eléctrica es necesario expresar la suma de varias señales sinusoidales (por ejemplo, señales de voltaje o de ondas de radio) de la misma frecuencia, en la forma compacta $y = A \cos(Bt - C)$. Exprese cada una de las señales siguientes en esta forma. (Véase el Ejemplo 5.)

57. $y = 50 \operatorname{sen} 60\pi t + 40 \cos 60\pi t$

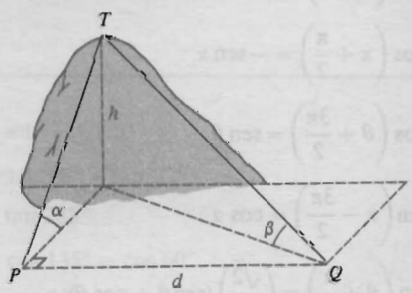
58. $y = 10 \operatorname{sen}(120\pi t - \frac{1}{2}\pi) + 5 \operatorname{sen} 120\pi t$

59. Si se observa la cima de una montaña desde un punto P que se encuentra hacia el sur de ella, el ángulo de elevación es α (véase la figura). Si se mira desde un punto Q que está a d millas al este de P, el ángulo de elevación es β. (a) Muestre que la altura h de la montaña está dada por

$$h = \frac{d \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\sqrt{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}}.$$

(b) Si $\alpha = 30°$, $\beta = 20°$ y $d = 10$ millas, aproxime h a la centésima de milla más cercana.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 59



7.4 Fórmulas para múltiplos de un ángulo

En esta sección se consideran las **fórmulas del múltiplo de un ángulo**. Veremos en particular las llamadas **fórmulas del ángulo doble**, en donde aparece la expresión $2u$.

FÓRMULAS PARA ÁNGULO DOBLE

$$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$$
$$\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 u = 2 \cos^2 u - 1$$

$$\tan 2u = \frac{2\tan u}{1 - \tan^2 u}$$

DEMOSTRACIÓN Se pueden demostrar estas identidades haciendo $u = v$ en las fórmulas para la suma. Por ejemplo, la fórmula de $\operatorname{sen}(u + v)$ da

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2u &= \operatorname{sen}(u + u)\\ &= \operatorname{sen} u \cos u + \cos u \operatorname{sen} u\\ &= 2 \operatorname{sen} u \cos u.\end{aligned}$$

De manera análoga, mediante la fórmula de $\cos(u + v)$ se obtiene

$$\begin{aligned}\cos 2u &= \cos(u + u)\\ &= \cos u \cos u - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} u\\ &= \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u.\end{aligned}$$

Las otras dos expresiones de $\cos 2u$ se pueden obtener a partir de la identidad fundamental $\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$. Así,

$$\begin{aligned}\cos 2u &= \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u\\ &= (1 - \operatorname{sen}^2 u) - \operatorname{sen}^2 u\\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 u.\end{aligned}$$

Similarmente, si reemplazamos $\cos^2 u$ por $\operatorname{sen}^2 u$, obtenemos

$$\begin{aligned}\cos 2u &= \cos^2 u - (1 - \cos^2 u)\\ &= 2\cos^2 u - 1.\end{aligned}$$

Haciendo $u = v$ en la fórmula de $\tan(u + v)$ llegamos a la expresión de $\tan 2u$. □

EJEMPLO 1 Si $\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{4}{5}$ y α está en el primer cuadrante, determinar $\operatorname{sen} 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$.

SOLUCIÓN Igual que en el Ejemplo 3 de la sección anterior, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Sustituyendo en las fórmulas del ángulo doble, obtenemos

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = 2\left(\tfrac{4}{5}\right)\left(\tfrac{3}{5}\right) = \tfrac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \tfrac{9}{25} - \tfrac{16}{25} = -\tfrac{7}{25}.$$ ■

EJEMPLO 2 Expresar $\cos 3\theta$ en términos de $\cos\theta$.

SOLUCIÓN

$$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta)$$

$$
\begin{aligned}
&= \cos 2\theta \cos\theta - \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}\theta \\
&= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - (2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\operatorname{sen}\theta \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta(1 - \cos^2\theta) \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.
\end{aligned}
$$

■

Las tres identidades siguientes son de gran utilidad para simplificar ciertas expresiones que contienen potencias de funciones trigonométricas.

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}, \qquad \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2},$$

$$\tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}.$$

Las dos primeras identidades se pueden verificar despejando $\operatorname{sen}^2 u$ y $\cos^2 u$ en las ecuaciones

$$\cos 2u = 1 - 2\operatorname{sen}^2 u \quad \text{y} \quad \cos 2u = 2\cos^2 u - 1$$

respectivamente. Sabiendo que $\tan^2 u = \operatorname{sen}^2 u/\cos^2 u$, se obtiene la tercera identidad a partir de las dos primeras.

EJEMPLO 3 Verificar la identidad $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$.

SOLUCIÓN Las identidades anteriores para $\operatorname{sen}^2 u$ y $\cos^2 u$ con $u = x$, dan

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) \\
&= \tfrac{1}{4}(1 - \cos^2 2x) \\
&= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x.
\end{aligned}
$$

Por último, si empleamos la fórmula $\operatorname{sen}^2 u = (1 - \cos 2u)/2$ con $u = 2x$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x &= \frac{1}{4}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) \\
&= \tfrac{1}{8}(1 - \cos 4x).
\end{aligned}
$$

Otro método consiste en emplear la identidad $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$; se obtiene así:

$$\operatorname{sen} x \cos x = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x.$$

Elevando ambos lados al cuadrado, tenemos

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x.$$

La demostración prosigue ahora como la anterior.

EJEMPLO 4 Expresar $\cos^4 t$ en términos de valores de $\cos t$ (con exponente 1).

SOLUCIÓN Se inicia con los siguientes pasos:

$$\cos^4 t = (\cos^2 t)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t).$$

Utilizando luego la fórmula $\cos^2 u = (1 + \cos 2u)/2$ con $u = 2t$,

$$\cos^4 t = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2}\right).$$

Esto se simplifica

$$\cos^4 t = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t.$$

Si reemplazamos u por $v/2$ en las tres fórmulas $\operatorname{sen}^2 u$, $\cos^2 u$ y $\tan^2 u$, tenemos

$$\operatorname{sen}^2 \frac{v}{2} = \frac{1 - \cos v}{2}, \qquad \cos^2 \frac{v}{2} = \frac{1 + \cos v}{2}, \qquad \tan^2 \frac{v}{2} = \frac{1 - \cos v}{1 + \cos v}.$$

Tomando la raíz cuadrada de cada una de las ecuaciones anteriores y siendo $\sqrt{a^2} = |a|$, para todo número real a, obtenemos las siguientes identidades que se llaman **fórmulas para la mitad de un ángulo**, debido a que aparece la expresión $v/2$.

FÓRMULAS PARA LA MITAD DE UN ÁNGULO (MEDIO ÁNGULO)

$$\left|\operatorname{sen}\frac{v}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}}, \quad \left|\cos\frac{v}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos v}{2}},$$

$$\left|\tan\frac{v}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos v}{1 + \cos v}}.$$

Se pueden omitir las barras de valor absoluto si se tiene más información con respecto a $v/2$. Por ejemplo, si el ángulo $v/2$ está en el cuadrante I o en el II, entonces $\operatorname{sen} v/2$ es positivo y se puede escribir

$$\operatorname{sen}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}}.$$

Sin embargo, si $v/2$ es un ángulo en los cuadrantes III o IV, entonces

$$\operatorname{sen}\frac{v}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos v}{2}}.$$

Esto es semejante para las otras fórmulas.

La función tan $v/2$ puede tomar otra forma: si multiplicamos por $1 - \cos v$ el numerador y el denominador de la tercera fórmula del ángulo mitad, obtenemos

$$\left|\tan\frac{v}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos v}{1+\cos v}\cdot\frac{1-\cos v}{1-\cos v}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\cos v)^2}{\operatorname{sen}^2 v}}$$

$$= \frac{1-\cos v}{|\operatorname{sen} v|}.$$

No es necesario poner las barras de valor absoluto en el numerador, ya que la expresión $1 - \cos v$ nunca es negativa. Se puede demostrar que tan $v/2$ y sen v siempre tienen el mismo signo. Por ejemplo, si $0 < v < \pi$, entonces $0 < v/2 < \pi/2$ y, por lo tanto, sen v y tan $v/2$ son negativos. Estas observaciones se pueden generalizar para todos los valores de v en los que tienen sentido las expresiones tan $v/2$ y $(1 - \cos v)/|\operatorname{sen} v|$. Esto da dos nuevas identidades: si multiplicamos por $1 + \cos v$ numerador y denominador del radicando de la tercera fórmula del ángulo mitad, obtenemos la segunda identidad para tan $(v/2)$.

FÓRMULAS DEL MEDIO ÁNGULO PARA LA TANGENTE

$$\tan\frac{v}{2} = \frac{1-\cos v}{\operatorname{sen} v}, \qquad \tan\frac{v}{2} = \frac{\operatorname{sen} v}{1+\cos v}.$$

EJEMPLO 5 Obtener los valores exactos de sen 22.5° y de cos 22.5°.

SOLUCIÓN Sabiendo que 22.5° está en el primer cuadrante, la fórmula para sen $(v/2)$ da

$$\operatorname{sen} 22.5^\circ = \operatorname{sen}\frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}$$

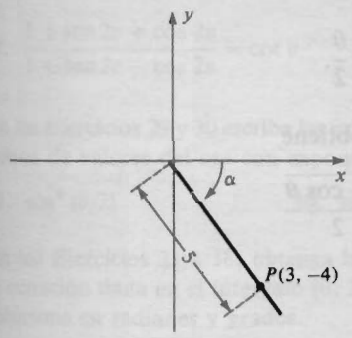
$$= \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 22.5^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

■

FIGURA 7.3



EJEMPLO 6 Siendo $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$, con α en el cuarto cuadrante, calcule $\tan(\alpha/2)$.

SOLUCIÓN Tomando el punto $(3, -4)$ en la recta que determina α, como se ilustra en la Figura 7.3, tenemos $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{4}{5}$ y $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Aplicando la fórmula del medio ángulo, tenemos

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 7 Obtener las soluciones, en el intervalo $[0, 2\pi)$, de la ecuación $\cos 2x + \cos x = 0$. Expresar las soluciones en radianes y en grados.

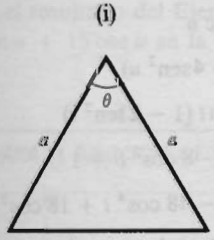
SOLUCIÓN La fórmula del ángulo doble permite escribir la ecuación dada en términos de $\cos x$; se resuelve después por factorización:

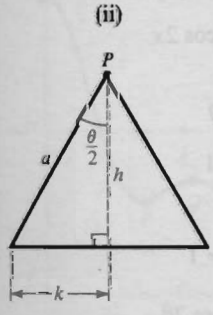
$$\cos 2x + \cos x = 0$$
$$(2\cos^2 x - 1) + \cos x = 0$$
$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$
$$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

Igualando a cero cada factor, obtenemos

$$\cos x = \tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad \cos x = -1.$$

FIGURA 7.4





Las soluciones en $[0, 2\pi)$ de las dos últimas expresiones (y, por consiguiente, de la ecuación dada) son

$$\frac{\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{3}, \quad \text{y} \quad \pi.$$

que en grados equivalen a

$$60°, \quad 300°, \quad \text{y} \quad 180°. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 8 Suponga que un triángulo isósceles tiene dos lados iguales de longitud a y que el ángulo entre ellos es θ (véase la Figura 7.4(i)). Exprese el área A del triángulo en términos de a y θ.

SOLUCIÓN En la Figura 7.4(ii) puede verse que la altura desde el punto P biseca a θ y que $A = hk$. Con respecto al triángulo rectángulo de la figura,

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{k}{a} \quad \text{y} \quad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{h}{a}.$$

Por lo tanto, $k = a \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ y $h = a\cos\frac{\theta}{2}$,

y $$A = hk = a^2 \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}.$$

Usando las fórmulas para la mitad del ángulo se obtiene

$$\begin{aligned} A &= a^2\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \\ &= a^2\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{4}} \\ &= a^2\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{4}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $A = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{sen}\theta$. ■

Ejercicios 7.4

En los Ejercicios 1 a 4, encuentre los valores exactos de sen 2θ, cos 2θ y tan 2θ, sujetos a las condiciones dadas.

1. $\cos\theta = \frac{3}{5}$ y θ agudo
2. $\cot\theta = \frac{4}{3}$ y $180° < \theta < 270°$
3. $\sec\theta = -3$ y $90° < \theta < 180°$
4. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{4}{5}$ y $270° < \theta < 360°$

En los Ejercicios 5 a 8, halle los valores exactos de sen $\theta/2$, cos $\theta/2$ y tan $\theta/2$, sujetos a las condiciones dadas.

5. $\sec\theta = \frac{5}{4}$ y θ agudo
6. $\csc\theta = -\frac{5}{3}$ y $-90° < \theta < 0°$
7. $\tan\theta = 1$ y $-180° < \theta < -90°$
8. $\sec\theta = -4$ y $180° < \theta < 270°$

En los Ejercicios 9 y 10, use las fórmulas del medio ángulo para determinar los valores exactos de los números dados.

9. (a) cos 67°30′
   (b) sen 15°
   (c) tan $(3\pi/8)$
10. (a) cos 165°
    (b) sen 157°30′
    (c) tan $(\pi/8)$

Verifique las identidades de los Ejercicios 11 a 28.

11. $\operatorname{sen} 10\theta = 2\operatorname{sen} 5\theta\cos 5\theta$
12. $\cos^2 3x - \operatorname{sen}^2 3x = \cos 6x$
13. $4\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{sen} x$
14. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = 4 - 4\operatorname{sen}^2\alpha$
15. $(\operatorname{sen} t + \cos t)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2t$
16. $\csc 2u = \frac{1}{2}\sec u \csc u$
17. $\operatorname{sen} 3u = \operatorname{sen} u\,(3 - 4\operatorname{sen}^2 u)$
18. $\operatorname{sen} 4t = 4\cos t \operatorname{sen} t\,(1 - 2\operatorname{sen}^2 t)$
19. $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$
20. $\cos 6t = 32\cos^6 t - 48\cos^4 t + 18\cos^2 t - 1$
21. $\operatorname{sen}^4 t = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t$
22. $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos 2x$
23. $\sec 2\theta = \dfrac{\sec^2\theta}{2 - \sec^2\theta}$
24. $\cot 2u = \dfrac{\cot^2 u - 1}{2\cot u}$
25. $2\operatorname{sen}^2 2t + \cos 4t = 1$
26. $\tan\theta + \cot\theta = 2\csc 2\theta$

27. $\tan 3u = \dfrac{(3 - \tan^2 u)\tan u}{1 - 3\tan^2 u}$

28. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} 2v + \cos 2v}{1 + \operatorname{sen} 2v - \cos 2v} = \cot v$

En los Ejercicios 29 y 30 escriba las expresiones en términos de valores del cos con exponente 1.

29. $\cos^4 (\theta/2)$ **30.** $\operatorname{sen}^4 2x$

En los Ejercicios 31 a 38, obtenga las soluciones de la ecuación dada en el intervalo $[0, 2\pi)$. Exprese las solucions en radianes y grados.

31. $\operatorname{sen} 2t + \operatorname{sen} t = 0$

32. $\cos t - \operatorname{sen} 2t = 0$

33. $\cos u + \cos 2u = 0$

34. $\cos 2\theta - \tan \theta = 1$

35. $\tan 2x = \tan x$

36. $\tan 2t - 2\cos t = 0$

37. $\operatorname{sen} \frac{1}{2}u + \cos u = 1$

38. $2 - \cos^2 x = 4\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x$

39. Si $a > 0$, $b > 0$ y $0 < u < \pi/2$, pruebe que

$$a \operatorname{sen} u + b \cos u = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen} (u + v)$$

en donde $0 < v < \pi/2$, $\operatorname{sen} v = b/\sqrt{a^2 + b^2}$, y $\cos v = a/\sqrt{a^2 + b^2}$.

40. Use el resultado del Ejercicio 39 para expresar $8 \operatorname{sen} u + 15 \cos u$ en la forma $c \operatorname{sen} (u + v)$.

41. En la figura se muestra una gráfica generada por computadora de la ecuación $y = \cos 2x + 2\cos x$ para $0 \le x \le 2\pi$.

(a) Aproxime las intercepciones x a dos cifras decimales.

(b) Usando el cálculo puede demostrarse que los puntos P, Q y R de la gráfica son soluciones de la ecuación $-2 \operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} x = 0$. Halle las coordenadas de P, Q y R.

42. En la figura se muestra una gráfica generada por computadora de la ecuación $y = \cos x - \operatorname{sen} 2x$ para $-2\pi \le x \le 2\pi$.

(a) Determine las intercepciones x.

(b) Usando el cálculo puede demostrarse que los ocho puntos de inflexión de la gráfica son soluciones de la ecuación expresada como $-\operatorname{sen} x - 2\cos 2x = 0$. Aproxime las coordenadas x de estos puntos a dos cifras decimales.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 41

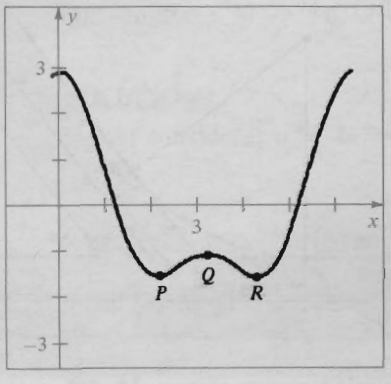


FIGURA PARA EL EJERCICIO 42

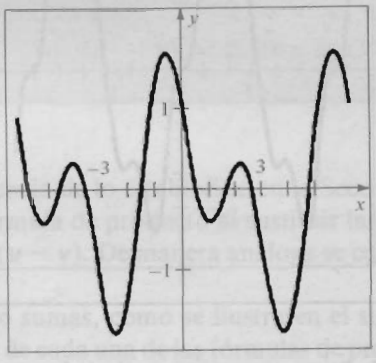
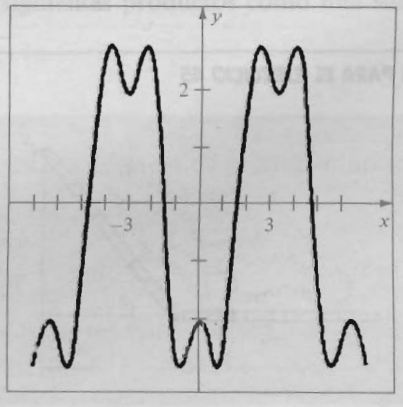


FIGURA PARA EL EJERCICIO 43



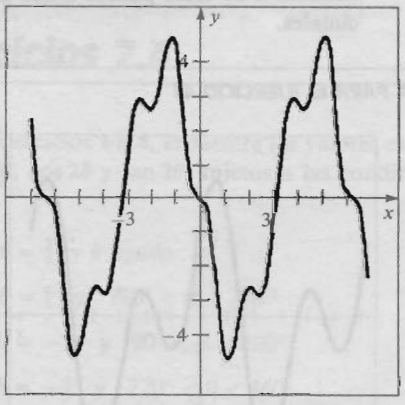
43. En la figura se muestra una gráfica generada por computadora de $y = \cos 3x - 3\cos x$ para $-2\pi \le x \le 2\pi$.

(a) Encuentre las intercepciones x. (*Sugerencia:* Use la fórmula para cos $3x$ dada en el Ejemplo 2.)

(b) Los trece puntos de inflexión de la gráfica son soluciones de la ecuación $-3 \operatorname{sen} 3x + 3 \operatorname{sen} x = 0$. Calcule las coordenadas x de estos puntos. (*Sugerencia:* Aplique la fórmula para sen $3x$ del Ejercicio 17.)

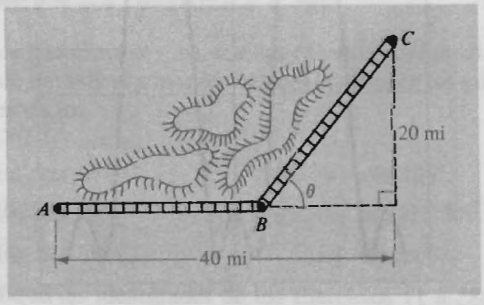
44. En la figura se muestra una gráfica generada por medio de una computadora de $y = \operatorname{sen} 4x - 4 \operatorname{sen} x$ para $-2\pi \le x \le 2\pi$. Determine las intercepciones x. (*Sugerencia:* Use el Ejercicio 18.)

FIGURA PARA EL EJERCICIO 44



45. En la figura se muestra una vía de ferrocarril desde la ciudad A a la ciudad C, que se desvía desde B hacia C a un ángulo θ.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 45

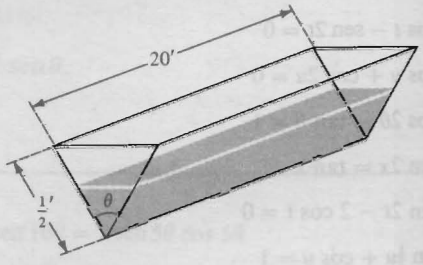


(a) Muestre que la distancia total de A a C está dada por $d = 20 \tan(\theta/2) + 40$.

(b) Debido a que hay montañas entre A y C, el punto B debe estar cuando menos a 20 millas (mi) de A. ¿Existe alguna ruta que evite las montañas y que mida exactamente 50 mi?

46. En la figura se muestra el diseño para una artesa para agua de lluvia. Exprese el volumen V como función de θ y después aproxime el valor de θ que se requiere para que el volumen sea de 2 pie^3. (*Sugerencia:* Véase el Ejemplo 8.)

FIGURA PARA EL EJERCICIO 46

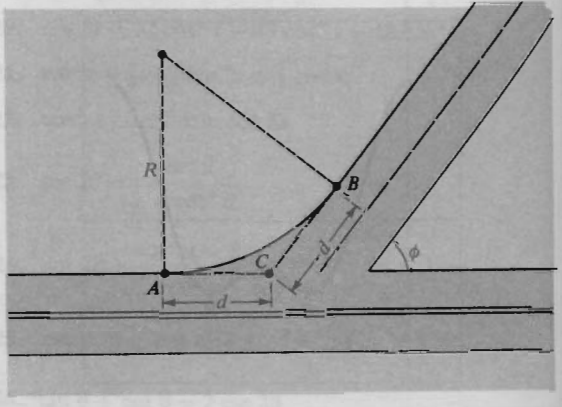


47. Si se dispara un proyectil desde el nivel del piso con una velocidad inicial de v pies por segundo y a un ángulo de θ grados con la horizontal, el alcance R del proyectil está dado por

$$R = \frac{v^2}{16} \operatorname{sen}\theta \cos\theta.$$

Si $v = 80$ pie, aproxime el (los) ángulo(s) para los cuales el alcance es de 150 pie.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 48



48. Un ingeniero de caminos está diseñando la curva de unión del borde de acera en la intersección de dos vías que se cruzan o encuentran a un ángulo ϕ (véase la figura). La curva que unirá los puntos A y B debe construirse usando una circunferencia que sea tangente a los bordes rectos en dichos puntos.
    (a) Muestre que la relación entre el radio R del círculo y la distancia d en la figura está dada por $d = R \tan(\phi/2)$.
    (b) Si $\phi = 45°$ y $d = 20$ pie, aproxime R y la longitud de la curva de unión o enlace.

7.5 Fórmulas de producto y factorización

Las siguientes identidades son útiles para cambiar la forma de ciertas expresiones trigonométricas.

FÓRMULAS DE PRODUCTO

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v) &= 2\operatorname{sen} u \cos v \\
\operatorname{sen}(u+v) - \operatorname{sen}(u-v) &= 2\cos u \operatorname{sen} v \\
\cos(u+v) + \cos(u-v) &= 2\cos u \cos v \\
\cos(u-v) - \cos(u+v) &= 2\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v
\end{aligned}$$

Cada una de estas identidades es una consecuencia de lo establecido en la Sección 7.3. Por ejemplo, podemos verificar la primera fórmula de producto al sustituir las identidades que obtuvimos para $\operatorname{sen}(u+v)$ y $\operatorname{sen}(u-v)$. De manera análoga se comprueban las otras fórmulas de productos.

Podemos expresar ciertos productos como sumas, como se ilustra en el siguiente ejemplo al usar las expresiones del lado derecho de cada una de las fórmulas de producto.

EJEMPLO 1 Expresar cada uno de los siguientes productos como una suma.

(a) $\operatorname{sen} 4\theta \cos 3\theta$ (b) $\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x$

SOLUCIÓN

(a) Al considerar $u = 4\theta$ y $v = 3\theta$ en la primera fórmula de producto, obtenemos

$$2\operatorname{sen} 4\theta \cos 3\theta = \operatorname{sen}(4\theta + 3\theta) + \operatorname{sen}(4\theta - 3\theta)$$

o bien

$$\operatorname{sen} 4\theta \cos 3\theta = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 7\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta.$$

También se puede obtener esta misma expresión mediante la segunda fórmula de producto.

(b) Al usar la cuarta fórmula de producto con $u = 3x$ y $v = x$, obtenemos

$$2 \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x = \cos(3x - x) - \cos(3x + x)$$

o bien $$\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x = \tfrac{1}{2}\cos 2x - \tfrac{1}{2}\cos 4x.$$ ■

También podemos emplear las fórmulas de producto para expresar una suma como un producto. Con el objeto de contar con fórmulas más sencillas de aplicar, cambiaremos la notación de la siguiente manera. Si consideramos

$$u + v = a \quad \text{y} \quad u - v = b,$$

entonces $(u + v) + (u - v) = a + b$, de donde

$$u = \frac{a + b}{2}.$$

De manera análoga, a partir de $(u + v) - (u - v) = a - b$, obtenemos

$$v = \frac{a - b}{2}.$$

Las siguientes fórmulas son consecuencia de sustituir a $u + v$ y $u - v$ en los lados izquierdos de las fórmulas de producto, y a u y v en los lados derechos de las mismas.

FÓRMULAS DE FACTORIZACIÓN

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2}$$

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \cos \frac{a + b}{2} \operatorname{sen} \frac{a - b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2}$$

$$\cos b - \cos a = 2 \operatorname{sen} \frac{a + b}{2} \operatorname{sen} \frac{a - b}{2}$$

EJEMPLO 2 Expresar como producto $\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x$.

SOLUCIÓN Al considerar $a = 5x$ y $b = 3x$ en la segunda fórmula de factorización,

$$\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x = 2 \cos \frac{5x + 3x}{2} \operatorname{sen} \frac{5x - 3x}{2}$$

$$= 2 \cos 4x \operatorname{sen} x.$$ ■

EJEMPLO 3 Verificar la identidad

$$\frac{\operatorname{sen} 3t + \operatorname{sen} 5t}{\cos 3t - \cos 5t} = \cot t.$$

SOLUCIÓN Al aplicar la primera y cuarta fórmulas de factorización,

$$\frac{\operatorname{sen} 3t + \operatorname{sen} 5t}{\cos 3t - \cos 5t} = \frac{2 \operatorname{sen} \dfrac{3t + 5t}{2} \cos \dfrac{3t - 5t}{2}}{2 \operatorname{sen} \dfrac{5t + 3t}{2} \operatorname{sen} \dfrac{5t - 3t}{2}}$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} 4t \cos(-t)}{2 \operatorname{sen} 4t \operatorname{sen} t} = \frac{\cos(-t)}{\operatorname{sen} t}$$

$$= \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} = \cot t. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Hallar las soluciones de la ecuación

$$\cos t - \operatorname{sen} 2t - \cos 3t = 0.$$

SOLUCIÓN Con la cuarta fórmula de factorización,

$$\cos t - \cos 3t = 2 \operatorname{sen} \frac{3t + t}{2} \operatorname{sen} \frac{3t - t}{2}$$

$$= 2 \operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} t.$$

Como consecuencia, la ecuación es equivalente a

$$2 \operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t = 0$$

o bien

$$\operatorname{sen} 2t \,(2 \operatorname{sen} t - 1) = 0.$$

De ahí que las soluciones de la ecuación dada son las soluciones de

$$\operatorname{sen} 2t = 0 \quad \text{o bien} \quad \operatorname{sen} t = \tfrac{1}{2}.$$

Las soluciones de la primera de estas ecuaciones son

$$2t = n\pi \quad \text{o bien} \quad t = \frac{\pi}{2} n$$

en donde n es cualquier número entero. Los valores de t que satisfacen a la segunda de ellas son

$$t = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{o bien} \quad t = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$$

en donde n es cualquier número entero. $\blacksquare$

Las fórmulas de suma también pueden ser empleadas para deducir las llamadas **fórmulas de reducción**. Se pueden usar estas fórmulas para escribir expresiones como

$$\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{y} \quad \cos\left(\theta + \frac{n\pi}{2}\right),$$

en donde n es cualquier entero, en términos de $\operatorname{sen}\theta$ o $\cos\theta$, exclusivamente. Para otras funciones trigonométricas se satisfacen fórmulas similares. En vez de deducir las fórmulas generales de reducción, en el siguiente ejemplo ilustraremos varios casos especiales.

EJEMPLO 5 Expresar $\operatorname{sen}(\theta - 3\pi/2)$ y $\cos(\theta + \pi)$ en términos de una función de θ.

SOLUCIÓN Con las fórmulas de suma,

$$\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\theta \cos\frac{3\pi}{2} - \cos\theta \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$$
$$= \operatorname{sen}\theta \cdot (0) - \cos\theta \cdot (-1) = \cos\theta$$

$$\cos(\theta + \pi) = \cos\theta\cos\pi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\pi$$
$$= \cos\theta \cdot (-1) - \operatorname{sen}\theta \cdot (0) = -\cos\theta$$ ■

En este capítulo hemos obtenido varias identidades de gran importancia. Las hemos listado en el interior de la cubierta, con el objeto de tenerlas disponibles para su referencia.

Ejercicios 7.5

Exprese los productos de los Ejercicios 1 a 8 como suma o diferencia.

1. $2\operatorname{sen}9\theta\cos3\theta$
2. $2\cos5\theta\operatorname{sen}5\theta$
3. $\operatorname{sen}7t\operatorname{sen}3t$
4. $\operatorname{sen}(-4x)\cos8x$
5. $\cos6u\cos(-4u)$
6. $\operatorname{sen}4t\operatorname{sen}6t$
7. $3\cos x\operatorname{sen}2x$
8. $5\cos u\operatorname{sen}5u$

Escriba como un producto las expresiones de los Ejercicios 9 a 16.

9. $\operatorname{sen}6\theta + \operatorname{sen}2\theta$
10. $\operatorname{sen}4\theta - \operatorname{sen}8\theta$
11. $\cos5x - \cos3x$
12. $\cos5t + \cos6t$
13. $\operatorname{sen}3t - \operatorname{sen}7t$
14. $\cos\theta - \cos5\theta$
15. $\cos x + \cos2x$
16. $\operatorname{sen}8t + \operatorname{sen}2t$

Verifique las identidades de los Ejercicios 17 a 24.

17. $\dfrac{\operatorname{sen}4t + \operatorname{sen}6t}{\cos4t - \cos6t} = \cot t$

18. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}3\theta}{\cos\theta + \cos3\theta} = \tan2\theta$

19. $\dfrac{\operatorname{sen}u + \operatorname{sen}v}{\cos u + \cos v} = \tan\dfrac{u+v}{2}$

20. $\dfrac{\operatorname{sen}u - \operatorname{sen}v}{\cos u - \cos v} = -\cot\dfrac{u+v}{2}$

21. $\dfrac{\operatorname{sen}u - \operatorname{sen}v}{\operatorname{sen}u + \operatorname{sen}v} = \dfrac{\tan\frac{1}{2}(u-v)}{\tan\frac{1}{2}(u+v)}$

22. $\dfrac{\cos u - \cos v}{\cos u + \cos v} = \tan\frac{1}{2}(u+v)\tan\frac{1}{2}(u-v)$

23. $\operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}4x + \operatorname{sen}6x = 4\cos x\cos2x\operatorname{sen}3x$

24. $\dfrac{\cos t + \cos4t + \cos7t}{\operatorname{sen}t + \operatorname{sen}4t + \operatorname{sen}7t} = \cot4t$

25. Exprese $(\operatorname{sen}ax)(\cos bx)$ como una suma.

26. Exprese $(\cos mu)(\cos nu)$ como una suma.

Encuentre las soluciones de las ecuaciones dadas en los Ejercicios 27 a 30.

27. $\operatorname{sen}5t + \operatorname{sen}3t = 0$
28. $\operatorname{sen}t + \operatorname{sen}3t = \operatorname{sen}2t$
29. $\cos x = \cos3x$
30. $\cos4x - \cos3x = 0$

Mediante las fórmulas de suma, verifique las fórmulas de reducción dadas en los Ejercicios 31 a 36.

31. $\operatorname{sen}(\theta + \pi) = -\operatorname{sen}\theta$

32. $\operatorname{sen}\left(\theta + \dfrac{3\pi}{2}\right) = -\cos\theta$

33. $\cos\left(\theta - \dfrac{5\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\theta$

34. $\cos(\theta - 3\pi) = -\cos\theta$

35. $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

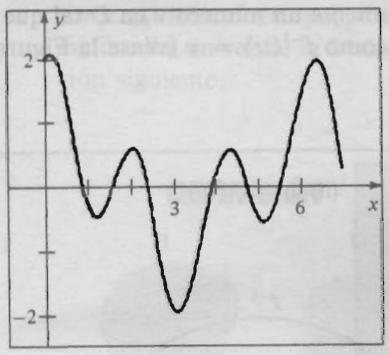
$\left(\textit{Sugerencia: } \tan(\pi - \theta) = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)}.\right)$

36. $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$

En las figuras se muestran gráficas generadas por computadora de las funciones definidas en los Ejercicios 37 y 38, para $0 \le x \le 2\pi$. En cada caso use una fórmula de factorización para determinar las intercepciones x.

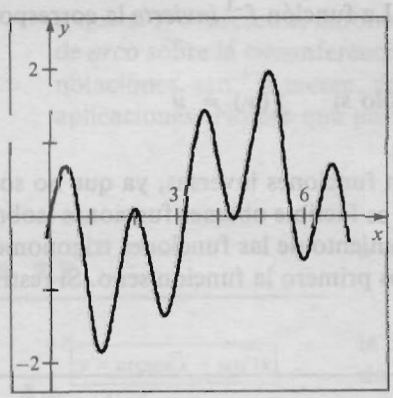
37. $f(x) = \cos x + \cos 3x$

FIGURA PARA EL EJERCICIO 37



38. $f(x) = \operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} x$

FIGURA PARA EL EJERCICIO 38



39. La gráfica de $y = \cos 3x - 3\cos x$ tiene 13 puntos de inflexión entre -2π y 2π. Usando cálculo puede demostrarse que las coordenadas x de estos puntos satisfacen la ecuación $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 0$. Encuentre estos puntos mediante una fórmula de factorización. (Véase el Ejercicio 43 de la Sección 7.4.)

40. Las coordenadas x de los puntos de inflexión de la gráfica de $y = \operatorname{sen} 4x - 4\operatorname{sen} x$ son soluciones de la ecuación $\cos 4x - \cos x = 0$. Use una fórmula de factorización para localizar los puntos de inflexión para $-2\pi \le x \le 2\pi$. (Véase el Ejercicio 44 de la Sección 7.4.)

41. La fórmula $f(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L)\cos(n\pi kt/L)$ aparece en el análisis matemático de una cuerda de violín en vibración. En ella L es la longitud de la cuerda. Exprese a f como la suma de dos funciones seno.

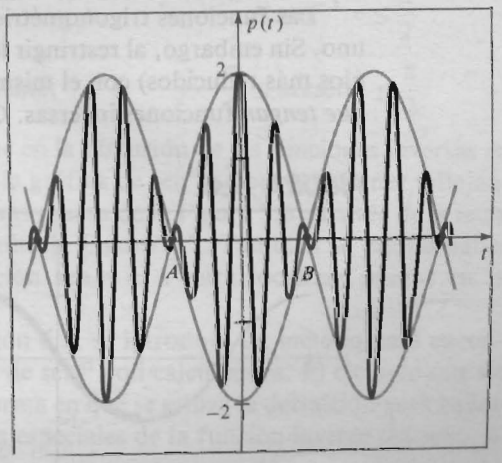
42. Si se les pega a dos diapasones con la misma fuerza y se les sostiene a la misma distancia del tímpano, la presión en la parte exterior de éste en el tiempo t se puede representar mediante $p(t) = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t$. Si ω_1 está cerca de ω_2, es decir, si los diapasones tienen casi la misma frecuencia, se escucha un tono que alterna entre la sonoridad y el silencio virtual. Este fenómeno da lugar a los *puntos resonantes* (o *batidos*).

(a) Use fórmulas de factorización para expresar a $p(t)$ como un producto.

(b) Muestre que $p(t)$ se puede considerar como una onda coseno con periodo aproximado de $2\pi/\omega_1$ y amplitud variable $A(t) = 2A\cos\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t$. ¿Cuál es la máxima amplitud?

(c) En la figura se muestra la gráfica de la ecuación $p(t) = \cos 4.5t + \cos 3.5t$. El silencio aproximado ocurre en los puntos A y B. En-

FIGURA PARA EL EJERCICIO 42



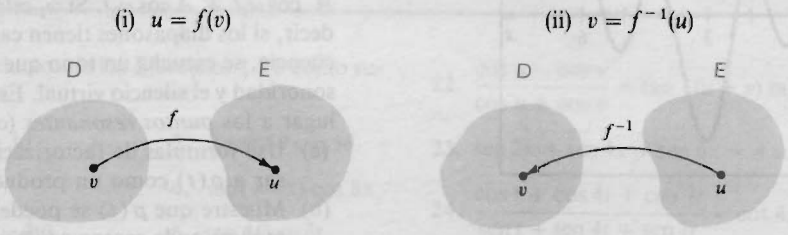
cuentre las coordenadas de estos puntos y determine cuán frecuentemente ocurre el silencio.

(d) Muestre que p tiene periodo 4π. Concluya que la amplitud máxima de 2 se presenta cada 4π unidades de tiempo.

7.6 Funciones trigonométricas inversas

En la Sección 3.7 definimos el concepto de función inversa. Recuérdese que si f es una función uno a uno con dominio D y contradominio E, entonces, como se ilustra en la Figura 7.5(i), para cada u en E hay exactamente un número v en D tal que $f(v) = u$. Definimos así a la función f^{-1} de E a D como $f^{-1}(u) = v$ (véase la Figura 7.5(ii).

FIGURA 7.5



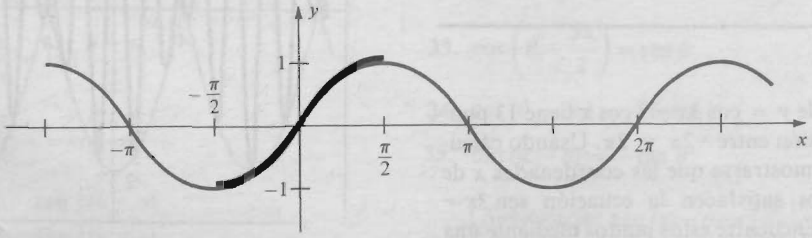
A f^{-1} la llamamos **función inversa** de f. La función f^{-1} *invierte* la correspondencia dada por f en el sentido de que

$$v = f^{-1}(u) \quad \text{si y sólo si} \quad f(v) = u$$

para todo u y v en E y D, respectivamente.

Las funciones trigonométricas no tienen funciones inversas, ya que no son uno a uno. Sin embargo, al restringir los dominios es factible obtener funciones (sobre dominios más reducidos) con el mismo comportamiento de las funciones trigonométricas *y que tengan* funciones inversas. Consideremos primero la función seno. Si restringimos

FIGURA 7.6



el dominio a $[-\pi/2, \pi/2]$, entonces, como lo ilustra la porción más gruesa de la curva de la Figura 7.6, se obtiene una función creciente que toma todos los valores de la función seno una y sólo una vez.

Esta nueva función, con dominio $[-\pi/2, \pi/2]$ y contradominio $[-1, 1]$ se denota algunas veces mediante Sen (con S mayúscula). La función inversa Sen^{-1} tiene como dominio a $[-1, 1]$ y como contradominio a $[-\pi/2, \pi/2]$ y se conoce como *función seno inverso*. Por definición,

$$v = \text{Sen}^{-1} u \quad \text{si y sólo si} \quad \text{Sen } v = u$$

para $-1 \leq u \leq 1$ y $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$. Puesto que las letras que se usan para las variables no son importantes, esto se puede replantear en términos de los símbolos usuales x y y. Al mismo tiempo, se seguirá la tradición y se usará el símbolo con letra inicial minúscula, en vez de la S mayúscula. De modo que se puede ahora establecer la definición siguiente.

DEFINICIÓN

La función seno inverso, denotada por sen^{-1}, se define como

$$y = \text{sen}^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad \text{sen } y = x$$

en donde $-1 \leq x \leq 1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$.

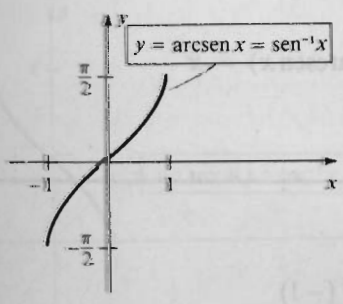
Comúnmente se utiliza también el término **función arco seno** para referirnos a sen^{-1}, y la notación de $\arcsen x$ en lugar de $\text{sen}^{-1} x$. La notación $\arcsen x$ se usa debido a que si $t = \arcsen x$, entonces $\text{sen } t = x$ y t se puede interpretar como una longitud de *arco* sobre la circunferencia del círculo unitario U. En el texto emplearemos las dos notaciones, sen^{-1} y arcsen, puesto que ambas son de uso común en matemáticas y sus aplicaciones. Nótese que por definición

$$-\frac{\pi}{2} \leq \text{sen}^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$$

o equivalentemente,

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsen x \leq \frac{\pi}{2}.$$

FIGURA 7.7



Al igual que en la discusión de las funciones inversas en la Sección 3.7, la gráfica de sen^{-1} se puede obtener reflejando la porción más gruesa de la Figura 7.6 a través de la recta $y = x$. Así resulta la Figura 7.7. También se podría haber usado la ecuación $\text{sen } y = x$ para localizar puntos en la gráfica.

En la Sección 6.2, se introdujo un método para encontrar los valores de sen^{-1} con calculadora. El ejemplo que sigue ilustra la forma en que se utiliza la definición para hallar diversos valores especiales de la función inversa del seno, o seno inverso.

EJEMPLO 1 Calcular (a) $\text{sen}^{-1}(\sqrt{2}/2)$; (b) $\text{arcsen}(-\frac{1}{2})$; (c) $\text{sen}^{-1} 1$.

SOLUCIÓN

(a) Por definición

$$y = \text{sen}^{-1}(\sqrt{2}/2) \text{ si y sólo si } \quad \text{sen } y = \sqrt{2}/2$$

para $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. El único número y en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ que satisface $\text{sen } y = \sqrt{2}/2$ es $y = \pi/4$. Por lo tanto

$$\text{sen}^{-1}(\sqrt{2}/2) = \pi/4.$$

Nótese que es *esencial* elegir a y en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Un número como $3\pi/4$ no es correcto, aún cuando $\text{sen}(3\pi/4) = \sqrt{2}/2$

(b) Por definición,

$$y = \text{arcsen}(-\tfrac{1}{2}) \quad \text{si y sólo si} \quad \text{sen } y = -\tfrac{1}{2}$$

siempre y cuando y esté en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Se deduce que $y = -\pi/6$. Por consiguiente,

$$\text{arcsen}(-\tfrac{1}{2}) = -\pi/6.$$

(c) Como en las partes (a) y (b),

$$y = \text{sen}^{-1} 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \text{sen } y = 1$$

para $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Por consiguiente, $y = \pi/2$, y

$$\text{sen}^{-1} 1 = \pi/2. \qquad \blacksquare$$

Las relaciones $f^{-1}(f(y)) = y$ y $f(f^{-1}(x)) = x$ que valen para cualquier función inversa f^{-1} (véase la Sección 3.7) dan las siguientes identidades.

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen } y) = y \quad \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x \quad \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Éstas también pueden escribirse en la forma

$$\text{arcsen}(\text{sen } y) = y \quad \text{y} \quad \text{sen}(\text{arcsen } x) = x$$

siempre que y y x se restrinjan adecuadamente.

EJEMPLO 2 Determinar $\text{sen}^{-1}(\tan 3\pi/4)$.

SOLUCIÓN Sea

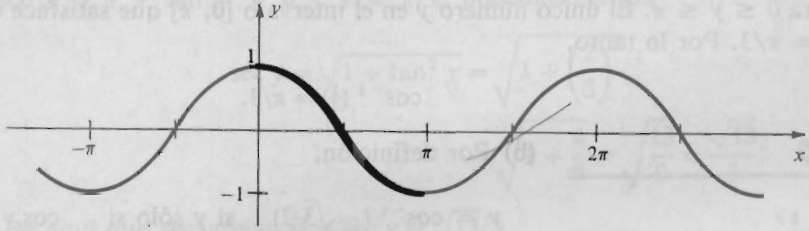
$$y = \text{sen}^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = \text{sen}^{-1}(-1)$$

entonces, por definición, $\operatorname{sen} y = -1$.

Como y debe elegirse en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ se deduce que $y = -\pi/2$. ■

También se pueden determinar las funciones inversas de las otras funciones trigonométricas. El procedimiento para su obtención, consiste en elegir un subconjunto adecuado del dominio, de tal forma que la función sea uno a uno. Si se restringe el dominio de la función coseno al intervalo $[0, \pi]$, como lo ilustra el trazo grueso en la Figura 7.8, se obtiene una función decreciente que forma todos los valores del coseno una y sólo una vez.

FIGURA 7.8



Esta nueva función tiene una inversa denominada *función coseno inverso*, que se define de la siguiente manera:

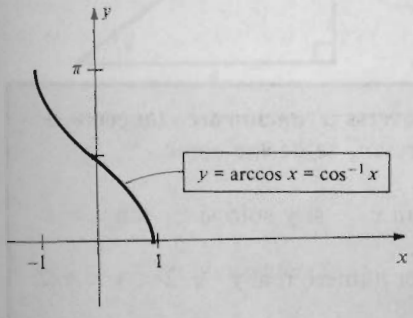
DEFINICIÓN

La **función coseno inverso**, denotada por $\cos^{-1}$, se define como

$$y = \cos^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad \cos y = x$$

en donde $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq \pi$.

FIGURA 7.9



La denominación **función arco coseno** se usa también para la función inversa del coseno, y se emplea la notación $\arccos x$ en vez de $\cos^{-1} x$. Usando las propiedades generales de las funciones inversas se obtiene.

$$\cos(\cos^{-1} x) = \cos(\arccos x) = x$$

y

$$\cos^{-1}(\cos y) = \arccos(\cos y) = y$$

para $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq \pi$.

La gráfica de la función coseno inverso se puede obtener reflejando la porción gruesa de la Figura 7.8 a través de la

recta $y = x$. Se obtiene así el trazo de la Figura 7.9. También se podría haber empleado la ecuación $\cos y = x$ para encontrar los puntos sobre la gráfica.

En el siguiente ejemplo se determinarán varios valores de la función coseno inverso mediante la definición. Se pueden encontrar otros valores mediante una calculadora o una tabla.

EJEMPLO 3 Determinar (a) $\cos^{-1}(\frac{1}{2})$; (b) $\cos^{-1}(-\sqrt{3}/2)$; (c) $\arccos 0$.

SOLUCIÓN

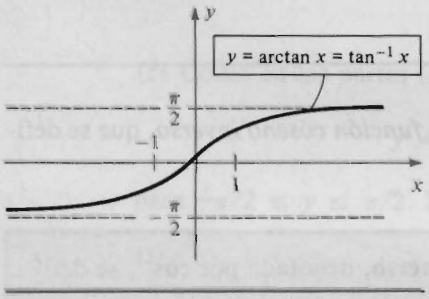
(a) Por definición

$$y = \cos^{-1}(\tfrac{1}{2}) \quad \text{si y sólo si} \quad \cos y = \tfrac{1}{2}$$

para $0 \le y \le \pi$. El único número y en el intervalo $[0, \pi]$ que satisface $\cos y = \frac{1}{2}$ es $y = \pi/3$. Por lo tanto,

$$\cos^{-1}(\tfrac{1}{2}) = \pi/3.$$

FIGURA 7.10



(b) Por definición,

$$y = \cos^{-1}(-\sqrt{3}/2) \quad \text{si y sólo si} \quad \cos y = -\sqrt{3}/2$$

para $0 \le y \le \pi$. El ángulo de referencia para y es $\pi/6$. Puesto que se debe elegir y en el intervalo $[0, \pi]$ se toma $y = \pi - (\pi/6) = 5\pi/6$. Entonces

$$\cos^{-1}(-\sqrt{3}/2) = 5\pi/6.$$

(c) Como en las partes (a) y (b),

$$y = \arccos 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \cos y = 0$$

para $0 \le y \le \pi$. Por consiguiente, $y = \pi/2$ y

$$\arccos 0 = \pi/2. \qquad \blacksquare$$

Se obtiene una función uno a uno si restringimos al dominio de la función tangente en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$. Por consiguiente, podemos introducir la siguiente definición.

DEFINICIÓN

La **función tangente inversa** o **función arco tangente**, denotada por $\tan^{-1}$ o arctan, se define como

$$y = \tan^{-1} x = \arctan x \quad \text{si y sólo si} \quad \tan y = x$$

en donde x es cualquier número real y $-\pi/2 < y < \pi/2$.

Nótese que el dominio de la función arco tangente es $\mathbb{R}$ y su contradominio es el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$. En el Ejercicio 42 se le pedirá al lector verificar que la Figura 7.10 corresponde a la gráfica de la función inversa de la tangente.

Se puede llevar a cabo un procedimiento análogo para las otras funciones trigonométricas. No hay una aceptación general acerca de los dominios de las funciones inversas de la secante, cosecante o cotangente. En los Ejercicios 39 a 41 se indican algunos de los dominios típicos.

EJEMPLO 4 Obtener el valor de $\sec(\arctan \frac{2}{3})$ sin hacer uso de tablas ni calculadora.

SOLUCIÓN Si $y = \arctan \frac{2}{3}$, entonces $\tan y = \frac{2}{3}$. Se desea evaluar $\sec y$. Como $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$ y $0 < y < \pi/2$, podemos escribir

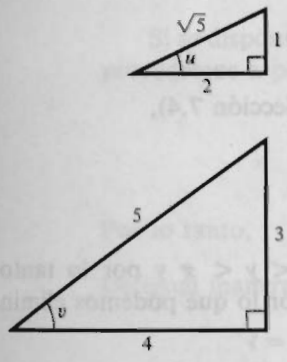
$$\sec y = \sqrt{1 + \tan^2 y} = \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{13}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

De aquí que $\sec(\arctan \frac{2}{3}) = \sec y = \sqrt{13}/3$. ■

Los siguientes tres ejemplos son una ilustración de los pasos algebraicos que se pueden llevar a cabo con las funciones trigonométricas inversas.

FIGURA 7.11



EJEMPLO 5 Evaluar $\operatorname{sen}(\arctan \frac{1}{2} - \arccos \frac{4}{5})$.

SOLUCIÓN Si

$$u = \arctan \tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad v = \arccos \tfrac{4}{5},$$

entonces

$$\tan u = \tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad \cos v = \tfrac{4}{5}.$$

Deseamos encontrar $\operatorname{sen}(u - v)$. A u y a v las debemos considerar como ángulos agudos positivos en radianes, puesto que están en el intervalo $[0, \pi/2]$, y se pueden obtener otros valores de éstas mediante los triángulos rectángulos de la Figura 7.11. Esto conduce a

$$\operatorname{sen} u = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \cos u = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \operatorname{sen} v = \frac{3}{5}.$$

En consecuencia,

$$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{4}{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{3}{5}$$

$$= \frac{-2}{5\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{25}.$$

■

EJEMPLO 6 Escribir $\cos(\text{sen}^{-1} x)$ como una expresión algebraica en x.

SOLUCIÓN Si consideramos

$$y = \text{sen}^{-1} x.$$

Entonces

$$\text{sen}\, y = x.$$

De aquí que nuestro objetivo es encontrar $\cos y$. Como $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, se concluye que $\cos y \geq 0$ y por lo tanto

$$\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

En consecuencia,

$$\cos(\text{sen}^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

■

EJEMPLO 7 Verificar la identidad

$$\frac{1}{2}\cos^{-1} x = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad \text{en donde } |x| < 1.$$

SOLUCIÓN Sea $y = \cos^{-1} x$. Deseamos demostrar que

$$\frac{1}{2}y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Por una de las fórmulas del medio ángulo (véase la Sección 7.4),

$$\left|\tan\frac{y}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}}.$$

Como $y = \cos^{-1} x$ y $|x| < 1$, se concluye que $0 < y < \pi$ y por lo tanto que, $0 < (y/2) < \pi/2$. En consecuencia, $\tan(y/2) > 0$, por lo que podemos eliminar las barras de valor absoluto y así

$$\tan\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}}.$$

Puesto que $\cos y = x$, obtenemos

$$\tan\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Que equivale a

$$\frac{y}{2} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

que es lo que se quería demostrar. ■

Las soluciones de la mayoría de las ecuaciones trigonométricas de la Sección 7.2 fueron múltiplos racionales de π, tales como $\pi/3$, $3\pi/4$, π, etc. Algunas veces podemos aplicar las funciones inversas para expresar a las soluciones en forma exacta, si éstas no son de las del tipo que mencionamos, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Obtener las soluciones de la ecuación

$$5\operatorname{sen}^2 t + 3\operatorname{sen} t - 1 = 0$$

que estén en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

SOLUCIÓN La ecuación dada es una ecuación cuadrática en sen t. Al aplicar la fórmula cuadrática obtenemos,

$$\operatorname{sen} t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+20}}{10} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{10}.$$

Como resultado, por la definición de la función inversa del seno, obtenemos las soluciones

$$t = \operatorname{sen}^{-1} \tfrac{1}{10}(-3 + \sqrt{29})$$

y

$$t = \operatorname{sen}^{-1} \tfrac{1}{10}(-3 - \sqrt{29}).$$

Si se dispone de una calculadora el trabajo resulta más sencillo. Como ilustración, procedemos a ponerla en el modo radianes:

Ingresar: $\frac{1}{10}(-3 + \sqrt{29}) \approx 0.2385165$

Oprimir [INV] [sen]: 0.240838

Por lo tanto, $t \approx 0.2408$.

De igual manera,

$$t = \operatorname{sen}^{-1} \tfrac{1}{10}(-3 - \sqrt{29}) \approx \operatorname{sen}^{-1}(-0.8385165) \approx -0.9946.$$ ■

Ejercicios 7.6

Hallar los valores de los Ejercicios 1 a 8, sin hacer uso de tablas ni calculadoras.

1. (a) $\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2}$ (b) $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$

2. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(-\sqrt{3}/2)$

3. (a) arcsen0 (b) arccos 1

4. (a) $\cos^{-1}(\sqrt{2}/2)$ (b) $\cos^{-1}(-\sqrt{2}/2)$

5. (a) $\operatorname{arcsen}(-1)$ (b) $\arccos(-1)$

6. (a) $\tan^{-1}(-1)$ (b) $\arccos(-\frac{1}{2})$

7. (a) $\tan^{-1}\sqrt{3}$ (b) $\arctan(-\sqrt{3})$

8. (a) $\tan^{-1}0$ (b) $\arctan 1$

Para aproximar los valores en los Ejercicios 9 a 14 use (a) la Tabla 4; (b) una calculadora.

9. $\cos^{-1}(0.5616)$

10. $\operatorname{sen}^{-1}(0.1994)$

11. $\operatorname{sen}^{-1}(-0.6494)$

12. $\cos^{-1}(-0.9112)$

13. $\arctan(2.1775)$

14. $\operatorname{arcsen}(0.8004)$

Determine los valores de los Ejercicios 15 a 26, sin hacer uso de tablas ni calculadora.

15. $\operatorname{sen}(\cos^{-1}\frac{1}{2})$

16. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}0)$

17. $\operatorname{sen}(\arccos\frac{4}{5})$

18. $\tan(\tan^{-1}5)$

19. $\operatorname{arcsin}(\operatorname{sen}5\pi/4)$

20. $\cos^{-1}(\cos 3\pi/4)$

21. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{3}{4})$

22. $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}+\arccos 0)$

23. $\tan(\arctan\frac{4}{3}+\arccos\frac{8}{17})$

24. $\cos(2\operatorname{sen}^{-1}\frac{15}{17})$

25. $\operatorname{sen}[2\arccos(-\frac{3}{5})]$

26. $\cos(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{8}{15})$

Escriba cada uno de los términos de los Ejercicios 27 a 30 como una expresión algebraica en x. (Véase el Ejemplo 6.)

27. $\operatorname{sen}(\tan^{-1}x)$

28. $\tan(\arccos x)$

29. $\cos(\frac{1}{2}\arccos x)$

30. $\cos(2\tan^{-1}x)$

Verifique las identidades de los Ejercicios 31 a 38.

31. $\operatorname{sen}^{-1}x+\cos^{-1}x=\pi/2$
(*Sugerencia:* Sea $\alpha=\operatorname{sen}^{-1}x$, $\beta=\cos^{-1}x$ y considere $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$.)

32. $\arctan x+\arctan(1/x)=\pi/2,\ x>0$

33. $\operatorname{arcsen}\dfrac{2x}{1+x^2}=2\arctan x,\ |x|<1$

34. $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1),\ 0\le x\le 1$

35. $\operatorname{arcsen}(-x)=-\operatorname{arcsen}x$

36. $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$

37. $\operatorname{sen}^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

38. $\tan^{-1}u+\tan^{-1}v=\tan^{-1}\dfrac{u+v}{1-uv}$, $|u|<1$ y $|v|<1$

39. Restrinja el dominio de la función cotangente al intervalo $(0,\pi)$ para definir $\cot^{-1}$.

40. Restrinja el dominio de la función secante a $[0,\pi/2)\cup[\pi,3\pi/2)$ para definir $\sec^{-1}$.

41. Definir $\csc^{-1}$ restringiendo el dominio de la función cosecante a $[-\pi/2,0)\cup(0,\pi/2]$.

42. Verifique la gráfica de la Figura 7.10.

Trace las gráficas de las ecuaciones de los Ejercicios 43 a 52.

43. $y=\operatorname{sen}^{-1}2x$

44. $y=\cos^{-1}(x/2)$

45. $y=\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}x$

46. $y=2\cos^{-1}x$

47. $y=2\tan^{-1}x$

48. $y=\tan^{-1}2x$

49. $y=2+\tan^{-1}x$

50. $y=\operatorname{sen}^{-1}(x+1)$

51. $y=\operatorname{sen}(\arccos x)$

52. $y=\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}x)$

Demuestre que las ecuaciones de los Ejercicios 53 y 54 no son identidades.

53. $\tan^{-1}x=\dfrac{1}{\tan x}$

54. $(\operatorname{arcsen}x)^2+(\arccos x)^2=1$

En los Ejercicios 55 a 60, (a) use las funciones trigonométricas inversas para encontrar las soluciones de las ecuaciones en los intervalos dados, y (b) emplee una calculadora para aproximar las soluciones encontradas en (a) a cuatro cifras decimales.

55. $2\tan^2 t+9\tan t+3=0;\ (-\pi/2,\pi/2)$

56. $3\operatorname{sen}^2 t+7\operatorname{sen}t+3=0;\ [-\pi/2,\pi/2]$

57. $15\cos^4 x-14\cos^2 x+3=0;\ [0,\pi]$

58. $3\tan^4\theta-19\tan^2\theta+2=0;\ (-\pi/2,\pi/2)$

59. $6\operatorname{sen}^3\theta+18\operatorname{sen}^2\theta-5\operatorname{sen}\theta-15=0;\ (-\pi/2,\pi/2)$

60. $6\operatorname{sen}2x-8\cos x+9\operatorname{sen}x-6=0;\ (-\pi/2,\pi/2)$

Ejercicios para Calculadora 7.6

1. Use una calculadora para demostrar que $\text{sen}^{-1}(\text{sen } 2) \neq 2$. Explique por qué la respuesta no es 2. ¿Es $\cos^{-1}(\cos 2) = 2$? ¿Por qué?
2. Use una calculadora para demostrar que $\cos^{-1}(\cos(-1)) \neq -1$. Explique por qué la respuesta no es -1. ¿Es $\text{sen}^{-1}(\text{sen}(-1)) = -1$? ¿Por qué?
3. Si se introduce un número x entre -1 y 1 en una calculadora, ¿es posible siempre, oprimiendo INV SEN dos veces, calcular $\text{sen}^{-1}(\text{sen}^{-1} x)$? Si no lo es, decida qué valores de x evitarían la aparición del mensaje de error.
4. Para cualquier número real x, ¿se obtendrá un mensaje de error al oprimir tres veces seguidas INV TAN? Explique.
5. La función $\tan^{-1}$ es la única función trigonométrica inversa disponible en muchos lenguajes de computación. (Por ejemplo, en BASIC la función se denota por ATN(X).) Exprese a $\text{sen}^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ y $\cot^{-1} x$ en términos de $\tan^{-1} x$. (Véase el Ejercicio 37.) ¿Son válidas las fórmulas sobre todo el dominio de la función inversa?

En los Ejercicios 6 y 7 aplique la notación introducida en los Ejercicios para Calculadora de la Sección 6.6. Emplee una calculadora para corroborar lo indicado sustituyendo x por 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001.

6. $\dfrac{\text{arcsen} 2x}{\text{arcsen} x} \to 2$ cuando $x \to 0^+$
7. $\csc x \tan^{-1} x \to 1$ cuando $x \to 0^+$

7.7 Repaso

Defina o discuta cada uno de los conceptos que siguen:

1. Las identidades fundamentales.
2. Verificación de identidades.
3. Ecuaciones trigonométricas.
4. Fórmulas de suma y de diferencia.
5. Fórmulas del ángulo doble.
6. Fórmulas del medio ángulo.
7. Fórmulas de producto.
8. Fórmulas de factorización.
9. Fórmulas de reducción.
10. Funciones trigonométricas inversas.

Ejercicios 7.7

Verifique las identidades de los Ejercicios 1 a 16.

1. $(\cot^2 x + 1)(1 - \cos^2 x) = 1$
2. $\cos\theta + \text{sen}\theta \tan\theta = \sec\theta$
3. $\dfrac{(\sec^2\theta - 1)\cot\theta}{\tan\theta\,\text{sen}\theta + \cos\theta} = \text{sen}\theta$
4. $(\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x \csc^2 x$
5. $\dfrac{1}{1 + \text{sen}t} = (\sec t - \tan t)\sec t$
6. $\dfrac{\text{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$
7. $\dfrac{2\cot u}{\csc^2 u - 2} = \tan 2u$
8. $\cos^2\dfrac{v}{2} = \dfrac{1 + \sec v}{2\sec v}$
9. $\dfrac{\tan^3\phi - \cot^3\phi}{\tan^2\phi + \csc^2\phi} = \tan\phi - \cot\phi$
10. $\dfrac{\text{sen}u + \text{sen}v}{\csc u + \csc v} = \dfrac{1 - \text{sen}u\,\text{sen}v}{-1 + \csc u \csc v}$
11. $\cos\left(x - \dfrac{5\pi}{2}\right) = \text{sen}\,x$

12. $\tan\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\tan x-1}{\tan x+1}$

13. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}4\beta=\operatorname{sen}\beta\cos^3\beta-\cos\beta\operatorname{sen}^3\beta$

14. $\tan\frac{1}{2}\theta=\csc\theta-\cot\theta$

15. $\operatorname{sen}8\theta=8\operatorname{sen}\theta\cos\theta(1-2\operatorname{sen}^2\theta)(1-8\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta)$

16. $\arctan x=\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2},\ |x|\le 1$

En los Ejercicios 17 a 28 encuentre las soluciones que están en el intervalo $[0, 2\pi]$ y determine el valor en grados de cada solución.

17. $2\cos^3\theta-\cos\theta=0$

18. $2\cos\alpha+\tan\alpha=\sec\alpha$

19. $\operatorname{sen}\theta=\tan\theta$

20. $\csc^5\theta-4\csc\theta=0$

21. $2\cos^3 t+\cos^2 t-2\cos t-1=0$

22. $\cos x\cot^2 x=\cos x$

23. $\operatorname{sen}\beta+2\cos^2\beta=1$

24. $\cos 2x+3\cos x+2=0$

25. $2\sec u\operatorname{sen}u+2=4\operatorname{sen}u+\sec u$

26. $\operatorname{sen}2u=\operatorname{sen}u$

27. $2\cos^2\frac{1}{2}\theta-3\cos\theta=0$

28. $\sec 2x\csc 2x=2\csc 2x$

Encuentre los valores exactos de los Ejercicios 29 a 32, sin hacer uso de tablas ni calculadora.

29. $\cos 75°$ **30.** $\tan 285°$

31. $\operatorname{sen}195°$ **32.** $\csc\pi/8$

Si θ y ϕ son ángulos agudos tales que $\csc\theta=\frac{5}{3}$ y $\cos\phi=\frac{8}{17}$, encuentre los números de los Ejercicios 33 a 41 sin usar tablas ni calculadora.

33. $\operatorname{sen}(\theta+\phi)$ **34.** $\cos(\theta+\phi)$ **35.** $\tan(\theta-\phi)$

36. $\operatorname{sen}(\phi-\theta)$ **37.** $\operatorname{sen}2\phi$ **38.** $\cos 2\phi$

39. $\tan 2\theta$ **40.** $\operatorname{sen}(\theta/2)$ **41.** $\tan(\theta/2)$

42. Exprese con $(\alpha+\beta+\gamma)$ en función de α, β y γ.

43. Exprese a cada uno de los siguientes productos como una suma o una diferencia.

(a) $\operatorname{sen}7t\operatorname{sen}4t$

(b) $\cos(u/4)\cos(-u/6)$

(c) $6\cos 5x\operatorname{sen}3x$

44. Exprese los ejercicios propuestos a continuación como un producto:

(a) $\operatorname{sen}8u+\operatorname{sen}2u$

(b) $\cos 3\theta-\cos 8\theta$

(c) $\operatorname{sen}(t/4)-\operatorname{sen}(t/5)$

Encuentre los valores de los Ejercicios 45 a 53 sin hacer uso de tablas ni calculadoras.

45. $\cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ **46.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

47. $\arccos\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$ **48.** $\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$

49. $\operatorname{sen}\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

50. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}\frac{15}{17}-\operatorname{sen}^{-1}\frac{8}{17})$

51. $\cos(2\operatorname{sen}^{-1}\frac{4}{5})$ **52.** $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3})$

53. $\cos^{-1}(\operatorname{sen}0)$

Trace las gráficas de las ecuaciones de los Ejercicios 54 a 56.

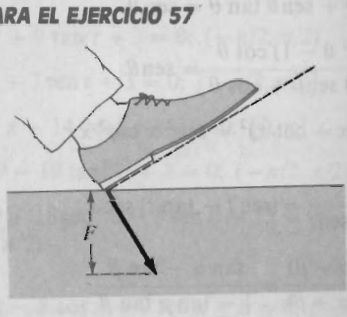
54. $y=,\cos^{-1}3x$ **55.** $y=4\operatorname{sen}^{-1}x$

56. $y=1-\operatorname{sen}^{-1}x$

57. Cuando una persona está caminando, la magnitud F de la fuerza vertical que ejerce un pie sobre el suelo (véase figura) se puede describir mediante $F=A(\cos bt-a\cos 3bt)$, en la que t es el tiempo en segundos, $A>0$, $b>0$ y $0<a<1$.

(a) Muestre que $F=0$ cuando $t=-\pi/2b$ y $\pi/2b$. (El tiempo $t=-\pi/2b$ corresponde al momento en que el pie toca el suelo por pri-

FIGURA PARA EL EJERCICIO 57



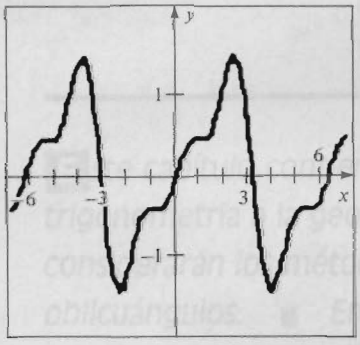
mera vez y el peso del cuerpo está soportado por el otro pie.)

(b) Usando el cálculo puede demostrarse que la fuerza máxima ocurre cuando $3a \operatorname{sen} 3bt = \operatorname{sen} bt$. Si $a = \frac{1}{3}$, encuentre las soluciones de esta ecuación para $-\pi/2b < t < \pi/2b$. (*Sugerencia:* Exprese a sen $3bt$ en términos de sen bt.)

(c) Si $a = \frac{1}{3}$, exprese a la fuerza máxima en términos de A.

58. En la figura se muestra una gráfica generada por computadora de $f(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x$. Las coordenadas x de las crestas y los valles de la gráfica satisfacen la ecuación $\cos x - \cos 2x + \cos 3x = 0$. Use las fórmulas de factorización para encontrar estas coordenadas x.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 58

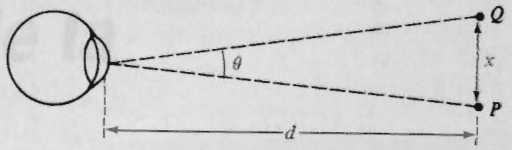


59. El ojo humano puede distinguir claramente entre dos puntos distantes P y Q siempre y cuando el ángulo de resolución θ no sea muy pequeño. Supóngase que P y Q están separados una distancia de x unidades y que están a d unidades del ojo, como se muestra en la figura.

(a) Exprese a x como una función de d y de θ.

(b) Para una persona que tiene visión normal, el ángulo de resolución más pequeño es de alrededor de 0.0005 radianes. Una pluma o bolígrafo de 6 pulg de longitud puede ser vista por tal persona a una distancia de d pies. ¿Para qué valores de d serán los extremos claramente distinguibles?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 59

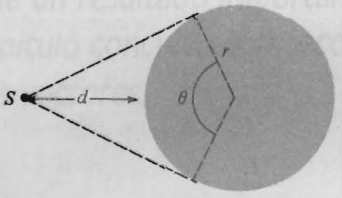


60. Un satélite S gira alrededor de un planeta a una distancia de d millas de la superficie del planeta. La porción de la superficie mencionada que es visible desde el satélite está determinada por el ángulo θ que se muestra en la figura.

(a) Suponiendo que el planeta es de forma esférica, exprese a d como función de θ y del radio r del planeta.

(b) Si se usa 4 000 millas para el radio de la Tierra, aproxime θ para un satélite situado a 300 millas de la superficie.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 60



CAPÍTULO 8

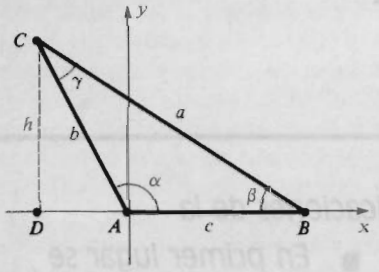
Aplicaciones de la trigonometría

Este capítulo contiene algunas de las aplicaciones de la trigonometría a la geometría y al álgebra. ■ En primer lugar se considerarán los métodos para resolver triángulos oblicuángulos. ■ En seguida se introduce la forma trigonométrica para los números complejos y se obtiene un resultado importante acerca de las raíces n-ésimas. ■ El capítulo concluye con secciones que tratan las coordenadas polares y los vectores.

8.1 Ley de los senos

Un **triángulo oblicuángulo** es aquel que no contiene un ángulo rectángulo. Si se conocen dos ángulos y un lado de un triángulo oblicuángulo, o dos de sus lados y un ángulo opuesto a uno de ellos, entonces se pueden encontrar las otras partes del triángulo por medio de las fórmulas que daremos en esta sección. De la misma forma que en el Capítulo 6 emplearemos las letras A, B, C, a, b, c, α, β y γ para denotar las partes del triángulo. Dado un triángulo ABC, consideraremos que el ángulo α está en la posición estándar del sistema coordenado rectangular, de tal forma que B esté sobre la parte positiva del eje x. En la Figura 8.1 se ilustra el caso donde α es obtuso. El desarrollo que llevaremos a cabo también se podrá aplicar si α es un ángulo agudo.

FIGURA 8.1



Considérese la recta paralela al eje y que pasa por C y corta al eje x en el punto D. Supóngase que $d(C, D) = h$, de tal forma que h sea la ordenada de C. De este modo

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b} \quad \text{o bien} \quad h = b\operatorname{sen}\alpha.$$

Con referencia al triángulo BDC vemos que

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{a} \quad \text{o bien} \quad h = a\operatorname{sen}\beta.$$

En consecuencia,

$$b\operatorname{sen}\alpha = a\operatorname{sen}\beta,$$

que puede escribirse como

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}.$$

Si α está en la posición estándar, de manera que C esté sobre el eje positivo x y por el mismo razonamiento,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}.$$

El siguiente resultado es una consecuencia de las dos últimas igualdades.

LEY DE LOS SENOS

Si ABC es cualquier triángulo oblicuángulo designado de la manera usual, entonces

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}.$$

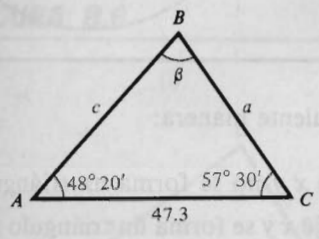
La Ley de los Senos se puede escribir también en la forma

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

El siguiente ejemplo ilustra un método de la aplicación de la Ley de los Senos para el caso en que son conocidos dos ángulos y un lado del triángulo. En las respuestas usaremos las reglas de redondeo que discutimos en la Sección 6.4.

EJEMPLO 1 Dar los valores aproximados de las otras partes de un triángulo ABC con $\alpha = 48°20'$, $\gamma = 57°30'$ y $b = 47.3$.

FIGURA 8.2



SOLUCIÓN En la Figura 8.2 se ha representado el triángulo. Puesto que la suma de los ángulos es 180°,

$$\beta = 180° - (57°30' + 48°20') = 74°10'.$$

Puesto que
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$$

Al aplicar la Ley de los Senos,

$$a = \frac{b \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{(47.3)\operatorname{sen} 48°20'}{\operatorname{sen} 74°10'}.$$

De acuerdo con la Tabla 4 o una calculadora,

$$a \approx \frac{(47.3)(0.7470)}{(0.9621)} \approx 36.7.$$

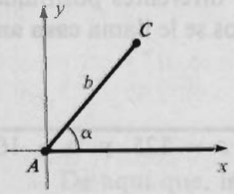
Análogamente,

$$c = \frac{b \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{(47.3)\operatorname{sen} 57°30'}{\operatorname{sen} 74°10'}$$

$$\approx \frac{(47.3)(0.8434)}{(0.9621)} \approx 41.5.$$

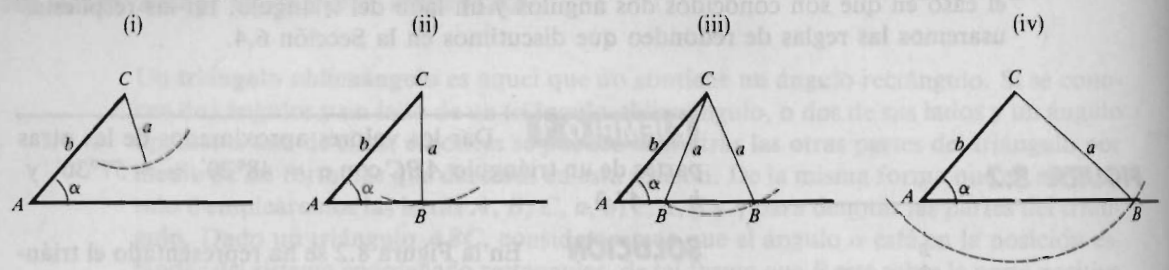
■

FIGURA 8.3



Si se proporcionan datos como los del Ejemplo 1, siempre obtendremos un único triángulo ABC. Sin embargo, no siempre es único si conocemos dos de los lados del triángulo y un ángulo *opuesto* a uno de ellos. Como ilustración, supóngase que a y b son las longitudes del triángulo ABC. Además, supóngase que se conoce el ángulo α, el cual es opuesto al lado de longitud a. Considérese el caso en que α es un ángulo agudo que está en la posición estándar del sistema coordenado rectangular y supóngase que el segmento de recta AC de longitud b determina a α, como se muestra en la Figura 8.3. El tercer vértice B debe estar en alguna parte del eje x. Como se conoce la longitud a del lado opuesto de α, se puede determinar B trazando un arco circular de longitud a con centro en C. En la Figura 8.4, donde se han omitido los ejes coordenados, se ilustran los cuatro posibles resultados para su construcción.

FIGURA 8.4



Se pueden enunciar las cuatro posibilidades de la siguiente manera:

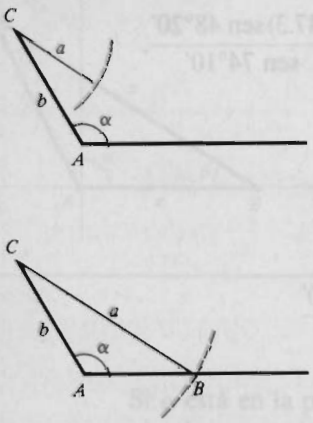
(i) El arco no corta al eje x y no se forma un triángulo.

(ii) El arco es tangente al eje x y se forma un triángulo rectángulo.

(iii) El arco corta en dos puntos diferentes al eje positivo x y se forman dos triángulos.

(iv) El arco se interseca con las partes positiva y no positiva del eje x y se forma un triángulo.

FIGURA 8.5



No es necesario memorizar estos hechos puesto que será evidente el caso que se tiene al intentar obtener la solución de cualquier problema en particular. Por ejemplo, al resolver la ecuación

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}$$

supóngase que obtenemos $|\operatorname{sen}\beta| > 1$. Esto indicará que no hay triángulo. Si se obtiene la ecuación $\operatorname{sen}\beta = 1$, entonces $\beta = 90°$ y por lo tanto ocurre el caso (ii). Sin embargo, hay dos posibles elecciones para el ángulo β si $\operatorname{sen}\beta < 1$. Al analizar ambas posibilidades, será evidente que ocurra el caso (iii) o el (iv).

Si el ángulo α es mayor de 90°, entonces existe un triángulo si y sólo si $a > b$, como se muestra en la Figura 8.5. Como se pueden suscitar diferentes posibilidades, al caso en que se conocen dos lados y un ángulo opuesto a ellos se le llama **caso ambiguo**.

EJEMPLO 2 Resolver el triángulo ABC si $\alpha = 67°$, $c = 125$ y $a = 100$.

SOLUCIÓN Al aplicar $\operatorname{sen}\gamma = \dfrac{c\operatorname{sen}\alpha}{a}$,

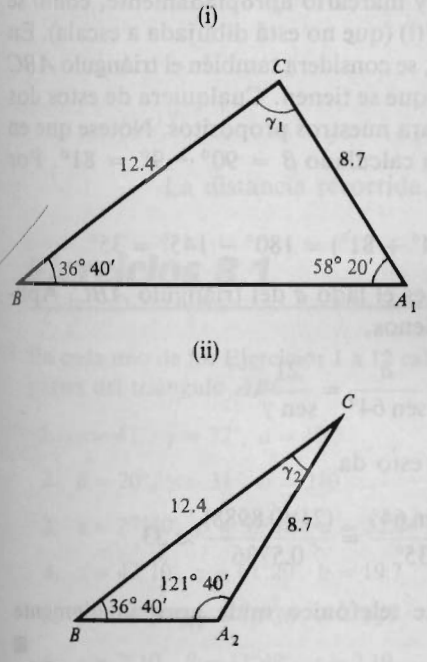
$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{(125)\operatorname{sen}67°}{100}$$

$$\approx \frac{(125)(0.9205)}{100} \approx 1.1506.$$

No existe triángulo que pueda construirse con los datos puesto que sen $\gamma > 1$. ■

EJEMPLO 3 Aproximar las otras partes del triángulo ABC si $a = 12.4$, $b = 8.7$ y $\beta = 36°40'$.

FIGURA 8.6



SOLUCIÓN Al aplicar $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{a \operatorname{sen}\beta}{b}$,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{(12.4)\operatorname{sen} 36°40'}{8.7}$$

$$\approx \frac{(12.4)(0.5972)}{8.7} \approx 0.8512.$$

El ángulo α, tal que $\operatorname{sen}\alpha \approx 0.8512$, puede tomar dos valores posibles entre 0° y 180°. Si denotamos por α' al ángulo de referencia de α, entonces de la Tabla 4 o con calculadora obtenemos $\alpha' \approx 58°20'$. En consecuencia, los dos posibles valores de α son

$$\alpha_1 \approx 58°20' \quad \text{y} \quad \alpha_2 \approx 121°40'.$$

Si denotamos por γ_1 y γ_2 al tercer ángulo de los triángulos correspondientes a los ángulos α_1 y α_2, respectivamente, entonces

$$\gamma_1 \approx 180° - (36°40' + 58°20') = 85°$$

y

$$\gamma_2 \approx 180° - (36°40' + 121°40') = 21°40'.$$

Por consiguiente, hay dos posibles triángulos con las partes dadas. Éstos son los triángulos A_1BC y A_2BC que se muestran en la Figura 8.6.

Si c_1 es el lado opuesto a γ_1 del triángulo A_1BC, entonces

$$c_1 = \frac{a \operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\alpha_1} \approx \frac{(12.4)\operatorname{sen} 85°}{\operatorname{sen} 58°20'}$$

$$\approx \frac{(12.4)(0.9962)}{0.8511} \approx 14.5.$$

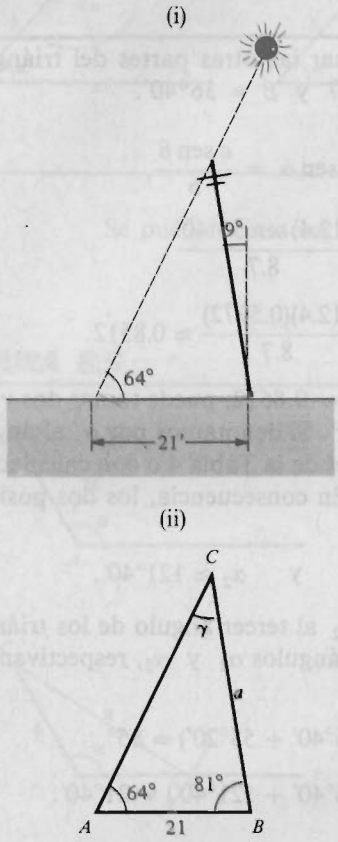
De aquí que, las partes restantes del triángulo A_1BC sean $\alpha_1 \approx 58°20'$, $\gamma_1 \approx 85°$ y $c_1 \approx 14.5$.

De la misma manera, si c_2 es el lado opuesto al ángulo γ_2, en el triángulo A_2BC, tenemos

$$c_2 = \frac{a \operatorname{sen}\gamma_2}{\operatorname{sen}\alpha_2} \approx \frac{(12.4)\operatorname{sen} 21°40'}{\operatorname{sen} 121°40'} \approx \frac{(12.4)(0.3692)}{0.8511} \approx 5.4.$$

Como consecuencia, las partes restantes del triángulo A_2BC son $\alpha_2 \approx 121°40'$, $\gamma_2 \approx 21°40'$ y $c_2 \approx 5.4$. ■

FIGURA 8.7



EJEMPLO 4 Cuando el ángulo de elevación del Sol es de 64°, un poste telefónico que está inclinado un ángulo de 9° en la dirección a la que se encuentra el Sol, hace una sombra de 21 pie de longitud sobre el piso. Determine la longitud del poste.

SOLUCIÓN En los problemas de aplicación es importante hacer un diagrama y marcarlo apropiadamente, como se ilustra en la Figura 8.7(i) (que no está dibujada a escala). En la parte (ii) de la figura, se considera también el triángulo ABC que muestra los datos que se tienen. Cualquiera de estos dos croquis es suficiente para nuestros propósitos. Nótese que en la Figura 8.7(ii) se han calculado $\beta = 90° - 9° = 81°$. Por lo que

$$\gamma = 180° - (64° + 81°) = 180° - 145° = 35°.$$

La longitud del poste es el lado a del triángulo ABC. Aplicando la Ley de los Senos.

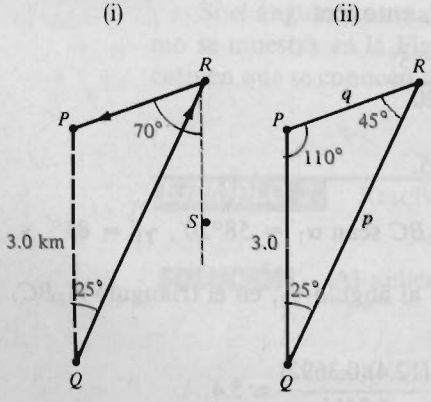
$$\frac{a}{\operatorname{sen} 64°} = \frac{21}{\operatorname{sen} \gamma}.$$

Puesto que $\gamma = 35°$, esto da

$$a = \frac{(21)\operatorname{sen} 64°}{\operatorname{sen} 35°} = \frac{(21)(0.8988)}{0.5736} \approx 33.$$

Por lo tanto, el poste telefónico mide aproximadamente 33 pie de longitud. ■

FIGURA 8.8



EJEMPLO 5 Un punto P, al nivel del piso, se encuentra 3 km al norte de un punto Q. Un corredor se dirige en la dirección N25°E de Q hacia un punto R y de ahí a P en la dirección S70°W. Aproxime la distancia recorrida.

SOLUCIÓN La notación que se usa para especificar las direcciones se presentó en la Sección 6.4. En la Figura 8.8(i) se muestra la trayectoria del corredor conjuntamente con la línea norte-sur (con trazo punteado) desde R hasta otro punto S.

Puesto que las rectas que pasan por PQ y por RS son paralelas, con base en la geometría sabemos que los ángulos alternos internos $\angle PQR$ y $\angle QRS$ miden ambos 25°. Por lo tanto,

$$\angle PRQ = 70° - 25° = 45°.$$

A partir de estas observaciones se obtiene el triángulo PQR de la Figura 8.8(ii), en el que

$$\angle QPR = 180° - (25° + 45°) = 180° - 70° = 110°.$$

Aplicando dos veces la Ley de los Senos se obtiene

$$\frac{q}{\operatorname{sen} 25°} = \frac{3.0}{\operatorname{sen} 45°} \quad \text{y} \quad \frac{p}{\operatorname{sen} 110°} = \frac{3.0}{\operatorname{sen} 45°}.$$

Por tanto,

$$q = \frac{(3.0)\operatorname{sen} 25°}{\operatorname{sen} 45°} \approx \frac{(3.0)(0.4226)}{0.7071} \approx 1.8$$

y

$$p = \frac{(3.0)\operatorname{sen} 110°}{\operatorname{sen} 45°} \approx \frac{(3.0)(0.9397)}{0.7071} \approx 4.0$$

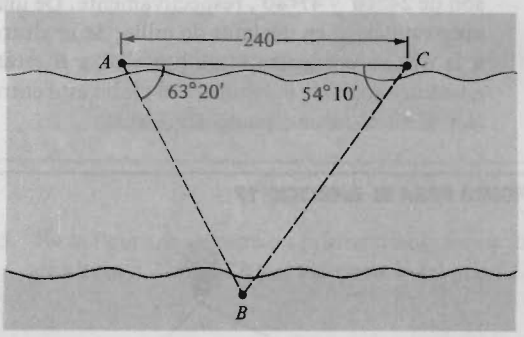
La distancia recorrida, al kilómetro más cercano, es $p + q = 5.8$ km. ■

Ejercicios 8.1

En cada uno de los Ejercicios 1 a 12 calcule las otras partes del triángulo ABC.

1. $\alpha = 41°$, $\gamma = 77°$, $a = 10.5$
2. $\beta = 20°$, $\gamma = 31°$, $b = 210$
3. $\alpha = 27°40'$, $\beta = 52°10'$, $a = 32.4$
4. $\alpha = 42°10'$, $\gamma = 61°20'$, $b = 19.7$
5. $\beta = 50°50'$, $\gamma = 70°30'$, $c = 537$
6. $\alpha = 7°10'$, $\beta = 11°40'$, $a = 2.19$
7. $\alpha = 65°10'$, $a = 21.3$, $b = 18.9$
8. $\beta = 30°$, $b = 17.9$, $a = 35.8$
9. $\gamma = 53°20'$, $a = 140$, $c = 115$
10. $\alpha = 27°30'$, $c = 52.8$, $a = 28.1$
11. $\beta = 113°10'$, $b = 248$, $c = 195$
12. $\gamma = 81°$, $c = 11$, $b = 12$
13. Se desea determinar la distancia entre dos puntos A y B que se encuentran en las orillas opuestas de un río. Se traza un segmento de recta AC de una longitud de 240 yardas y se encuentra que los ángulos BAC y ACB miden 63°20′ y 54°10′, respectivamente (véase figura). Aproxime la distancia de A a B.

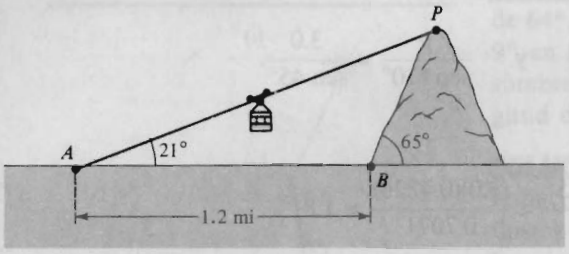
FIGURA PARA EL EJERCICIO 13



14. Para encontrar la distancia entre dos puntos A y B un topógrafo elige un punto C que está a 375 yardas de A y a 530 yardas de B. Si $\angle BAC$ mide 49°30′, aproxime la distancia entre A y B.
15. Un funicular lleva pasajeros del punto A, que se encuentra a 1.2 millas del pie de una montaña al Pico del Mirador, en el punto P. Como se muestra en la figura, el ángulo de elevación de P desde A es de 21°, mientras que el ángulo de elevación desde B, al pie de la montaña, es de 65°.
    (a) ¿Qué distancia recorre el funicular entre A y P?

(b) ¿Cuál es la diferencia de elevación entre los puntos A y P?

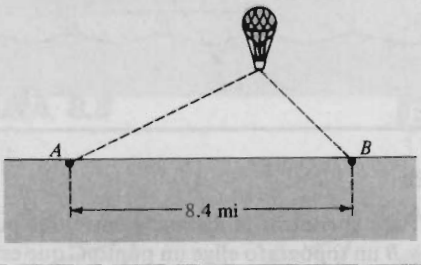
FIGURA PARA EL EJERCICIO 15



16. Una carretera recta forma un ángulo de 15° con el plano horizontal. Un poste vertical, que se encuentra en la orilla de la carretera, produce una sombra sobre ésta de 75 pie de longitud, cuando el ángulo de elevación del Sol es de 57°. Aproxime la longitud del poste.

17. Los ángulos de elevación de un globo con respecto a los puntos A y B, sobre el nivel de tierra son de 24°10′ y 47°40′, respectivamente. Dé una aproximación, en décimas de milla, de la altura a la que se encuentra el globo, si A y B están a una distancia de 8.4 millas y el globo está entre A y B en el mismo plano vertical.

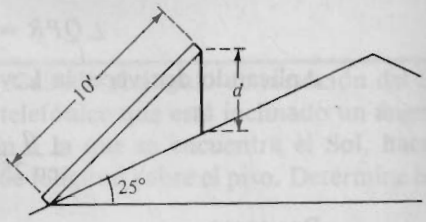
FIGURA PARA EL EJERCICIO 17



18. En la figura se indica un panel solar de 10 pie de ancho que se colocará sobre un techo que forma un ángulo de 25° con la horizontal. Aproxime la longitud d del sostén que se requiere si el panel debe formar un ángulo de 45° con la horizontal.

19. Un guardia forestal divisa, desde un punto de observación A, un incendio en la dirección N27°10′E. Otro guardia, que se encuentra en el punto de observación B, a 6 millas al este de A, ve el mismo fuego en la dirección N52°40′W. Calcule, al décimo de milla más cercano, la distancia de cada uno de los puntos de observación al incendio.

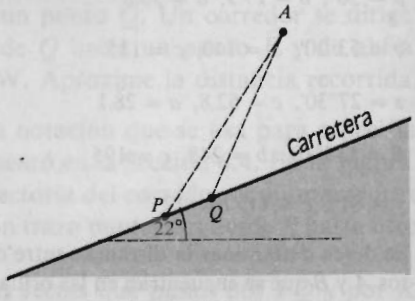
FIGURA PARA EL EJERCICIO 18



20. Un topógrafo se da cuenta de que la dirección de un punto A a un punto B es S63°W y que la dirección de A a C es S38°W. La distancia de A a B es de 239 yardas y la distancia de B a C es de 374 yardas. Determine la distancia de A a C.

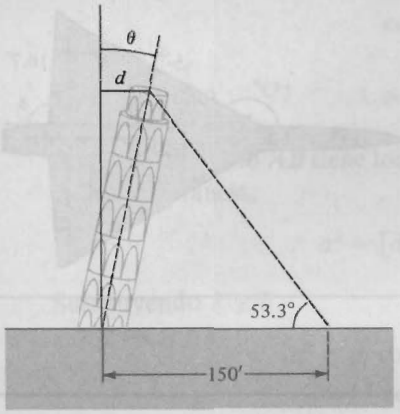
21. Una carretera recta forma un ángulo de 22° con el plano horizontal. Desde un cierto punto P sobre el camino, el ángulo de elevación de un avión que se halla en el punto A es de 57°. En ese mismo momento, desde otro punto Q, a 100 m más arriba de P sobre la carretera, el ángulo de elevación es de 63°. Como se indica en la figura, los puntos P, Q y A están en un mismo plano vertical. Calcule, al metro más cercano, la distancia de P al avión.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 21



22. La torre inclinada de Pisa tenía originalmente una altura de 179 pie, pero ahora, debido a que se

FIGURA PARA EL EJERCICIO 22



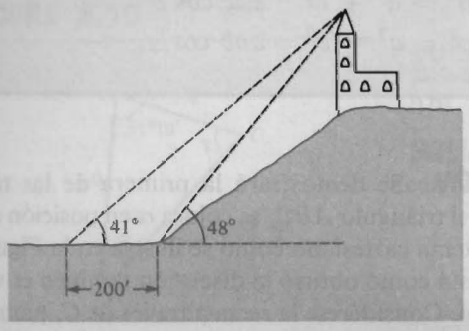
ha hundido en el terreno, está inclinada un ángulo θ con respecto a la perpendicular (véase la figura). Cuando la parte superior de la torre se ve desde un punto a 150 pie de su base, el ángulo de elevación es de 53.3°.

(a) Determine el ángulo θ.

(b) Aproxime la distancia d que se ha movido el extremo de la torre respecto de la posición perpendicular al terreno.

23. Una catedral está situada en la cima de una colina. Cuando la punta de su torre se observa desde el pie de la loma, el ángulo de elevación es de 48°. Cuando se ve desde un punto a una distancia de 200 pie del pie del promontorio, el ángulo de elevación es de 41°. La cuesta de la colina forma un ángulo de 32°. Aproxime la altura de la catedral.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 23

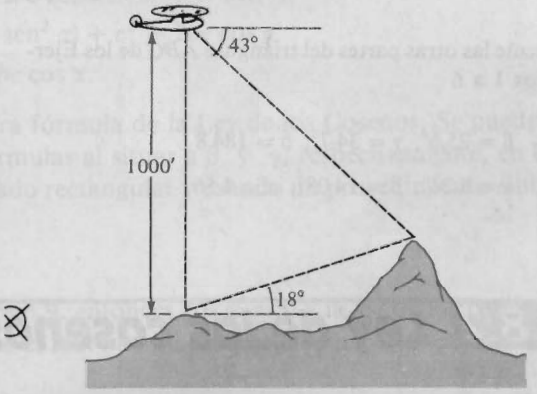


24. Un helicóptero se halla suspendido a una altura de 1000 pie sobre la cumbre de una montaña que tiene 5 210 pie de altitud. Desde esa cima y desde el aparato puede verse la cúspide de otra montaña más alta. Desde el helicóptero, el ángulo de depresión es de 43°. Desde la cima de la primera montaña, el ángulo de elevación es de 18°. Calcule lo siguiente, al pie más cercano.

(a) La distancia de un pico al otro.

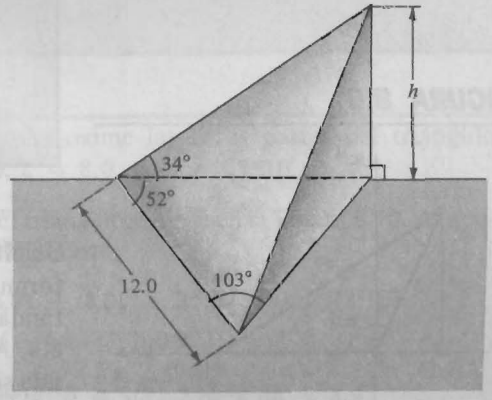
(b) La altitud de la cumbre de la montaña más alta.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 24



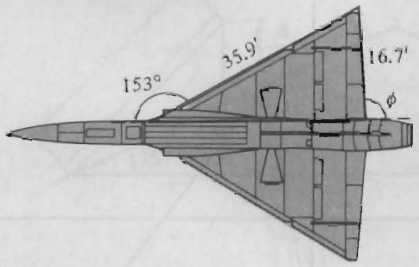
25. En la figura se muestra un prisma triangular recto de altura h. Calcule h y el volumen V del prisma.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 25



26. En la figura se muestra la vista desde arriba de un avión *jet* Delta Dart, que se distingue por el diseño poco común de sus alas. En el croquis se indican los datos relativos a éstas.
(a) Calcule el ángulo ϕ.
(b) Si el fuselaje tiene 4.80 pie de ancho, calcule la envergadura o extensión de las alas del avión.
(c) Calcule el área de una ala.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 26



Ejercicios para calculadora 8.1

Calcule las otras partes del triángulo ABC de los Ejercicios 1 a 6

1. $\beta = 25.6°$, $\gamma = 34.7°$, $b = 184.8$
2. $\alpha = 6.24°$, $\beta = 14.08°$, $a = 4.56$
3. $\alpha = 103.45°$, $\gamma = 27.19°$, $b = 38.84$
4. $\gamma = 47.74°$, $a = 131.08$, $c = 97.84$
5. $\beta = 121.624°$, $b = 0.283$, $c = 0.178$
6. $\alpha = 32.32°$, $c = 574.3$, $a = 263.6$

8.2 Ley de los cosenos

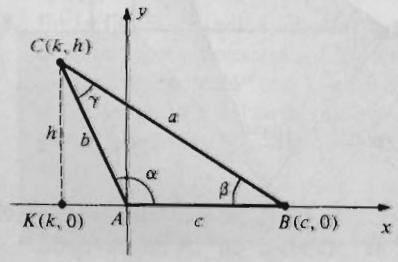
La ley de los senos no se puede aplicar directamente si se conocen dos lados de un triángulo y el ángulo entre ellos o si se conocen los tres lados del triángulo. Sin embargo, podemos hacer uso del siguiente resultado.

LEY DE LOS COSENOS

Si ABC es un triángulo designado de la manera usual, entonces

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

FIGURA 8.9



DEMOSTRACIÓN Se demostrará la primera de las tres fórmulas. Dado el triángulo ABC, se coloca α en posición estándar en un sistema cartesiano como se ilustra en la Figura 8.9. Aunque α está como obtuso la discusión también es válida si α es agudo. Considérese la recta a través de C, paralela al eje y y que corta al eje x en el punto $K(k, 0)$. Si

$d(C, k) = h$, entonces C tiene las coordenadas (k, h). Se deduce que

$$\cos\alpha = \frac{k}{b} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b}$$

y por lo tanto $$k = b\cos\alpha \quad \text{y} \quad h = b\operatorname{sen}\alpha.$$

Como el segmento AB tiene longitud c, las coordenadas de B son $(c, 0)$. Con la fórmula de la distancia,

$$a^2 = [d(B, C)]^2 = (k - c)^2 + (h - 0)^2.$$

Sustituyendo k y h

$$\begin{aligned} a^2 &= (b\cos\alpha - c)^2 + (b\operatorname{sen}\alpha)^2 \\ &= b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha + c^2 + b^2\operatorname{sen}^2\alpha \\ &= b^2(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{aligned}$$

Con esto hemos demostrado la primera fórmula de la Ley de los Cosenos. Se pueden obtener la segunda y tercera de las fórmulas al situar a β y γ, respectivamente, en la posición estándar del sistema coordenado rectangular y usando un procedimiento similar al anterior. □

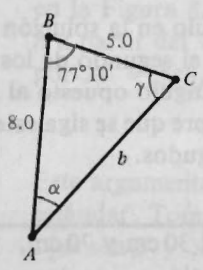
Nótese que si $\alpha = 90°$ en la Figura 8.9, entonces $\cos\alpha = 0$ y la ley de los cosenos da $a^2 = b^2 + c^2$. Esto demuestra que el teorema de Pitágoras es un caso especial de la citada ley de los cosenos.

En vez de memorizar las fórmulas dadas en esta ley, es más conveniente recordar el siguiente enunciado que considera a cada una de ellas.

LEY DE LOS COSENOS (FORMA ALTERNATIVA)

El cuadrado de la longitud de cualquiera de los lados de un triángulo, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos dos veces el producto de estos dos lados y del coseno del ángulo entre ellos.

FIGURA 8.10



EJEMPLO 1 Aproxime las otras partes del triángulo ABC si $a = 5.0$, $c = 8.0$ y $\beta = 77°10'$.

SOLUCIÓN El triángulo se tiene en la Figura 8.10. Al aplicar la ley de los cosenos

$$\begin{aligned} b^2 &= (5.0)^2 + (8.0)^2 - 2(5.0)(8.0)\cos 77°10' \\ &\approx 25 + 64 - (80)(0.2221) \approx 71.2. \end{aligned}$$

Como consecuencia, $b \approx \sqrt{71.2} \approx 8.44 \approx 8.4$.

Ahora usaremos la ley de los senos para determinar el valor de α. De este modo,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a \operatorname{sen}\beta}{b} \approx \frac{(5.0)\operatorname{sen} 77°10'}{8.44} \approx \frac{(5.0)(0.9750)}{8.44} \approx 0.5776.$$

De la Tabla 4 o con una calculadora vemos que $\alpha \approx 35°20'$. De aquí que,

$$\gamma \approx 180° - (77°10' + 35°20') = 67°30'. \quad \blacksquare$$

En el Ejemplo 1, después de haber encontrado la longitud del tercero de los lados, se aplicó la ley de los senos para determinar el valor del segundo ángulo del triángulo. Siempre que se lleve a cabo este procedimiento, es conveniente encontrar el ángulo opuesto al lado más corto (así como lo hicimos) puesto que, invariablemente, el ángulo es agudo. Desde luego, también se puede aplicar la ley de los cosenos para encontrar los otros ángulos.

EJEMPLO 2 Sean $a = 90$, $b = 70$ y $c = 40$ los lados del triángulo ABC. Dé una aproximación de los ángulos α, β y γ.

SOLUCIÓN De acuerdo con la primera de las fórmulas de la ley de los cosenos,

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{4900 + 1600 - 8100}{5600} \approx -0.2857.$$

De la Tabla 4 o con una calculadora vemos que el ángulo de referencia para α es aproximadamente de $73°20'$. De aquí que, $\alpha \approx 180° - 73°20' = 106°40'$.

Similarmente, de la segunda fórmula de la ley de los cosenos,

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{8100 + 1600 - 4900}{7200} \approx 0.6667$$

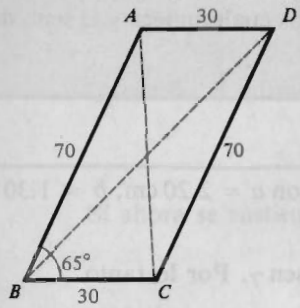
y por consiguiente, $\beta \approx 48°10'$. Finalmente,

$$\gamma \approx 180° - (106°40' + 48°10') = 25°10'. \quad \blacksquare$$

Después de haber determinado el valor del primer ángulo en la solución anterior, pudimos haber aplicado la ley de los senos para encontrar el segundo de los ángulos. Es preferible aplicar la ley de los cosenos para obtener el ángulo opuesto al lado más grande, es decir, el mayor de los ángulos del triángulo, siempre que se siga este procedimiento. Esto garantizará que los otros dos ángulos son agudos.

EJEMPLO 3 Un paralelogramo tiene lados de longitud 30 cm y 70 cm, y uno de los ángulos mide 65°. Calcular la longitud de cada diagonal.

FIGURA 8.11



SOLUCIÓN El paralelogramo y sus diagonales AC y BD se muestran en la Figura 8.11. Puesto que los ángulos opuestos son iguales, $\angle BAD$ es de $180° - 65° = 115°$. Aplicando la ley de los cosenos al triángulo ABC,

$$(AC)^2 = (30)^2 + (70)^2 - 2(30)(70)\cos 65°$$
$$\approx 900 + 4900 - 4200(0.4226) \approx 4025.1$$

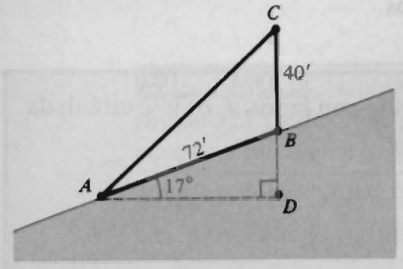
y por tanto $AC \approx \sqrt{4025.1} \approx 63.44 \approx 63$.

De la misma manera, usando el triángulo BAD,

$$(BD)^2 = (30)^2 + (70)^2 - 2(30)(70)\cos 115°$$
$$\approx 900 + 4900 - 4200(-0.4226) \approx 7574.9$$

Por lo tanto $BD \approx \sqrt{7574.9} \approx 87$. ■

FIGURA 8.12



EJEMPLO 4 Un poste vertical de 40 pie de altura se encuentra en la ladera de una colina que forma un ángulo de 17° con la horizontal. Determinar la longitud mínima del cable de retenida necesario para unir la parte superior del poste con un punto directamente abajo de la colina, a 72 pie de la base del poste.

SOLUCIÓN El croquis de la Figura 8.12 muestra los datos. Se desea encontrar AC. Viendo la figura se tiene que

$$\angle ABD = 90° - 17° = 73°$$

y

$$\angle ABC = 180° - 73° = 107°.$$

Aplicando la ley de los cosenos al triángulo

$$(AC)^2 = (72)^2 + (40)^2 - 2(72)(40)\cos 107°$$
$$\approx 5184 + 1600 - 5760(-0.2924) \approx 8468.$$

Por lo tanto, $AC \approx \sqrt{8468} \approx 92$ pie. ■

La ley de los cosenos se puede usar para deducir una fórmula interesante para el área de un triángulo. En primer lugar se demostrará un resultado preliminar.

Dado el triángulo ABC, se coloca al ángulo α en la posición estándar, como se ve en la Figura 8.9. Como se vio en la demostración de la ley de los cosenos, la altura h a partir del vértice C es $h = b \operatorname{sen} \alpha$. Puesto que el área $\mathscr{A}$ del triángulo está dada por $\mathscr{A} = \frac{1}{2}ch$, se tiene que

$$\mathscr{A} = \tfrac{1}{2}bc \operatorname{sen} \alpha.$$

Este argumento es independiente del ángulo específico que se coloque en la posición estándar. Tomando a β y a γ en la posición estándar se obtienen las fórmulas $\mathscr{A} = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} \beta$ y $\mathscr{A} = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \gamma$, respectivamente. Las tres fórmulas se incluyen en el siguiente resultado.

ÁREA DE UN TRIÁNGULO

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de las longitudes de dos lados cualesquiera y el seno del ángulo incluido.

EJEMPLO 5 Determinar el área del triángulo ABC con $a = 2.20\,\text{cm}$, $b = 1.30\,\text{cm}$ y $\gamma = 43°10'$.

SOLUCIÓN Por la discusión precedente $\mathscr{A} = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\gamma$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \tfrac{1}{2}(2.2)(1.3)\,\text{sen}\,43°10' \\ &\approx (1.43)(0.6841) \\ &\approx 0.98\,\text{cm}^2.\end{aligned}$$

El siguiente resultado, conocido como *Fórmula de Herón*, expresa el área de un triángulo en términos de las longitudes de sus lados.

FÓRMULA DE HERÓN

El área $\mathscr{A}$ de un triángulo con lados a, b y c está dada por

$$\mathscr{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

en donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

DEMOSTRACIÓN Usando $\mathscr{A} = \frac{1}{2}bc\,\text{sen}\,\alpha$, se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2c^2\,\text{sen}^2\,\alpha} \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2c^2(1-\cos^2\alpha)} \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{2}bc(1+\cos\alpha)\cdot\tfrac{1}{2}bc(1-\cos\alpha)}.\end{aligned}$$

La fórmula de Herón se obtendrá reemplazando las expresiones bajo el radical por expresiones que contengan solamente a a, b y c.

Usando la ley de los cosenos,

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}bc(1+\cos\alpha) &= \tfrac{1}{2}bc\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}bc\left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \\ &= \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4} \\ &= \frac{(b+c)^2-a^2}{4}.\end{aligned}$$

Esto se puede escribir en la forma

$$\tfrac{1}{2}bc(1 + \cos\alpha) = \frac{(b + c) + a}{2} \cdot \frac{(b + c) - a}{2}.$$

Haciendo el mismo tipo de manipulación

$$\tfrac{1}{2}bc(1 - \cos\alpha) = \frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}.$$

Si ahora se sustituyen las expresiones bajo el radical, se obtiene

$$\mathscr{A} = \sqrt{\frac{b + c + a}{2} \cdot \frac{b + c - a}{2} \cdot \frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}}.$$

Haciendo $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, se ve que

$$s - a = \frac{b + c - a}{2}, \qquad s - b = \frac{a - b + c}{2}, \qquad s - c = \frac{a + b - c}{2}.$$

Sustituyendo en la última fórmula para $\mathscr{A}$ se obtiene la fórmula de Herón. □

EJEMPLO 6 Un granjero tiene un campo triangular cuyos lados tienen una longitud de 125 yardas, 160 yardas y 225 yardas. Calcule el número de acres del campo. (Un acre es equivalente a 4 840 yardas cuadradas.)

SOLUCIÓN Primero se encuentra el área del campo usando la fórmula de Herón con $a = 125$, $b = 160$ y $c = 225$. Así,

$$s = \tfrac{1}{2}(125 + 160 + 225) = \tfrac{1}{2}(510) = 255$$

$$s - a = 255 - 125 = 130$$

$$s - b = 255 - 160 = 95$$

$$s - c = 255 - 225 = 30$$

y

$$\mathscr{A} = \sqrt{(255)(130)(95)(30)} \approx 9720 \text{ yd}^2.$$

Puesto que hay 4 840 yardas cuadradas en un acre, el número de acres es 9 720/4 840, o aproximadamente 2. ■

Ejercicios 8.2

En los Ejercicios 1 a 10, calcule las otras partes del triángulo ABC.

1. $\alpha = 60°$, $b = 20$, $c = 30$
2. $\gamma = 45°$, $b = 10.0$, $a = 15.0$
3. $\beta = 150°$, $a = 150$, $c = 30.0$
4. $\beta = 73°50'$, $c = 14.0$, $a = 87.0$
5. $\gamma = 115°10'$, $a = 1.10$, $b = 2.10$
6. $\alpha = 23°40'$, $c = 4.30$, $b = 70.0$
7. $a = 2.0$, $b = 3.0$, $c = 4.0$
8. $a = 10$, $b = 15$, $c = 12$
9. $a = 25.0$, $b = 80.0$, $c = 60.0$
10. $a = 20.0$, $b = 20.0$, $c = 10.0$

11. El ángulo de una de las esquinas de un terreno en forma triangular mide 73°40′. Si los lados, entre los cuales se encuentra dicho ángulo, tienen una longitud de 175 y 150 pie, determine la longitud del tercero de los lados.

12. Un topógrafo elige un punto C a 420 yardas de A y a 540 yardas de B, con el objeto de determinar la distancia entre los puntos A y B. Dé una aproximación de la distancia AB, si el ángulo ACB mide 63°10′.

13. Dos automóviles parten del mismo punto y viajan sobre dos carreteras que se desvían en 84°. ¿Cuál será la distancia comprendida entre las dos, después de 20 minutos, si sus velocidades son 60 y 45 millas por hora, respectivamente?

14. Los lados de un terreno triangular miden 420, 350 y 180 pie de longitud. Determine el valor del ángulo más pequeño del terreno.

15. Un barco parte del punto P a la 1:00 P.M. y viaja a una velocidad de 24 millas por hora en dirección S35°E. Otro barco parte del mismo punto a la 1:30 P.M. y viaja a 18 millas por hora en dirección S20°O. ¿Cuál será la distancia aproximada entre ambos barcos a las 3:00 P.M.?

16. Un aeroplano parte del punto A a 165 millas en la dirección 130° y luego viaja a 80 millas en la dirección 245°. Aproxime la distancia del aeroplano al punto A.

17. Un atleta corre, a una velocidad constante de una milla cada ocho minutos, durante 20 minutos en la dirección S40°E y luego, en la dirección N20°E los siguientes 16 minutos. Aproxime, al décimo de milla más cercano, la distancia del corredor al punto de partida.

18. Dos puntos P y Q, sobre el suelo horizontal, se localizan en los lados opuestos de un edificio. Con el objeto de determinar la distancia d entre los puntos, un topógrafo elige un punto R a 300 y 438 pie de P y Q, respectivamente. Aproxime d si el ángulo PRQ mide 37°40′.

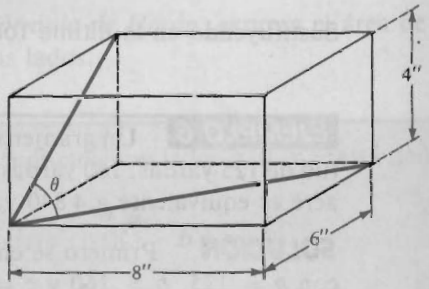
19. Una lancha sigue una ruta triangular, cuyos lados miden 2 km, 4 km y 3 km. Aproxime, al minuto más cercano, la dirección que lleva la lancha en el tercero de los lados, si en el primero de ellos sigue una dirección de N20°O y en el segundo una dirección SD°W, donde D° es el valor en grados de un ángulo agudo.

20. Un rombo tiene lados de longitud de 100 cm y el ángulo en uno de sus vértices es de 70°. Aproxime las longitudes de las diagonales al décimo de centímetro más cercano.

21. En el beisbol de las ligas mayores, las cuatro bases (que forman un cuadrado) están a 90 pie y el montículo del *pitcher* está a 60.5 pie del cojín de *home*. Calcule la distancia del montículo del lanzador a cada una de las otras tres bases.

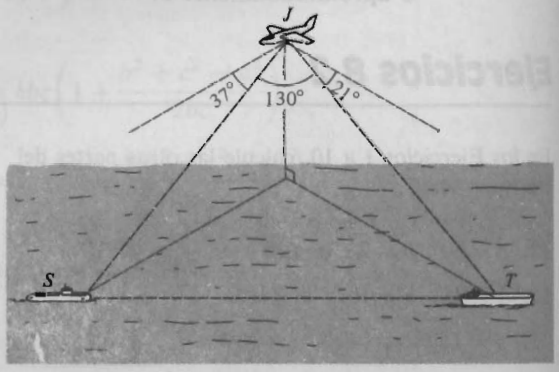
22. Las dimensiones de la caja rectangular que se muestra en la figura son 8 × 6 × 4 pulgadas. Encuentre el ángulo formado por la diagonal de la base y la diagonal del lado de 6 × 4 pulgadas.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 22



23. Un avión *jet* de reconocimiento, J, que vuela a una altura de 10 000 pie, localiza a un submarino S a un ángulo de depresión de 37° y un buque-tanque T a un ángulo de depresión de 21° (véase la figura). Además, encuentra que $\angle SJT$ es de

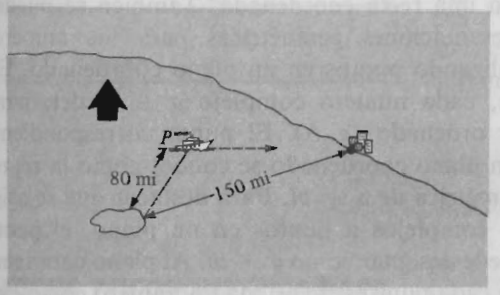
FIGURA PARA EL EJERCICIO 23



130°. Calcule la distancia entre el submarino y el buque-tanque.

24. Un crucero viaja en la dirección N47°E desde una isla hacia un puerto en tierra firme que está a 150 millas de distancia. Después de navegar a través de corrientes muy fuertes hacia el oeste, el capitán encuentra que se ha salido de la ruta y está en la posición P, N33°E a 80 millas de la isla.
   (a) Calcule la distancia del barco del puerto.
   (b) ¿En qué dirección debe enfilar el navío para corregir su rumbo?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 24



25. En la figura se muestra la vista desde arriba de un avión *jet* de combate con el diseño de sus alas.
   (a) Calcule el ángulo ϕ y el área de una ala.
   (b) Si el ancho del fuselaje es de 5.8 pie, determine la envergadura del avión (extensión de un extremo a otro de las alas).

FIGURA PARA EL EJERCICIO 25

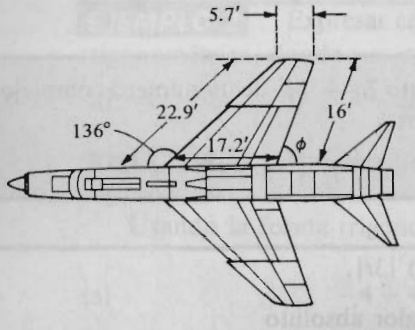
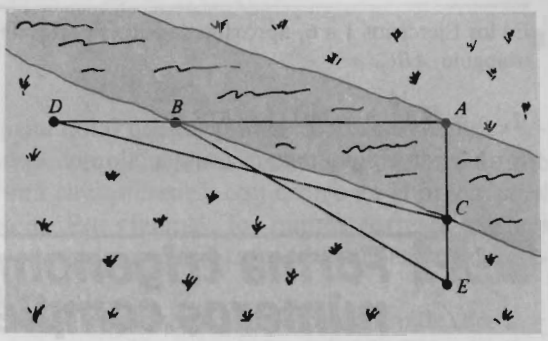


FIGURA PARA EL EJERCICIO 26



26. Para evaluar la distancia a través de un río sin medir ángulos se puede usar el siguiente método de topografía. Se eligen dos puntos B y C en la orilla opuesta y se prolongan los segmentos de recta AB y AC, como se muestra en la figura. Los puntos D y E se escogen como se indica y se miden las distancias BC, BD, BE, CD y CE. Supóngase que $BC = 184$ pie, $BD = 102$ pie, $BE = 218$ pie, $CE = 118$ pie y $CD = 236$ pie.
   (a) Calcule las distancias AB y AC.
   (b) Calcule la distancia más corta a través del río desde el punto A.

En los Ejercicios 27 a 34 aproxime el área del triángulo ABC.

27. $\alpha = 60°$, $b = 20$, $c = 30$

28. $\gamma = 45°$, $b = 10.0$, $a = 15.0$

29 $\beta = 150°$, $a = 150$, $c = 30.0$

30. $\beta = 73°\,50'$, $c = 14.0$, $a = 87.0$

31. $a = 2.0$, $b = 3.0$, $c = 4.0$

32. $a = 10$, $b = 15$, $c = 12$

33. $a = 25.0$, $b = 80.0$, $c = 60.0$

34. $a = 20.0$, $b = 20.0$, $c = 10.0$

35. Un terreno triangular tiene lados de longitud igual a 115 yardas, 140 yardas y 200 yardas. Calcule el número de acres del terreno. (Un acre es equivalente a 4 840 yardas cuadradas.)

36. Obtenga el área de un paralelogramo que tiene lados de longitud 12.0 y 16.0 pie, si un ángulo en un vértice mide 40°.

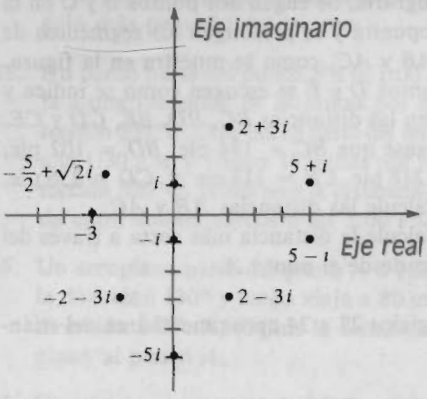
Ejercicios para calculadora 8.2

En los Ejercicios 1 a 6, aproxime las otras partes del triángulo ABC.

1. $\alpha = 48.3°$, $b = 24.7$, $c = 52.8$
2. $\beta = 137.8°$, $a = 178.2$, $c = 431.4$
3. $\gamma = 6.85°$, $a = 0.846$, $b = 0.364$
4. $a = 435$, $b = 482$, $c = 78$
5. $a = 5150$, $b = 1814$, $c = 3429$
6. $a = 0.64$, $b = 0.27$, $c = 0.49$

8.3 Forma trigonométrica para números complejos

FIGURA 8.13



Los números reales se pueden representar geométricamente por puntos en una recta coordenada. También se pueden obtener representaciones geométricas para los números complejos utilizando puntos en un plano coordenado. Específicamente, cada número complejo $a + bi$ determina un único par ordenado (a, b). El punto correspondiente $P(a, b)$ en un plano coordenado se conoce como la **representación geométrica de** $a + bi$. Para destacar que se asignan números complejos a puntos en un plano, el punto $P(a, b)$ se puede designar como $a + bi$. Al plano coordenado en el que a cada punto se le asigna un número complejo, se le llama **plano complejo** en lugar de plano xy. Al eje x se le denomina **eje real**, y al eje y, **eje imaginario**. En la Figura 8.13 se han indicado las representaciones geométricas de varios números complejos. Nótese que para obtener el punto correspondiente al conjugado $a - bi$ de cualquier número complejo $a + bi$ simplemente se efectúa una reflexión a través del eje real.

En el Capítulo 1 se definió el valor absoluto $|a|$ de un número real a y se dijo que, geométricamente, $|a|$ es la distancia entre el origen y el punto en una recta coordenada que corresponde a a. Es entonces natural interpretar el valor absoluto $|a + bi|$ de un número complejo como la distancia $\sqrt{a^2 + b^2}$ entre el origen del plano complejo y el punto (a, b) que corresponde a $a + bi$.

DEFINICIÓN

El **valor absoluto** $|a + bi|$ de un número complejo $a + bi$ se define por

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

EJEMPLO 1 Evaluar (a) $|2 - 6i|$; (b) $|3i|$.

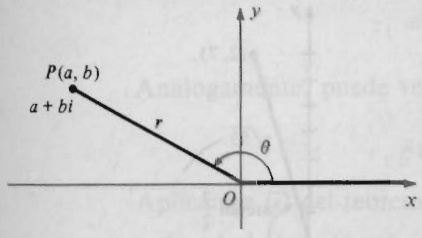
SOLUCIÓN Usando la definición de valor absoluto

(a) $|2 - 6i| = \sqrt{(2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

(b) $|3i| = \sqrt{(0)^2 + (3)^2} = \sqrt{9} = 3$ ■

FIGURA 8.14

$z = a + bi = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$



Vale la pena notar que los puntos correspondientes a todos los números complejos que tienen un valor absoluto fijo están sobre una circunferencia con centro en el origen en el plano complejo. Por ejemplo, los puntos correspondientes a los números complejos z con $|z| = 1$ están en la circunferencia unitaria.

Consideremos un número complejo distinto de cero $z = a + bi$ y su representación geométrica $P(a, b)$, como se ilustra en la Figura 8.14. Sea θ un ángulo cualquiera en la posición estándar cuyo lado terminal está en el segmento OP y sea $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Como $\cos\theta = a/r$ y $\text{sen}\,\theta = b/r$, es claro que $a = r\cos\theta$ y $b = r\,\text{sen}\,\theta$. Sustituyendo a y b en $z = a + bi$ se obtiene

$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r\,\text{sen}\,\theta)i,$$

de donde se obtiene la llamada *forma trigonométrica*.

FORMA TRIGONOMÉTRICA PARA $a + bi$

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$
en donde $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\tan\theta = b/a$.

Algunas veces a $r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ se le llama **forma polar** del número complejo $a + bi$. Una observación común es $r\,\text{cis}\,\theta$. Nótese que θ no es necesariamente arctan b/a, puesto que θ podría no estar entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. De hecho, si $a + bi = 0$, entonces $r = 0$ y *cualquier* ángulo θ puede usarse en la forma trigonométrica.

La forma trigonométrica de $z = a + bi$ no es única puesto que hay un número ilimitado de posibilidades para el ángulo θ. Cuando se usa la forma trigonométrica, el valor absoluto r de z a menudo se refiere como **módulo** de z y al ángulo θ asociado a z se le llama **argumento** (o **amplitud**) de z.

EJEMPLO 2 Expresar cada uno de los siguientes números complejos en la forma trigonométrica, donde $-\pi \le \theta \le \pi$:

(a) $-4 + 4i$ (b) $2\sqrt{3} - 2i$ (c) $2 + 7i$

SOLUCIÓN Los tres números complejos están representados geométricamente en la Figura 8.15.

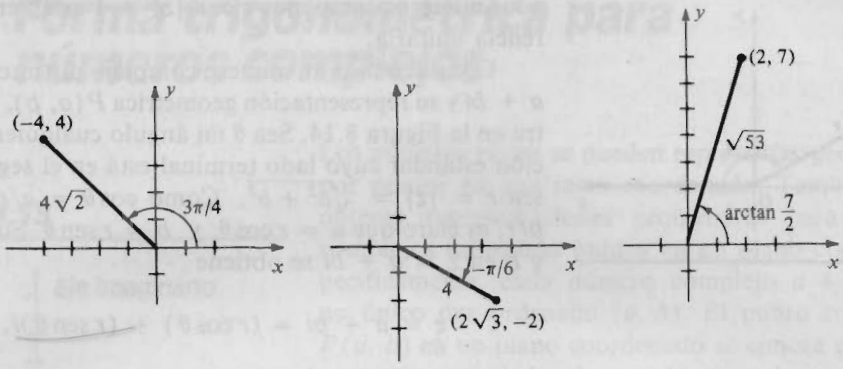
Usando la forma trigonométrica se tiene lo siguiente:

(a) $$-4 + 4i = 4\sqrt{2}\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right]$$

(b) $$2\sqrt{3} - 2i = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

(c) $$2 + 7i = \sqrt{53}\left[\cos\left(\arctan\frac{7}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\arctan\frac{7}{2}\right)\right]$$

FIGURA 8.15



Si los números complejos se expresan en forma trigonométrica, entonces las multiplicaciones y divisiones se pueden llevar a cabo de manera sencilla como lo indica el siguiente teorema.

TEOREMA

Si las formas trigonométricas de dos números complejos z_1 y z_2 están dadas por

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \text{ y } z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

entonces

(i) $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$

(ii) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)], \quad z_2 \neq 0.$

DEMOSTRACIÓN Demostraremos (i) y dejaremos (ii) como ejercicio. De esta manera,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1 r_2\{[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2] \\ &\qquad + i[\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2]\}. \end{aligned}$$

Aplicando las fórmulas de suma para $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ y $\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$ se tiene (i). □

La parte (i) del teorema anterior establece que el módulo del producto de dos nú-

meros complejos es el producto de sus módulos, y el argumento es la suma de sus argumentos. Un enunciado análogo se puede hacer para (ii).

EJEMPLO 3 Usar la forma trigonométrica para evaluar z_1z_2 y z_1/z_2 si $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ y $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$. Verificar usando los métodos de la Sección 2.4.

SOLUCIÓN Del Ejemplo 2,

$$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

Análogamente, puede verificarse que

$$z_2 = -1 + \sqrt{3}i = 2\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right].$$

Aplicando (i) del teorema anterior,

$$z_1z_2 = 8\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 8\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right] = 8i.$$

Como comprobación, si usamos los métodos de la Sección 2.4,

$$z_1z_2 = (2\sqrt{3} - 2i)(-1 + \sqrt{3}i)$$
$$= (-2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + (2 + 6)i = 8i,$$

lo cual está de acuerdo con la respuesta anterior.

Aplicando (ii) del teorema anterior, obtenemos

$$\frac{z_1}{z_2} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -\sqrt{3} - i.$$

Con los métodos de la Sección 2.4 queda

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{3} - 2i}{-1 + \sqrt{3}i} \cdot \frac{-1 - \sqrt{3}i}{-1 - \sqrt{3}i}$$

$$= \frac{(-2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) + (2 - 6)i}{4} = -\sqrt{3} - i. \quad \blacksquare$$

Ejercicios 8.3

En los Ejercicios 1 a 10, determine los valores absolutos.

1. $|3 - 4i|$
2. $|5 + 8i|$
3. $|-6 - 7i|$
4. $|1 - i|$
5. $|8i|$
6. $|i^7|$

7. $|i^{500}|$
8. $|-15i|$
9. $|0|$
10. $|-15|$

Represente geométricamente a los números complejos de los Ejercicios 11 a 20.

11. $4 + 2i$
12. $-5 + 3i$
13. $3 - 5i$
14. $-2 - 6i$
15. $-(3 - 6i)$
16. $(1 + 2i)^2$
17. $2i(2 + 3i)$
18. $(-3i)(2 - i)$
19. $(1 + i)^2$
20. $4(-1 + 2i)$

En los Ejercicios 21 a 40 cambie los números complejos a la forma trigonométrica, en donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

21. $1 - i$
22. $\sqrt{3} + i$
23. $-4\sqrt{3} + 4i$
24. $-2 - 2i$
25. $-20i$
26. 15
27. $-5(1 + \sqrt{3}i)$
28. $-6i$
29. -7
30. $2i(1 - \sqrt{3}i)$
31. $2 + i$
32. $4 - 3i$
33. $-4 - 4i$
34. $-10 + 10i$
35. $6i$
36. -5
37. $\sqrt{3} - i$
38. $-5 - 5\sqrt{3}i$
39. 12
40. 0

En los Ejercicios 41 a 48 encuentre z_1z_2 y z_1/z_2 cambiándolos a la forma trigonométrica y usando el último teorema de esta sección. Verifique usando los métodos de la Sección 2.4.

41. $z_1 = -1 + i,\ z_2 = 1 + i$
42. $z_1 = \sqrt{3} - i,\ z_2 = -\sqrt{3} - i$
43. $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}i,\ z_2 = 5i$
44. $z_1 = -5 + 5i,\ z_2 = -3i$
45. $z_1 = -10,\ z_2 = -4$
46. $z_1 = 2i,\ z_2 = -3i$
47. $z_1 = 4,\ z_2 = 2 - i$
48. $z_1 = -3,\ z_2 = 5 + 2i$
49. Extienda (i) del último teorema de esta sección para el caso de tres números complejos. Generalice para n números complejos.
50. Demuestre (ii) del último teorema de esta sección.

8.4 Teorema de De Moivre y raíces n-ésimas de números complejos

Si z es un número complejo y n es un entero positivo entonces a un número complejo w se le llama **raíz n-ésima de z** si $w^n = z$. En esta sección mostraremos que todo número complejo distinto de cero tiene n raíces n-ésimas diferentes. Puesto que $\mathbb{R}$ está en $\mathbb{C}$, también se concluye que todo número real no cero tiene n raíces n-ésimas diferentes. Si a es un número real positivo y $n = 2$, entonces ya sabemos que las raíces son $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

Si, en el último teorema de la pág. 384, hacemos z_1 y z_2 iguales al número complejo $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, obtenemos

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta).$$

Si ahora aplicamos el mismo teorema a z y z^2, entonces

$$z^2 \cdot z = (r^2 \cdot r)[\cos(2\theta + \theta) + i\,\text{sen}(2\theta + \theta)]$$

o bien

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta).$$

Ahora aplicando el teorema a z^3 y z resulta

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i \operatorname{sen} 4\theta).$$

En general, tenemos el siguiente resultado, el cual debe su nombre al matemático francés Abraham De Moivre (1667-1754).

TEOREMA DE DE MOIVRE

Para todo entero n,

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n[\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta].$$

EJEMPLO 1 Evaluar $(1 + i)^{20}$.

SOLUCIÓN Introduciendo la forma trigonométrica, obtenemos

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right).$$

Ahora por el teorema de De Moivre,

$$(1 + i)^{20} = (2^{1/2})^{20}\left[\cos 20\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen} 20\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2^{10}(\cos 5\pi + i \operatorname{sen} 5\pi) = -1024. \quad \blacksquare$$

Si un número complejo z no cero tiene una raíz n-ésima w, entonces $w^n = z$. Si las formas trigonométricas para w y z son

$$w = s(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \quad \text{y} \quad z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$

entonces, aplicando el teorema de De Moivre a $w^n = z$, obtenemos

$$s^n[\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha] = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Si dos números complejos son iguales, entonces también son iguales sus valores absolutos. Consecuentemente, $s^n = r$, y puesto que s y r son no negativos, $s = \sqrt[n]{r}$. Sustituyendo s^n por r en la ecuación anterior y dividiendo ambos lados por s^n, obtenemos

$$\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta.$$

Se sigue que $$\cos n\alpha = \cos\theta \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} n\alpha = \operatorname{sen}\theta.$$

Puesto que el seno y el coseno tienen períodos igual a 2π, las dos ecuaciones anteriores son ciertas si y sólo si $n\alpha$ y θ difieren por un múltiplo de 2π. De esta manera, para algún entero k,

$$n\alpha = \theta + 2\pi k$$

y por lo tanto $$\alpha = \frac{\theta + 2\pi k}{n}.$$

Sustituyendo en la forma trigonométrica de w, obtenemos la fórmula

$$w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right].$$

Si sustituimos $k = 0, 1, \ldots, n - 1$ sucesivamente, resultan n valores distintos para w y por lo tanto n raíces n-ésimas diferentes de z. Ningún otro valor de k producirá una nueva raíz n-ésima. Por ejemplo, si $k = n$ obtenemos un ángulo $(\theta + 2\pi n)/n$ o $\theta/n + 2\pi$, el cual da la misma raíz n-ésima que $k = 0$. Análogamente $k = n + 1$ produce la misma raíz n-ésima que $k = 1$, etc. Lo mismo es válido para valores negativos de k. La discusión también muestra que los números dados por la fórmula son las únicas posibles raíces n-ésimas de z. Hemos demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA DE RAÍCES n-ÉSIMAS

Si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ es cualquier número complejo no igual a cero y si n es cualquier entero positivo, entonces z tiene precisamente n raíces n-ésimas diferentes w_0, w_1, w_2, $\ldots$, w_{n-1}. Más aún, las raíces están dadas por

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right]$$

en donde $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

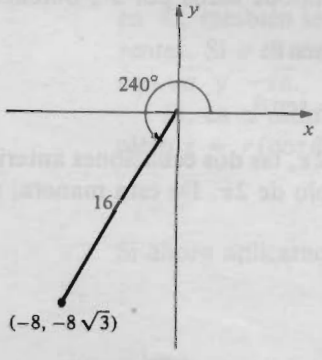
Nótese que todas las raíces n-ésimas de z tienen valor absoluto $\sqrt[n]{r}$ y por lo tanto sus representaciones geométricas se hallan en un círculo de radio $\sqrt[n]{r}$ con centro en O. Más aún, se encuentran a la misma distancia entre sí sobre la circunferencia puesto que la diferencia en los argumentos de raíces n-ésimas sucesivas es $2\pi/n$.

A veces es conveniente usar medidas en grados para θ. En este caso la fórmula en el teorema anterior se convierte en

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + k \cdot 360}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + k \cdot 360}{n}\right)\right]$$

en donde $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

FIGURA 8.16



EJEMPLO 2 Hallar las cuatro raíces cuartas de $-8 - (8\sqrt{3})i$.

SOLUCIÓN La representación geométrica del número complejo dado se muestra en la Figura 8.16. Introduciendo la forma trigonométrica, tenemos

$$-8 - (8\sqrt{3})i = 16(\cos 240° + i\,\text{sen}\,240°).$$

Por el teorema anterior, con $n = 4$, y observando que $\sqrt[4]{16} = 2$, las raíces cuartas están dadas por

$$w_k = 2\left[\cos\left(\frac{240° + k \cdot 360°}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{240° + k \cdot 360°}{4}\right)\right]$$

en donde $k = 0, 1, 2$ y 3. La fórmula se puede volver a escribir como

$$w_k = 2[\cos(60° + k \cdot 90°) + i \operatorname{sen}(60° + k \cdot 90°)].$$

Sustituyendo k por 0, 1, 2 y 3 obtenemos las siguientes raíces cuartas:

$$w_0 = 2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = 1 + \sqrt{3}i$$
$$w_1 = 2(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°) = -\sqrt{3} + i$$
$$w_2 = 2(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) = -1 - \sqrt{3}i$$
$$w_3 = 2(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°) = \sqrt{3} - i$$ ■

EJEMPLO 3 Obtener las seis raíces sextas de -1 y representarlas geométricamente.

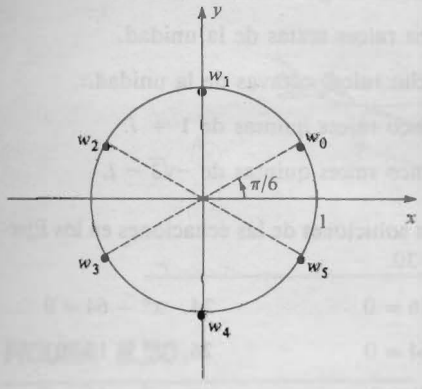
SOLUCIÓN Escribiendo $-1 = 1(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$ y usando el teorema de raíces n-ésimas con $n = 6$, encontramos que las raíces sextas de -1 están dadas por

$$w_k = \cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right)$$

o bien

$$w_k = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k\right).$$

FIGURA 8.17



Sustituyendo k por 0, 1, 2, 3, 4 y 5 obtenemos las raíces sextas de -1, a saber:

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i$$

$$w_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_3 = \cos\frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$w_4 = \cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -i$$

$$w_5 = \cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Puesto que $|-1| = 1$, los puntos que representan las raíces de -1 están todos en la circunferencia unitaria que se muestra en la Figura 8.17. Como ya se había notado antes, están igualmente espaciadas en dicha circunferencia. ■

El caso especial en el que $z = 1$ es de interés particular. Las n raíces n-ésimas diferentes de 1 se llaman **raíces n-ésimas de la unidad.**

EJEMPLO 4 Obtener las tres raíces cúbicas de la unidad.

SOLUCIÓN Escribiendo $1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0$ y usando el teorema de raíces n-ésimas con $n = 3$, obtenemos las tres raíces

$$w_k = \cos\frac{2\pi k}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi k}{3}$$

en donde $k = 0$, 1 y 2. Sustituyendo por k nos da

$$w_0 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$$

$$w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

$$w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i.$$

■

Compárese la solución del Ejemplo 4 con la del Ejemplo 6 de la Sección 2.4.

Ejercicios 8.4

En los Ejercicios 1 a 12 use el teorema de De Moivre para expresar los números dados en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

1. $(3 + 3i)^5$
2. $(1 + i)^{12}$
3. $(1 - i)^{10}$
4. $(-1 + i)^8$
5. $(1 - \sqrt{3}i)^3$
6. $(1 - \sqrt{3}i)^5$
7. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{15}$
8. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{25}$
9. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{20}$
10. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{50}$
11. $(\sqrt{3} + i)^7$
12. $(-2 - 2i)^{10}$
13. Obtenga las dos raíces cuadradas de $\sqrt{3} + i$.
14. Obtenga las dos raíces cuadradas de $-9i$.
15. Halle las cuatro raíces cuartas de $-1 - \sqrt{3}i$.
16. Halle las cuatro raíces cuartas de $-8 + 8\sqrt{3}i$.
17. Determine las tres raíces cúbicas de $-27i$.
18. Determine las tres raíces cúbicas de $64i$.

En los Ejercicios 19 a 22 encuentre las raíces indicadas y represéntelas geométricamente.

19. Las seis raíces sextas de la unidad.
20. Las ocho raíces octavas de la unidad.
21. Las cinco raíces quintas de $1 + i$.
22. Las cinco raíces quintas de $-\sqrt{3} - i$.

Obtenga las soluciones de las ecuaciones en los Ejercicios 23 a 30.

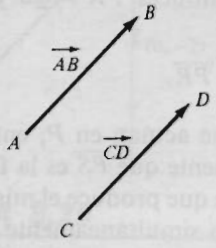
23. $x^4 - 16 = 0$
24. $x^6 - 64 = 0$
25. $x^6 + 64 = 0$
26. $x^5 + 1 = 0$
27. $x^3 + 8i = 0$
28. $x^3 - 64i = 0$
29. $x^5 - 243 = 0$
30. $x^4 + 81 = 0$

8.5 Vectores

En el Capítulo 1 hemos designado direcciones (positivas) a ciertas rectas, como los ejes x y y. De la misma forma, un **segmento de recta dirigido** es un segmento al cual se le asigna una dirección. A un segmento rectilíneo dirigido también se le puede llamar **vec-**

tor. Se acostumbra usar el símbolo $\overrightarrow{AB}$ para denotar al vector que va del punto A (considerado como **punto inicial**) al punto B llamado **punto final** (véase Figura 8.25). A la longitud del segmento dirigido se le llama **magnitud** del vector $\overrightarrow{AB}$ y se denota por $|\overrightarrow{AB}|$. Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son iguales, es decir $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, si y sólo si tienen la misma magnitud y dirección, como se ilustra en la Figura 8.25. De aquí que, sin cambiar su dirección ni magnitud, podamos trasladar a un vector de una posición a otra. A los vectores de este tipo se les denomina **vectores libres**.

FIGURA 8.18



Se pueden representar muchos conceptos físicos mediante vectores. Para ilustrar, suponga que un avión desciende a una velocidad constante de 100 mi/h y que su línea de vuelo forma un ángulo de 20° con la horizontal. El vector de la Figura 8.26(i), donde se han elegido las unidades de tal forma que la magnitud sea 100, es una representación de estos dos hechos. Como se muestra en la figura, emplearemos letras de tipo negro, tal como **v**, para denotar a un vector cuyo punto final no se ha especificado. Al vector **v** de este ejemplo se le llama **vector velocidad**. La velocidad del aeroplano es la magnitud $|\mathbf{v}|$ de **v**.

Como un segundo ejemplo, suponga que una persona empuja un objeto hacia arriba con una fuerza de 5 kgf, como sería el caso de levantar algo de 5 kgf de peso. Se puede representar este hecho por el vector **F** de la Figura 8.19(ii). A un vector que simboliza a la acción de tirar o de empujar algún objeto se le llama **vector fuerza**.

FIGURA 8.19

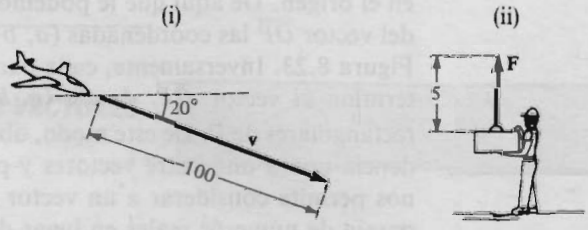
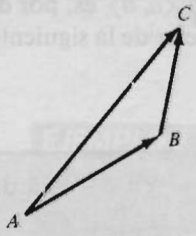


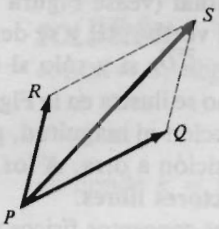
FIGURA 8.20



Otro uso de los vectores consiste en considerar a $\overrightarrow{AB}$ como el segmento de una recta de A a B, que determina la trayectoria en que se mueve un punto (o alguna partícula física). En este caso nos referiremos a $\overrightarrow{AB}$ como un **desplazamiento** del punto (o partícula). Como se ilustra en la Figura 8.20, un desplazamiento $\overrightarrow{AB}$, seguido de $\overrightarrow{BC}$, nos conduce al mismo punto que el desplazamiento $\overrightarrow{AC}$. A este último vector se le llama **suma (vectorial)** de los dos primeros y se denota como

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

FIGURA 8.21

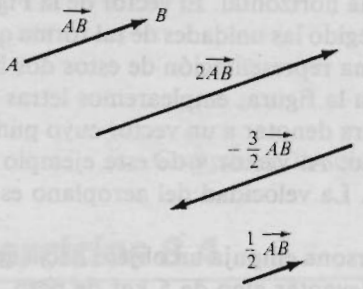


Como estamos trabajando con vectores libres, podemos sumar dos vectores cualesquiera colocando el punto inicial de uno en el punto final del otro y procediendo como se muestra en la Figura 8.20 (vector $\overrightarrow{AC}$).

En la Figura 8.21 hemos empleado a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ para ilustrar que podemos también obtener la suma de dos vectores considerando vectores iguales a los originales y con el mismo punto inicial. Si construimos el paralelogramo $RPQS$ con $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PQ}$ de lados adyacentes, entonces $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$ y en consecuencia

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}.$$

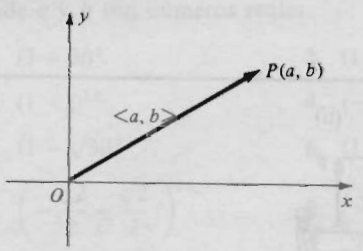
FIGURA 8.22



Si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son dos fuerzas que actúan en P, entonces se puede demostrar experimentalmente que $\overrightarrow{PS}$ es la **fuerza resultante**, es decir, la fuerza única que produce el mismo efecto que las dos fuerzas actuando simultáneamente.

El producto $c\overrightarrow{AB}$, donde c es un número real y $\overrightarrow{AB}$ es un vector, se define como el vector cuya magnitud es $|c|$ veces la magnitud de $\overrightarrow{AB}$ y cuya dirección es la misma que $\overrightarrow{AB}$ si $c > 0$, y opuesta a $\overrightarrow{AB}$ si $c < 0$. En la Figura 8.22 hemos dado algunas ilustraciones geométricas. Consideraremos que c es un **escalar** y $c\overrightarrow{AB}$, un **múltiplo escalar** de $\overrightarrow{AB}$.

FIGURA 8.23



A continuación introduciremos un plano coordenado y supondremos que todos los vectores están en ese plano. Como es posible cambiar la posición de un vector, sin alterar su magnitud y dirección, podemos colocar su punto inicial en el origen. De aquí que le podemos asignar al punto final del vector $\overrightarrow{OP}$ las coordenadas (a, b) como se muestra en la Figura 8.23. Inversamente, cada pareja ordenada (a, b) determina al vector $\overrightarrow{OP}$, donde (a, b) son las coordenadas rectangulares de P. De este modo, obtenemos una correspondencia uno a uno entre vectores y parejas ordenadas. Esto nos permite considerar a un vector en un plano como una pareja de números reales en lugar de un segmento de recta dirigido.

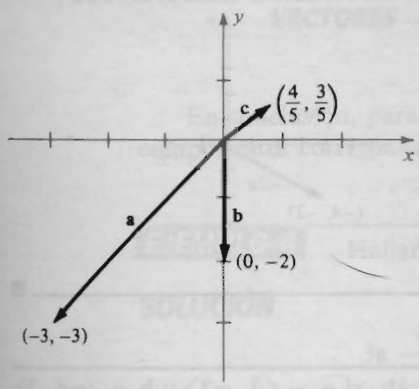
Para evitar confusión con la notación para intervalos abiertos, usaremos el símbolo $\langle a, b\rangle$ para designar a la pareja ordenada que representa un vector. Más aún, consideraremos que $\langle a, b\rangle$ es un vector que denotaremos por una letra de tipo negro. A los números a y b se les llama **componentes**. La magnitud de $\langle a, b\rangle$ es, por definición, la distancia del origen al punto $P(a, b)$. Esto se puede enunciar de la siguiente manera.

DEFINICIÓN

La **magnitud** $|\mathbf{v}|$ del vector $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ está dada por

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

FIGURA 8.24



EJEMPLO 1 Trace cada uno de los siguientes vectores, y encuentre su magnitud y el ángulo positivo θ más pequeño que está determinado por el eje positivo x y el vector.

(a) $\mathbf{a} = \langle -3, -3 \rangle$ (b) $\mathbf{b} = \langle 0, -2 \rangle$ (c) $\mathbf{c} = \langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \rangle$

SOLUCIÓN En la Figura 8.24 hemos trazado los vectores. Al aplicar la definición de magnitud y los conocimientos de trigonometría, obtenemos:

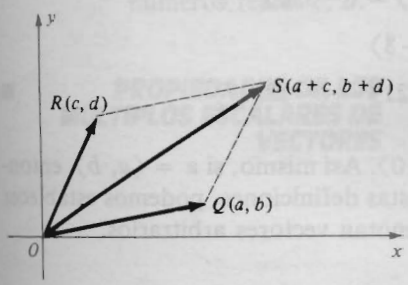
(a) $|\mathbf{a}| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}; \quad \theta = 5\pi/4$

(b) $|\mathbf{b}| = \sqrt{0 + 4} = 2; \quad \theta = 3\pi/2$

(c) $|\mathbf{c}| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1; \quad \theta = \arctan \frac{3}{4}$. ■

FIGURA 8.25

$\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle$



Si $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$ son los vectores correspondientes a $\langle a, b \rangle$ y $\langle c, d \rangle$, respectivamente, y si $\overrightarrow{OS}$ es el vector correspondiente a $\langle a + c, b + d \rangle$, como se ilustra en la Figura 8.25, entonces se puede demostrar que O, Q, S y R son los vértices de un paralelogramo. De aquí que

$$\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OS}.$$

Al expresar este hecho en términos de parejas ordenadas, obtenemos la siguiente regla para la adición de vectores.

ADICIÓN (O SUMA) DE VECTORES

$$\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle.$$

Aún cuando no la demostremos, la regla correspondiente al múltiplo escalar $k\overrightarrow{OP}$ de un vector, está dada por

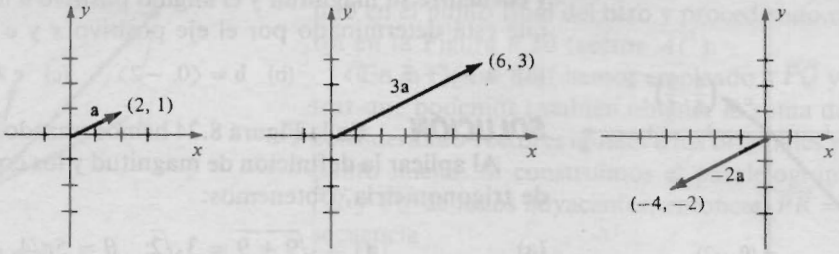
MÚLTIPLOS ESCALARES DE VECTORES

$$k\langle a, b \rangle = \langle ka, kb \rangle$$

EJEMPLO 2 Determinar $3\mathbf{a}$ y $-2\mathbf{a}$, si $\mathbf{a} = \langle 2, 1 \rangle$, y representar geométricamente estos vectores.

SOLUCIÓN Si $\mathbf{a} = \langle 2, 1 \rangle$, entonces, al aplicar la regla de múltiplos escalares, $3\mathbf{a} = \langle 6, 3 \rangle$ y $-2\mathbf{a} = \langle -4, -2 \rangle$. En la Figura 8.26 se muestran las representaciones geométricas.

FIGURA 8.26



■

EJEMPLO 3 Determinar $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $4\mathbf{a}$ y $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, si $\mathbf{a} = \langle 3, -2\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -6, 7\rangle$.

SOLUCIÓN Al aplicar las reglas de suma y múltiplos escalares de vectores,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 3, -2\rangle + \langle -6, 7\rangle = \langle -3, 5\rangle$$

$$4\mathbf{a} = 4\langle 3, -2\rangle = \langle 12, -8\rangle$$

$$2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = \langle 6, -4\rangle + \langle -18, 21\rangle = \langle -12, 17\rangle$$ ■

Por definición, el **vector cero 0** es igual a $\langle 0, 0\rangle$. Así mismo, si $\mathbf{a} = \langle a, b\rangle$, entonces definimos $-\mathbf{a} = \langle -a, -b\rangle$. De acuerdo con estas definiciones, podemos establecer las siguientes propiedades, en donde **a**, **b** y **c** denotan vectores arbitrarios.

PROPIEDADES PARA LA ADICIÓN DE VECTORES

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$
$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$
$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$
$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

Se pueden demostrar cada una de estas propiedades por medio de la regla de la suma de vectores y las propiedades de números reales. Por ejemplo, si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ y si $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$, entonces como $a_1 + b_1 = b_1 + a_1$ y $a_2 + b_2 = b_2 + a_2$, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle \\ &= \langle b_1 + a_1, b_2 + a_2\rangle \\ &= \mathbf{b} + \mathbf{a}.\end{aligned}$$

Se dejan como ejercicio las demás demostraciones.

La operación de **sustracción** (o **resta**) de vectores, denotada por "−", se define por $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$. Si empleamos la notación de parejas ordenadas para **a** y **b** y usamos el hecho de que $-\mathbf{b} = \langle -b_1, -b_2\rangle$, obtenemos

SUSTRACCIÓN O RESTA DE VECTORES

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle.$$

En conclusión, para determinar $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ debemos restar a las componentes de $\mathbf{a}$ las componentes correspondientes de $\mathbf{b}$.

EJEMPLO 4 Hallar $3\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ si $\mathbf{a} = \langle 2, -4 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 6, 7 \rangle$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 3\mathbf{a} - 5\mathbf{b} &= 3\langle 2, -4 \rangle - 5\langle 6, 7 \rangle \\ &= \langle 6, -12 \rangle - \langle 30, 35 \rangle = \langle -24, -47 \rangle \end{aligned}$$

■

Las siguientes propiedades se pueden demostrar para cualesquiera vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y números reales c, d.

PROPIEDADES DE LOS MÚLTIPLOS ESCALARES DE VECTORES

$$\begin{aligned} c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= c\mathbf{a} + c\mathbf{b} \\ (c + d)\mathbf{a} &= c\mathbf{a} + d\mathbf{a} \\ (cd)\mathbf{a} &= c(d\mathbf{a}) = d(c\mathbf{a}) \\ 1\mathbf{a} &= \mathbf{a} \\ 0\mathbf{a} &= \mathbf{0} = c\mathbf{0} \end{aligned}$$

Demostraremos la primera de las propiedades y se dejará al lector, como ejercicio demostrar las otras. Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, entonces

$$\begin{aligned} c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle \\ &= \langle ca_1 + cb_1, ca_2 + cb_2 \rangle \\ &= \langle ca_1, ca_2 \rangle + \langle cb_1, cb_2 \rangle \\ &= c\langle a_1, a_2 \rangle + c\langle b_1, b_2 \rangle \\ &= c\mathbf{a} + c\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Los vectores especiales $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ se definen como

DEFINICIÓN DE i Y j

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle, \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$$

Un **vector unitario** es un vector de magnitud 1. Los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y el vector $\mathbf{c} = \langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \rangle$ del Ejemplo 1 son vectores unitarios.

Los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ se pueden usar para denotar de manera alternativa a un vector. Concretamente, si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, entonces

$$\mathbf{a} = \langle a_1, 0\rangle + \langle 0, a_2\rangle = a_1\langle 1, 0\rangle + a_2\langle 0, 1\rangle,$$

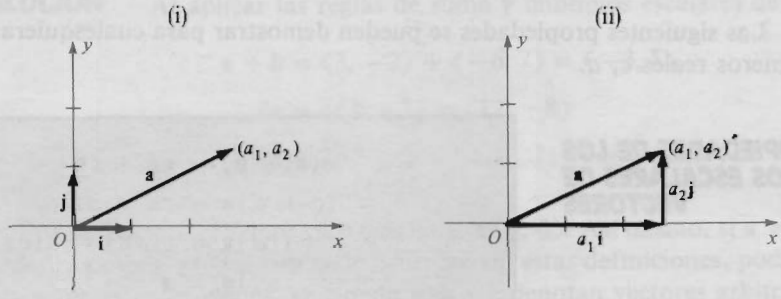
esto es,

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$$

En la Figura 8.27(i) se han ilustrado los vectores correspondientes a **i**, **j** y **a**. Como **i** y **j** son vectores unitarios, podemos representar a $a_1\mathbf{i}$ y $a_2\mathbf{j}$ por vectores horizontal y vertical de magnitudes $|a_1|$ y $|a_2|$, respectivamente, como se ilustra en (*ii*). Puede considerarse que el vector **a** es la suma de estos vectores. Por esta razón, a a_1 se le llama **componente horizontal** y a a_2, **componente vertical** del vector **a**.

FIGURA 8.27

$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$



Al vector suma $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ se le llama **combinación lineal** de **i** y **j**. Si $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$, entonces podemos emplear esta notación para las reglas de suma, resta y multiplicación por un escalar de vectores, como a continuación se indica.

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) + (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}$$

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) - (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j}$$

$$c(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) = (ca_1)\mathbf{i} + (ca_2)\mathbf{j}.$$

Estas fórmulas muestran que podemos considerar a una combinación lineal de **i** y **j** como una suma algebraica común.

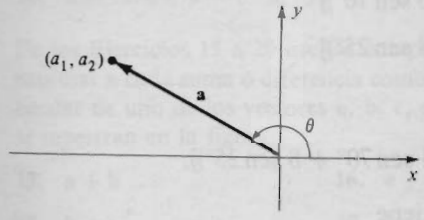
EJEMPLO 5 Expresar a $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ como una combinación lineal de **i** y **j**, si $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} &= 3(5\mathbf{i} + \mathbf{j}) - 2(4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}) \\ &= (15\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - (8\mathbf{i} - 14\mathbf{j}) \\ &= 7\mathbf{i} + 17\mathbf{j} \end{aligned}$$

■

FIGURA 8.28



Sea θ un ángulo en la posición estándar, medido del eje positivo x al vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ como se ilustra en la Figura 8.28.

Las siguientes fórmulas son una consecuencia de que $\cos\theta = a_1/|\mathbf{a}|$ y $\operatorname{sen}\theta = a_2/|\mathbf{a}|$.

COMPONENTES HORIZONTAL Y VERTICAL DE $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$

Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, entonces

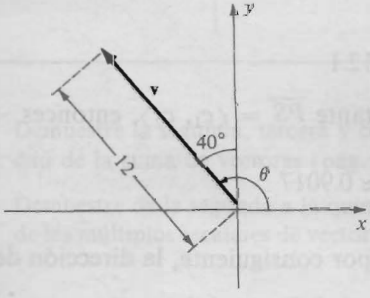
$$a_1 = |\mathbf{a}| \cos\theta, \qquad a_2 = |\mathbf{a}| \operatorname{sen}\theta,$$

en donde $\tan\theta = a_2/a_1$.

Usando las fórmulas anteriores.

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle &= \langle |\mathbf{a}| \cos\theta, |\mathbf{a}| \operatorname{sen}\theta \rangle \\ &= |\mathbf{a}| \cos\theta\mathbf{i} + |\mathbf{a}| \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}\end{aligned}$$

FIGURA 8.29



EJEMPLO 6 Si un viento de 12 mi/h sopla en la dirección N40°W, expresar su velocidad como un vector $\mathbf{v}$.

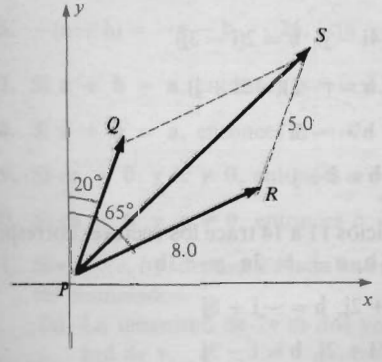
SOLUCIÓN El vector $\mathbf{v}$ se representa geométricamente en la Figura 8.29. Como $\theta = 90° + 40° = 130°$, se tiene que

$$\mathbf{v} = (12 \cos 130°)\mathbf{i} + (12 \operatorname{sen} 130°)\mathbf{j}.$$

Si se desea una aproximación, entonces con la Tabla 4 o una calculadora.

$$\mathbf{v} \approx (-7.7)\mathbf{i} + (9.2)\mathbf{j}. \quad \blacksquare$$

FIGURA 8.30



EJEMPLO 7 Dos fuerzas $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ de magnitudes de 5.0 kgf y 8.0 kgf, respectivamente, ejercen presión sobre el punto P. Aproximar, al grado más cercano, la dirección del vector resultante $\overrightarrow{PS}$ y calcular $|\overrightarrow{PS}|$, al décimo más cercano, si la dirección de $\overrightarrow{PQ}$ es N20°E y la de PR es N65°E.

SOLUCIÓN Con el objeto de emplear componentes, introduzcamos un sistema coordenado con origen en el punto P, como se muestra en la Figura 5.10. Nótese que los ángulos del eje x a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ miden 70° y 25°, respectivamente.

Al emplear las fórmulas de componentes horizontal y vertical, obtenemos

$$\overrightarrow{PQ} = (5 \cos 70°)\mathbf{i} + (5 \operatorname{sen} 70°)\mathbf{j}$$
$$\overrightarrow{PR} = (8 \cos 25°)\mathbf{i} + (8 \operatorname{sen} 25°)\mathbf{j}.$$

Como $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$,

$$\overrightarrow{PS} = (5 \cos 70° + 8 \cos 25°)\mathbf{i} + (5 \operatorname{sen} 70° + 8 \operatorname{sen} 25°)\mathbf{j}.$$

Con la Tabla 4 o usando una calculadora se obtiene

$$\overrightarrow{PS} \approx (8.9604)\mathbf{i} + (8.0793)\mathbf{j} \approx (9.0)\mathbf{i} + (8.1)\mathbf{j}.$$

En consecuencia,

$$|\overrightarrow{PS}| \approx \sqrt{(9.0)^2 + (8.1)^2} \approx 12.1$$

Se puede encontrar también $|\overrightarrow{PS}|$ usando la ley de los cosenos (véase el Ejemplo 3 de la Sección 8.2). Puesto que $\angle QPR = 45°$, se deduce que $\angle PRS = 135°$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PS}|^2 &= (8.0)^2 + (5.0)^2 - 2(8.0)(5.0) \cos 135° \\ &= 64 + 25 - 80(-\sqrt{2}/2) \\ &= 89 + 40\sqrt{2} \approx 145.6 \end{aligned}$$

Así,

$$|\overrightarrow{PS}| \approx \sqrt{145.6} \approx 12.1$$

Si θ es el ángulo del eje positivo x a la resultante $\overrightarrow{PS} = \langle c_1, c_2 \rangle$, entonces

$$\tan \theta = \frac{c_2}{c_1} \approx \frac{8.0793}{8.9604} \approx 0.9017$$

De la Tabla 4 o con una calculadora, $\theta \approx 42°$, y por consiguiente, la dirección de $\overrightarrow{PS}$ es aproximadamente N48°E. ■

Ejercicios 8.5

En cada uno de los Ejercicios 1 a 10 evalúe $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $4\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$ y $4\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$.

1. $\mathbf{a} = \langle 2, -3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 4 \rangle$
2. $\mathbf{a} = \langle -2, 6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 3 \rangle$
3. $\mathbf{a} = -\langle 7, -2 \rangle$, $\mathbf{b} = 4\langle -2, 1 \rangle$
4. $\mathbf{a} = 2\langle 5, -4 \rangle$, $\mathbf{b} = -\langle 6, 0 \rangle$
5. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$
6. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$
7. $\mathbf{a} = -(4\mathbf{i} - \mathbf{j})$, $\mathbf{b} = 2(\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$
8. $\mathbf{a} = 8\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = (-3)(-2\mathbf{i} + \mathbf{j})$
9. $\mathbf{a} = 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i}$
10. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

En los Ejercicios 11 a 14 trace los vectores correspondientes a $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $2\mathbf{a}$ y $-3\mathbf{b}$.

11. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
12. $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

13. $\mathbf{a} = \langle -4, 6\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 3\rangle$

14. $\mathbf{a} = \langle 2, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 0\rangle$

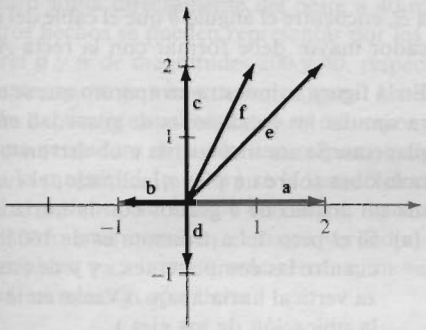
En los Ejercicios 15 a 20 use las componentes para expresar a cada suma o diferencia como un múltiplo escalar de uno de los vectores **a**, **b**, **c**, **d**, **e** o **f**, que se muestran en la figura.

15. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ **16.** $\mathbf{c} - \mathbf{d}$

17. $\mathbf{b} + \mathbf{e}$ **18.** $\mathbf{f} - \mathbf{b}$

19. $\mathbf{b} + \mathbf{d}$ **20.** $\mathbf{e} + \mathbf{c}$

FIGURA PARA LOS EJERCICIOS 15 A 20



21. Demuestre la segunda, tercera y cuarta propiedad de la suma de vectores (pág. 394).

22. Demuestre de la segunda a la quinta propiedad de los múltiplos escalares de vectores (pág. 395).

Demuestre cada una de las propiedades de los Ejercicios 23 a 30, donde $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$, y c es cualquier número real.

23. $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$ **24.** $(-c)\mathbf{a} = -c\mathbf{a}$

25. $-(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\mathbf{a} - \mathbf{b}$ **26.** $c(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = c\mathbf{a} - c\mathbf{b}$

27. Si $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a}$, entonces $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$.

28. Si $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a}$, entonces $\mathbf{b} = 0$.

29. Si $c\mathbf{a} = \mathbf{0}$ y $c \neq 0$, entonces $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

30. Si $c\mathbf{a} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, entonces $c = 0$.

31. Si $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$, demuestre cada uno de los siguientes enunciados.

(a) La magnitud de $2\mathbf{v}$ es dos veces la magnitud de $\mathbf{v}$.

(b) La magnitud de $\frac{1}{2}\mathbf{v}$ es la mitad de la magnitud de $\mathbf{v}$.

(c) La magnitud de $-2\mathbf{v}$ es dos veces la magnitud de $\mathbf{v}$.

(d) Si k es cualquier número real, entonces la magnitud de $k\mathbf{v}$ es k veces la magnitud de $\mathbf{v}$.

32. Si $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle c, d\rangle$, dé una interpretación geométrica de $\mathbf{v} - \mathbf{w}$.

El **producto de punto** (o **escalar**) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ se define como $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = a_1b_1 + a_2b_2$ si $\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{u} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. Demuestre las propiedades de los Ejercicios 33 a 36.

33. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ **34.** $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$

35. $(c\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})$, para todo número real c.

36. $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, en donde $\mathbf{w} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j}$

En los Ejercicios 37 a 44, determine la magnitud de **a** y el ángulo θ positivo más pequeño, del eje positivo x al vector $\overrightarrow{OP}$ correspondiente a **a**.

37. $\mathbf{a} = \langle 3, -3\rangle$ **38.** $\mathbf{a} = \langle -2, -2\sqrt{3}\rangle$

39. $\mathbf{a} = \langle -5, 0\rangle$ **40.** $\mathbf{a} = \langle 0, 10\rangle$

41. $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ **42.** $\mathbf{a} = 10\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$

43. $\mathbf{a} = -18\mathbf{j}$ **44.** $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

Los incisos (a) y (b) de los Ejercicios 45 a 48 representan las magnitudes y direcciones de dos fuerzas que se ejercen sobre el punto P. Aproxime la magnitud (a dos cifras) y la dirección (al grado más cercano) de la fuerza resultante.

45. (a) 90 kgf, N75°W **46.** (a) 20 kgf, S17°W

(b) 60 kgf, S5°E (b) 50 kgf, N82°W

47. (a) 6.0 lbf, 110° **48.** (a) 70 lbf, 320°

(b) 2.0 lbf, 215° (b) 40 lbf, 30°

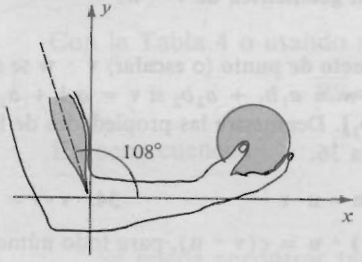
Aproxime las componentes horizontal y vertical de los vectores que se describen en los Ejercicios 49 a 52.

49. Un *quarterback* lanza el balón de fútbol americano con una velocidad de 50 pie/s a un ángulo de 35° con la horizontal.

50. Una niña tira de su trineo a través de la nieve ejerciendo una fuerza de 20 libras (lbf), a un ángulo de 40° con la horizontal.

51. El músculo bíceps ejerce una fuerza de 200 lbf cuando soporta el antebrazo y una pesa sostenida con la mano. Como se muestra en la figura, el músculo forma un ángulo de 108° con el antebrazo.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 51



52. Un avión *jet* se aproxima a la pista de aterrizaje a un ángulo de 7.5° con la horizontal, viajando a una velocidad de 160 millas por hora (mi/h).

Cuando las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ... actúan sobre un punto P, la fuerza neta (o resultante) $\mathbf{F}$ es la suma $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots$. Si $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, el sistema de fuerzas está *en equilibrio*. En los Ejercicios 53 a 56, las fuerzas dadas actúan en el origen de un plano xy.

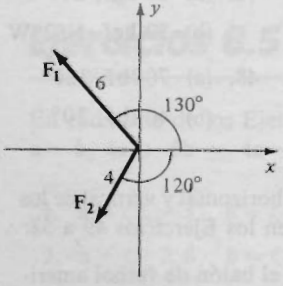
(a) Calcule la fuerza neta $\mathbf{F}$.

(b) Calcule la fuerza adicional $\mathbf{G}$ que se requiere para que haya equilibrio.

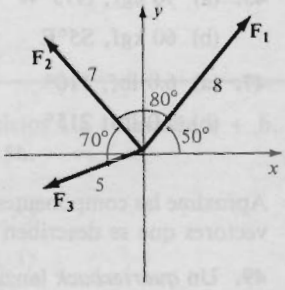
53. $\mathbf{F}_1 = \langle 4, 3\rangle$, $\mathbf{F}_2 = \langle -2, -3\rangle$, y $\mathbf{F}_3 = \langle 5, 2\rangle$

54. $\mathbf{F}_1 = \langle -3, -1\rangle$, $\mathbf{F}_2 = \langle 0, -3\rangle$, y $\mathbf{F}_3 = \langle 3, 4\rangle$

55.

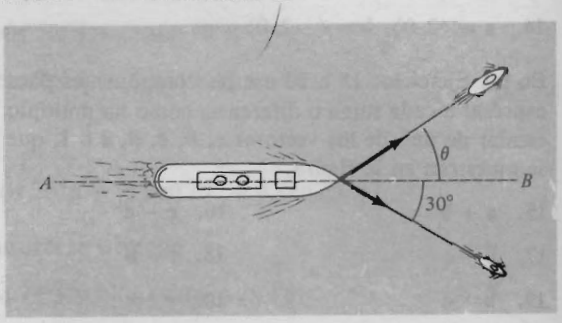


56.



57. Dos remolcadores arrastran un barco hacia el puerto, como se muestra en la figura. El remolcador mayor ejerce una fuerza de tracción de 4000 lbf sobre su cable, mientras que el más pequeño ejerce una tracción de 3200 lbf sobre el cable. Si el barco debe viajar en línea recta de A a B, encuentre el ángulo θ que el cable del remolcador mayor debe formar con la recta AB.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 57

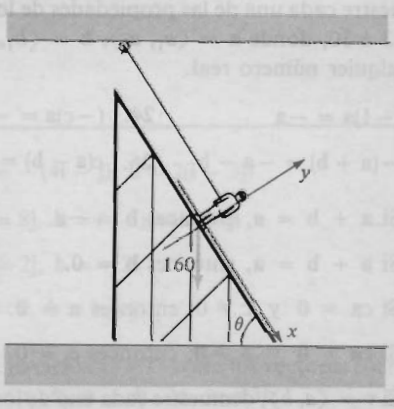


58. En la figura se muestra un aparato que se usa para simular las condiciones de gravedad en otros planetas. Se ata una cuerda a un astronauta que maniobra sobre un plano inclinado, el cual forma un ángulo de θ grados con la horizontal.

(a) Si el peso del astronauta es de 160 lbf, encuentre las componentes x y y de esta fuerza vertical hacia abajo. (Véase en la figura la ubicación de los ejes.)

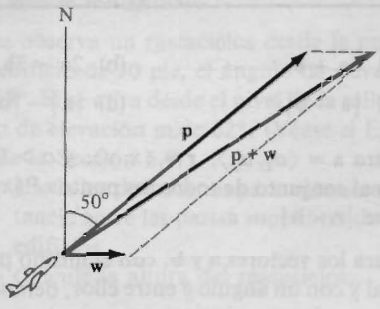
(b) La componente y en (a) es el peso del astronauta relativo al plano inclinado. El astronauta pesaría 27 lbf en la Luna y 60 lbf en Marte. Aproxime los ángulos θ (al 0.01° más cercano) para que el plano inclinado simule el caminar en esas superficies.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 58



59. Un aeroplano vuela a una velocidad respecto al aire de 200 mi/h en la dirección 50°, donde el

FIGURA PARA EL EJERCICIO 59



viento sopla directamente del oeste a 40 mi/h. Estos hechos se pueden representar por los vectores **p** y **w** de magnitudes 200 y 40, respectivamente, como se muestra en la figura. La dirección del vector resultante **p** + **w** corresponde al **curso verdadero** del avión con respecto a tierra, y a la magnitud $|\mathbf{p} + \mathbf{w}|$ se le llama **velocidad** del aeroplano, en relación con tierra. Aproxime, al grado más cercano, el curso verdadero del aeroplano y, a la mi/h más cercana, su velocidad en relación con tierra.

60. Un avión vuela a una velocidad de 500 mi/h en una dirección de 140°, donde el viento sopla del suroeste en la dirección 65° a 30 mi/h. Aproxime (al grado más cercano) el curso verdadero y la velocidad en relación con tierra (a la mi/h más cercana) del aeroplano.

61. Un piloto desea mantener el curso verdadero de un aeroplano en una dirección de 250° con una velocidad en relación con tierra de 400 mi/h Aproxime la velocidad requerida (a la mph más cercana) del avión y su dirección de brújula (al grado más cercano), si el viento sopla directamente al norte a 50 mi/h.

62. Un aeroplano vuela en la dirección 20° a una velocidad de 300 mph. Su velocidad en relación con tierra es de 350 mi/h y su curso verdadero es de 30°. Aproxime la dirección y la velocidad del viento.

63. La corriente de un río fluye directamente del oeste a una velocidad de 1.5 pie/s. Una persona que rema en un bote a una velocidad de 4 pie/s en aguas tranquilas, desea atravesar directamente el río hacia el norte. Aproxime, a los 10′ más cercanos, la dirección en la que la persona debe remar.

64. Una lancha se debe dirigir a un punto con una orientación de N15°E, para poderse trasladar directamente hacia el norte a través de un río a una velocidad de 30 mi/h. Aproxime, a la mi/h más cercana, la velocidad que lleva la corriente, si ésta fluye directamente al oeste.

8.6 Repaso

Defina o discuta cada uno de los siguientes conceptos:

1. Ley de los senos.
2. Ley de los cosenos.
3. Fórmula de Herón.
4. Representación geométrica de un número complejo.
5. El plano complejo.
6. El valor absoluto de un número complejo.
7. El Teorema de De Moivre.
8. Raíces n-ésimas de un número complejo.
9. Vector.
10. Magnitud de un vector.
11. Adición o suma de vectores.
12. Múltiplo escalar de un vector.
13. Vectores como parejas ordenadas.
14. Componentes de un vector.
15. Sustracción o resta de vectores.
16. Vector unitario.
17. Los vectores **i** y **j**.
18. Combinación lineal de **i** y **j**.

Ejercicios 8.6

Sin usar tablas o calculadora, determine las partes restantes del triángulo ABC en los Ejercicios 1 a 4.

1. $\alpha = 60°,\ \beta = 45°,\ b = 100$

2. $\gamma = 30°,\ a = 2\sqrt{3},\ c = 2$

3. $\alpha = 60°,\ b = 6,\ c = 7$

4. $a = 2,\ b = 3,\ c = 4$

En los Ejercicios 5 a 8 aproxime las partes que faltan del triángulo ABC.

5. $\beta = 67°,\ \gamma = 75°,\ b = 12$

6. $\alpha = 23°30',\ c = 125,\ a = 152$

7. $\beta = 115°,\ a = 4.6,\ c = 7.3$

8. $a = 37,\ b = 55,\ c = 43$

En los Ejercicios 9 y 10 aproxime el área del triángulo ABC hasta el 0.1 de unidad cuadrada más cercano.

9. $\alpha = 75°,\ b = 20,\ c = 30$

10. $a = 4,\ b = 7,\ c = 10$

En los Ejercicios 11 a 16 cambie los números complejos a la forma trigonométrica con $0 \le \theta \le 2\pi$.

11. $-10 + 10i$

12. $2 - 2\sqrt{3}i$

13. -17

14. $-12i$

15. $-5\sqrt{3} - 5i$

16. $4 + 5i$

En los Ejercicios 17 a 20 aplique el teorema de De Moivre para expresar el número dado en la forma $a + bi$, en donde a y b son números reales.

17. $(-\sqrt{3} + i)^9$

18. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{30}$

19. $(3 - 3i)^5$

20. $(2 + 2\sqrt{3}i)^{10}$

21. Halle las tres raíces cúbicas de -27.

22. Encuentre las soluciones de la ecuación $x^5 - 32 = 0$.

23. Trace los vectores correspondientes a $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $2\mathbf{a}$ y $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$, para $\mathbf{a} = \langle -4, 5\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, -8\rangle$.

24. Para $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$, encuentre los vectores o los números que corresponden a:

(a) $4\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (b) $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$

(c) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ (d) $|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$

25. Para $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y\rangle$, y $c > 0$, describa al conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ tales que $|\mathbf{r} - \mathbf{a}| = c$.

26. Para los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, con el mismo punto inicial y con un ángulo θ entre ellos, demuestre que

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta.$$

27. Un barco navega a una velocidad de 14 mph en la dirección S50°E. Exprese su velocidad $\mathbf{v}$ como vector.

28. Las magnitudes y direcciones de dos fuerzas son 72 kgf, S60°E y 46 kgf, N74°E, respectivamente. Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.

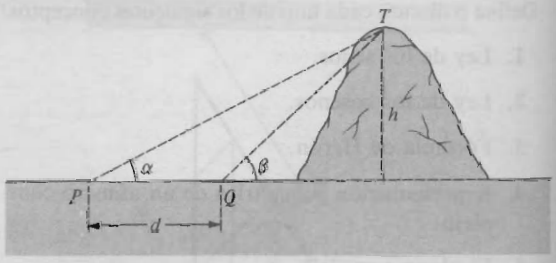
29. Cuando se ve la cima de una montaña desde el punto P que se muestra en la figura, el ángulo de elevación es α. Desde el punto Q, que está d unidades más cerca de ese monte, el ángulo de elevación aumenta a β.

(a) Muestre que la altura h de la montaña es

$$h = \frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}\, d.$$

(b) Calcule la altura citada h si $d = 2$ millas, $\alpha = 15°$ y $\beta = 20°$.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 29



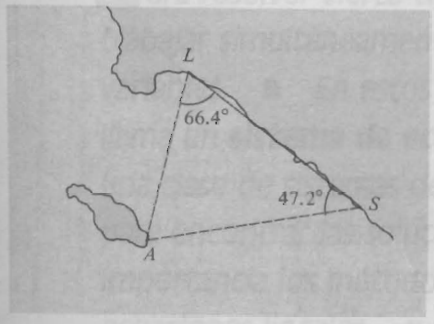
30. El trayecto de una carrera de patinetas consiste en una parte cuesta abajo de una colina de 200 m y una parte a nivel de 150 m. Cuando se observa el punto de partida desde la meta, el ángulo de

elevación es de 27.4°. ¿Qué ángulo forma la colina con la horizontal?

31. Si se observa un rascacielos desde la azotea de un edificio de 50 pie, el ángulo de elevación es de 59°. Si se mira desde el nivel de la calle, el ángulo de elevación mide 62°. (Véase el Ejercicio 36 de la Sección 6.9).
   (a) Use la ley de los senos para aproximar la distancia entre las partes superiores de los dos edificios.
   (b) Calcule la altura del rascacielos.

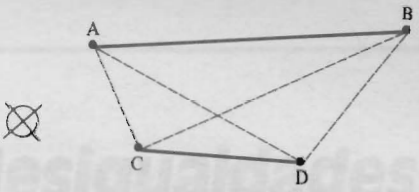
32. Las ciudades costeras de San Clemente y Long Beach están a 41 millas de distancia sobre una parte sensiblemente recta de la costa. En la figura se muestra el triángulo formado por estas dos poblaciones y el pueblo de Avalon, que se encuentra en la esquina sureste de la isla de Santa Catalina. En un día despejado, los ángulos ALS y ASL son de 66.4° y 47.2°, respectivamente. Calcule (a) la distancia desde Avalon hasta cada una de las otras dos ciudades; y (b) la distancia más corta desde Avalon hasta la costa.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 32



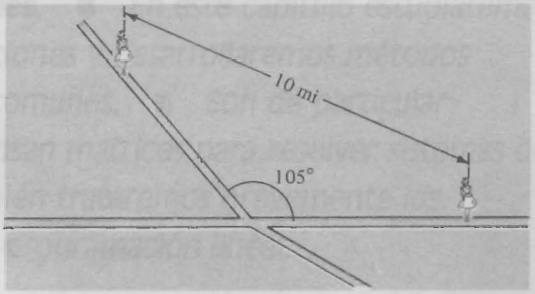
33. Para encontrar la distancia entre dos puntos A y B inaccesibles, se usa el siguiente método de topografía. Se eligen dos puntos C y D desde los cuales sea posible ver tanto a A como a B. Se miden después las distancias CD junto con los ángulos ACD, ACB, BDC y BDA. Si $CD = 120$, $\angle ACD = 115°$, $\angle ACB = 92°$, $\angle BDC = 125°$ y $\angle BDA = 100°$, calcule la distancia AB.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 33



34. En la intersección de dos caminos rurales se encuentran dos niñas cada una con un radiocomunicador. Una camina en la dirección norte por uno de los caminos, a una velocidad de 5 mph y, al mismo tiempo, la otra camina hacia el este por el otro camino y a la misma velocidad. Si los radios tienen un alcance de 10 millas, ¿cuándo perderán contacto una con la otra?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 34



CAPÍTULO 9

Sistemas de ecuaciones y desigualdades

Para resolver cierto tipo de problemas matemáticos, es necesario trabajar simultáneamente con dos o más ecuaciones en varias variables. ■ En estos casos, las ecuaciones determinan lo que se llama un ***sistema de ecuaciones****. ■ En este capítulo estudiaremos una clase de sistemas de ecuaciones y desarrollaremos métodos para encontrar las soluciones comunes. ■ Son de particular importancia los métodos que usan matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. ■ También trataremos brevemente los sistemas de desigualdades y la programación lineal.*



9.1 Sistemas de ecuaciones

Un par ordenado (a, b) es una **solución** de una ecuación en dos variables x y y si, al sustituir x y y por a y b, respectivamente, se obtiene un enunciado verdadero. Dos ecuaciones en x y y son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones. Por ejemplo, las ecuaciones siguientes son equivalentes:

$$x^2 - 4y = 3, \qquad x^2 - 3 = 4y$$

Ya sabemos que la **gráfica** de una ecuación en x y y consiste en todos los puntos de un plano coordenado que corresponden a las soluciones de dicha ecuación.

Un **sistema** de dos ecuaciones en x y y está compuesto de dos ecuaciones cualesquiera en esas variables. Al par ordenado (a, b) se le llama una **solución del sistema** si (a, b) es una solución de ambas ecuaciones. Por consiguiente, los puntos que corresponden a las soluciones son precisamente aquellos en que se cortan las gráficas de las dos ecuaciones.

Considérese por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y - 2x - 3 = 0. \end{cases}$$

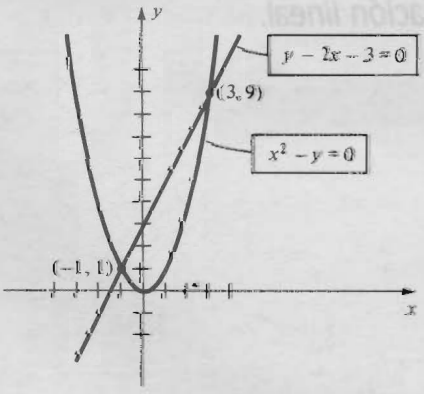
La llave se usa para indicar que las dos ecuaciones deben tratarse simultáneamente. En la siguiente tabla se muestran algunas soluciones de la ecuación $x^2 - y = 0$, o equivalentemente, $y = x^2$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4	9	16

La gráfica es la parábola de la Figura 9.1. Una tabla similar para $y - 2x - 3 = 0$ es

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-1	1	3	5	7	9	11

FIGURA 9.1



La gráfica es ahora la recta de la Figura 9.1. Nótese que los pares $(3, 9)$ y $(-1, 1)$ son soluciones de ambas ecuaciones y, por lo tanto, son las soluciones del sistema. Más adelante veremos que son las *únicas* soluciones. Como se señaló anteriormente, los dos pares que son soluciones del sistema representan puntos de intersección de las dos gráficas.

Las soluciones del sistema anterior pueden encontrarse algebraicamente, esto es, sin recurrir a las gráficas. Empezaremos por despejar y, en la primera ecuación, obteniendo $y = x^2$. Se deduce que si el par (x, y) es solución del sistema, éste deberá ser de la forma (x, x^2). En particular, (x, x^2) debe ser una solución de la ecuación $y - 2x - 3 = 0$, esto es,

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Factorizando obtenemos $(x - 3)(x + 1) = 0$

y de ahí que $x = 3$ o bien $x = -1$. Los valores correspondientes de y (obtenidos a partir de $y = x^2$) son 9 y 1, respectivamente. Las únicas soluciones posibles del sistema son pues los pares ordenados $(3, 9)$ y $(-1, 1)$. Para ver que éstas son efectivamente soluciones, se puede comprobar por sustitución.

Para obtener algebraicamente las soluciones empezamos por despejar y en una de las ecuaciones del sistema, y después se reemplazó y en la otra ecuación, obteniendo así una ecuación en la variable x. Las soluciones de la última ecuación eran los únicos posibles valores de x que son solución del sistema. Los correspondientes valores de y se encontraron por medio de la ecuación que expresaba y en términos de x. Este método algebraico es el llamado *método de sustitución*. Algunas veces resulta más conveniente despejar x en lugar de y, y después reemplazar x en la otra ecuación. En general, los pasos usados en este proceso se pueden enumerar de la manera siguiente.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

(i) Despejar una de las variables en alguna de las ecuaciones.

(ii) Sustituir en la otra ecuación la expresión obtenida en el paso (i) para obtener una ecuación en una variable.

(iii) Hallar las soluciones de la ecuación que se obtuvo en el paso (ii).

(iv) Usar las soluciones del paso (iii), así como la expresión obtenida en el paso (i) para determinar las soluciones del sistema.

En el siguiente ejemplo encontraremos las soluciones del sistema que se consideró al principio de esta sección, pero ahora empezaremos por despejar x en términos de y.

EJEMPLO 1 Hallar las soluciones del sistema

$$2x = y - 3 \quad \text{o bien} \quad x = \frac{y-3}{2}.$$

SOLUCIÓN Podemos despejar x en la segunda ecuación de la manera siguiente:

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y - 2x - 3 = 0. \end{cases}$$

Reemplazando x en la primera ecuación, obtenemos

$$\left(\frac{y-3}{2}\right)^2 - y = 0$$

$$\frac{y^2 - 6y + 9}{4} - y = 0$$

$$y^2 - 6y + 9 - 4y = 0$$
$$y^2 - 10y + 9 = 0$$
$$(y - 9)(y - 1) = 0.$$

La última ecuación tiene las soluciones $y = 9$ así como $y = 1$. Si reemplazamos y por 9 y 3 en la ecuación $x = (y - 3)/2$, obtenemos los valores correspondientes de x, o sea $x = 3$ y $x = -1$, respectivamente. Por lo tanto, como se vio anteriormente, las soluciones del sistema son $(3, 9)$ y $(-1, 1)$. ■

EJEMPLO 2 Obtener las soluciones del siguiente sistema. Trazar la gráfica de cada ecuación y mostrar los puntos de intersección.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y = 19. \end{cases}$$

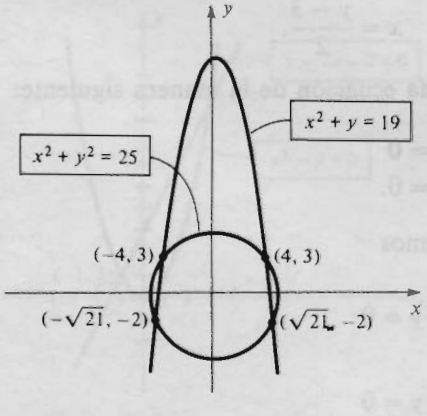
SOLUCIÓN Despejando y en la segunda ecuación obtenemos $y = 19 - x^2$. La sustitución de y en la primera lleva a las siguientes ecuaciones equivalentes:

$$x^2 + (19 - x^2)^2 = 25$$
$$x^2 + (361 - 38x^2 + x^4) = 25$$
$$x^4 - 37x^2 + 336 = 0$$
$$(x^2 - 16)(x^2 - 21) = 0.$$

Las soluciones de la última ecuación son 4, -4, $\sqrt{21}$ y $-\sqrt{21}$. Para encontrar los valores correspondientes de y, reemplazamos x en la ecuación $y = 19 - x^2$. Para $x = 4$ o para $x = -4$ obtenemos $y = 3$; así mismo, para $x = \sqrt{21}$ o bien $x = -\sqrt{21}$ resulta $y = -2$. Las únicas soluciones posibles del sistema son pues:

$$(4, 3), \quad (-4, 3), \quad (\sqrt{21}, -2), \quad \text{y} \quad (-\sqrt{21}, -2).$$

FIGURA 9.2



Por sustitución directa en cada una de las ecuaciones dadas podemos comprobar que los cuatro pares obtenidos son soluciones.

La gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ es una circunferencia de radio 5 con centro en el origen, y la gráfica de $y = 19 - x^2$ es una parábola con eje vertical. En la Figura 9.2 se muestran las gráficas y sus puntos de intersección, que son determinados por las soluciones del sistema. ■

También podemos considerar ecuaciones en tres variables x, y, z, tales como

$$x^2y + xz + 3^y = 4z^3.$$

Decimos que la ecuación tiene una **solución** (a, b, c) si cuando se sustituye x, y y z por a, b y c, respectivamente, obtenemos

un enunciado verdadero; (a, b, c) es una **tríada ordenada** de números reales. Las ecuaciones equivalentes se definen como se indicó anteriormente. La definición de un sistema de ecuaciones en tres variables, y las soluciones correspondientes a tal sistema es análoga a la del caso de dos variables. Del mismo modo, podemos considerar sistemas de *cualquier* número de ecuaciones en *cualquier* número de variables.

El método de sustitución se puede extender a sistemas más complicados. Por ejemplo, dadas tres ecuaciones en tres variables, supongamos que en una ecuación sea posible despejar una de las variables en términos de las otras dos. Si sustituimos esta expresión en cada una de las otras ecuaciones, obtenemos un sistema de dos ecuaciones en dos variables. Como se muestra en el siguiente ejemplo, las soluciones del sistema de dos variables obtenido se pueden utilizar para encontrar las soluciones del sistema original.

EJEMPLO 3 Hallar las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ xyz = 0 \\ 2y + z = 1. \end{cases}$$

SOLUCIÓN Despejando z en la tercera ecuación,

$$z = 1 - 2y.$$

Sustituimos este valor de z en las primeras dos ecuaciones para obtener el siguiente sistema de dos ecuaciones en dos variables:

$$\begin{cases} x - y + (1 - 2y) = 2 \\ xy(1 - 2y) = 0. \end{cases}$$

o equivalentemente,

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ xy(1 - 2y) = 0. \end{cases}$$

Resolvemos ahora este último sistema. En la primera ecuación se despeja x en términos de y; esto es

$$x = 3y + 1.$$

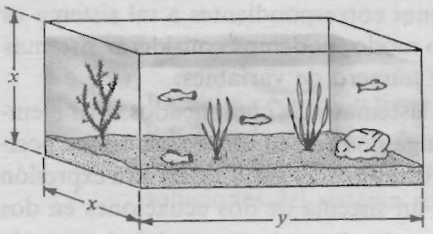
En la segunda ecuación $xy(1 - 2y) = 0$, sustituimos x por $3y + 1$ y obtenemos

$$(3y + 1)y(1 - 2y) = 0,$$

cuyas soluciones son $-\frac{1}{3}$, 0 y $\frac{1}{2}$. Éstos son los únicos valores de y que son soluciones del sistema. La ecuación $x = 3y + 1$ sirve para obtener los correspondientes valores de x, que son $x = 0$, 1 y $\frac{5}{2}$, respectivamente. Finalmente, sustituyendo en $z = 1 - 2y$, obtenemos los valores de z, o sea, $\frac{5}{3}$, 1 y 0. Se concluye que las soluciones del sistema original son las tríadas ordenadas.

$$(0, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{5}{3}), \quad (1, 0, 1), \quad \text{y} \quad (\tfrac{5}{2}, \tfrac{1}{2}, 0). \qquad \blacksquare$$

FIGURA 9.3



EJEMPLO 4 ¿Sería posible construir con 40 pie^2 de drio un acuario con fondo de cristal y extremos cuadrad que pudiera contener 16 pie^3 de agua?

SOLUCIÓN Se puede empezar dibujando un acuario pico y marcándolo como se ve en la Figura 9.3, en la que y y están en pies. Haciendo referencia a la figura y utiliza do las fórmulas para el área y el volumen se ve que

$$\text{Volumen del acuario} = x^2y,$$

$$\text{Hoja de vidrio (en pie}^2\text{) que se necesita} = 2x^2 + 4xy.$$

Puesto que el volumen y la cantidad de vidrio requerido son 16 y 40, respectiv mente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2y = 16 \\ 2x^2 + 4xy = 40 \end{cases}$$

Resolviendo la primera ecuación para evaluar y se obtiene $y = 16/x^2$. Sustituyendo en la segunda ecuación se llega a

$$2x^2 + 4x\left(\frac{16}{x^2}\right) = 40$$

$$2x^2 + \frac{64}{x} = 40$$

$$2x^3 + 64 = 40x$$

$$x^3 - 20x + 32 = 0$$

En seguida se buscan las soluciones racionales de esta ecuación. Dividiendo sintétic mente el polinomio $x^3 - 20x + 32$ entre $x - 2$ se obtiene

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -20 & 32 \\ & & 2 & 4 & -32 \\ \hline & 1 & 2 & -16 & 0 \end{array}$$

Entonces, una solución de $x^3 - 20x + 32 = 0$ es 2 y las soluciones restantes satisfac

$$x^2 + 2x - 16 = 0.$$

Usando la Fórmula Cuadrática se obtiene

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 64}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{17}}{2} = -1 \pm \sqrt{17}.$$

Puesto que x es positiva se puede descartar $-1 - \sqrt{17}$. Por lo tanto,

$$x = -1 + \sqrt{17} \approx 3.12.$$

Los valores correspondientes de y se pueden encontrar a partir de $y = 16/x^2$. Por una parte, tomando $x = 2$ se encuentra $y = \frac{16}{4} = 4$. Por otra parte, si $x = -1 + \sqrt{17}$, se puede demostrar que $y = (9 + \sqrt{17})/8 \approx 1.64$. Se ha demostrado que hay dos maneras de construir el acuario. Posiblemente la mayoría de las personas (y de los peces) preferirían las dimensions 2 pie por 2 pie por 4 pie. ■

Ejercicios 9.1

En los Ejercicios 1 a 30 use el método de sustitución para encontrar las soluciones de cada sistema de ecuaciones.

1. $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y^2 = 1 - x \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y^2 = x \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2y = x^2 \\ y = 4x^3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - y^3 = 1 \\ 2x = 9y^2 + 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x - 4y + 20 = 0 \\ 3x + 2y + 8 = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -6x + 9y = 4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 8x - 10y = -5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x - 4y = 25 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y - x = 4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 4y = -25 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y - 3x = 2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y + 2x = -1 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 2y - x = 4 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + 2x = -3 \end{cases}$

19. $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 10 \\ x + y = 1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} xy = 2 \\ 3x - y + 5 = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} y = 20/x^2 \\ y = 9 - x^2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = y^2 - 4y + 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} y^2 - 4x^2 = 4 \\ 9y^2 + 16x^2 = 140 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 25y^2 - 16x^2 = 400 \\ 9y^2 - 4x^2 = 36 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 12 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 6x^3 - y^3 = 1 \\ 3x^3 + 4y^3 = 5 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x - y + z = 9 \\ x + 3y + 3z = 6 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x - 3y - z^2 = 0 \\ x - y - z^2 = -1 \\ x^2 - xy = 0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x^2 + z^2 = 5 \\ 2x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 2y - z = 4 \\ xyz = 0 \end{cases}$

31. El perímetro de un rectángulo es 40 pulg y su área es 96 pulg^2. Encuentre el largo y el ancho.

32. Encuentre los valores de b para los cuales el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x + b \end{cases}$$

tiene soluciones que consisten en (a) un número real, (b) dos números reales, (c) ningún número real. Interprete geométricamente los tres casos.

33. ¿Existe un número real x tal que $x = 2^{-x}$? Decídalo mostrando gráficamente el sistema $y - x = 0$ y $y - 2^{-x} = 0$.

34. ¿Existe un número real x tal que $x = \log x$? Decídalo mostrando gráficamente el sistema $y - \log x = 0$ y $y - x = 0$.

35. Se pueden hacer secciones cilíndricas de tubo a partir de hojas de material laminado que tienen forma rectangular y 200 pulg^2 de área (véase la figura). ¿Es posible construir un tubo cuyo volumen sea de 200 pulg^3? Si es así, encuentre las dimensiones de la hoja o lámina rectangular.

36. En la figura se muestra la gráfica de $y = x^2$ y una recta de pendiente m que pasa por el punto $(1, 1)$. Encuentre un valor de m tal que la recta corte a la gráfica únicamente en $(1, 1)$.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 35

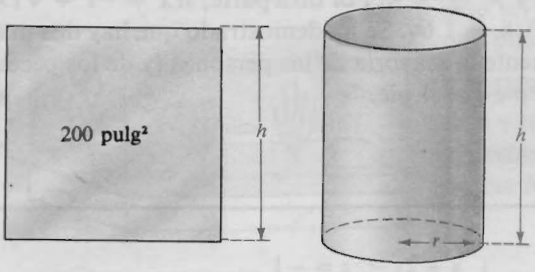
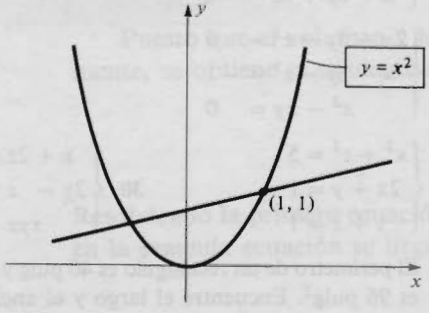


FIGURA PARA EL EJERCICIO 36



37. En la ciencia de la pesca se usan las funciones de reclutamiento de peces hembra para predecir el número R en la población de crías del año siguiente a partir de una estimación S del número de peces que desovan al presente. (Véase el Ejercicio 28 de la Sección 4.6.)

(a) Si $R = aS/(S + b)$ estime a y b a partir de los datos de la tabla siguiente.

Año	1983	1984	1985
Número en desove	40 000	60 000	72 000

(b) Pronostique la población de crías para el año de 1986.

38. Refiérase al Ejercicio 37. La función de Richer para el reclutamiento de peces hembra está dada por

$$R = aSe^{-bS}$$

en la que a y b son constantes positivas. La relación predice un reclutamiento bajo para cepas muy altas, y se ha encontrado que es apropiado para muchas especies, tales como el bacalao del Ártico. Resuelva nuevamente el Ejercicio 37 usando la función de reclutamiento de peces hembra establecida por Richer.

39. Un *modelo de competencia* es una colección de ecuaciones que especifican la forma en que interaccionan dos o más especies en competencia por los recursos alimenticios de un ecosistema. Se supone que x y y representan las cantidades (en cientos) de las dos especies competidoras y que las tasas de crecimiento respectivas R_1 y R_2 están dadas por

$$R_1 = 0.01x(50 - x - y),$$

$$R_2 = 0.02y(100 - y - 0.5x).$$

Determine los niveles de población (x, y) para los que ambas tasas de crecimiento son cero. (Tales niveles de población se llaman *puntos estacionarios*.)

40. Un granjero tiene 2420 pie de alambrada para cercar un pastizal situado en la orilla de un río recto. Si no utiliza alambrada en la orilla del río, ¿es posible que cerque 10 acres de pastizal? Recuerde que 1 acre = 43 560 pie².

9.2 Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables

Una ecuación de la forma $ax + by + c = 0$ (o equivalentemente, $ax + by = -c$) en donde a y b no son cero, se llama *ecuación lineal* en x y y. Así mismo, una ecuación lineal en tres variables x, y, z es una ecuación de la forma $ax + by + cz = d$, en donde los coeficientes son números reales. En forma similar se definen ecuaciones lineales en cualquier número de variables. Cuando se tiene un gran número de variables generalmente se utiliza una notación con subíndices. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (en donde n es un entero positivo) denotan variables, entonces una expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = a$$

en donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y a son números reales y no todo a_j es cero, es una **ecuación lineal en n variables** (con coeficientes reales).

En las aplicaciones modernas de las matemáticas, los sistemas de ecuaciones más comunes son aquellos en los que todas las ecuaciones son lineales. En esta sección consideraremos únicamente sistemas de dos ecuaciones lineales en dos variables. En la Sección 9.3 se estudiarán sistemas que incluyen más de dos variables.

El método usado para resolver un sistema de ecuaciones en varias variables es parecido al que se utilizó para resolver una ecuación en una variable, en el sentido de que el sistema dado se reemplaza por un conjunto de sistemas equivalentes hasta llegar a uno en el que las soluciones se obtienen fácilmente. En el siguiente teorema se dan algunas reglas generales que nos permiten transformar un sistema de ecuaciones en otro sistema equivalente. Denotaremos por $p = 0$ y $q = 0$ a las ecuaciones típicas en un sistema, con el objeto de no especificar el número o tipo de variables. El lector deberá entender claramente que los símbolos p y q representan expresiones que incluyen las variables en consideración. Por ejemplo, si $p = 3x - 2y + 5z - 1$ y $q = 6x + y - 7z - 4$, entonces las ecuaciones $p = 0$ y $q = 0$ tienen la forma

$$3x - 2y + 5z - 1 = 0, \qquad 6x + y - 7z - 4 = 0.$$

TRANSFORMACIONES QUE DAN SISTEMAS DE ECUACIONES EQUIVALENTES

Las siguientes transformaciones no alteran las soluciones de un sistema de ecuaciones:

(i) Intercambiar la posición de cualesquiera dos ecuaciones.

(ii) Multiplicar por un número real distinto de cero ambos lados de una ecuación del sistema.

(iii) Reemplazar una ecuación $q = 0$ del sistema por $kp + q = 0$, en donde $p = 0$ es cualquier otra ecuación del sistema y k es algún número real.

DEMOSTRACIÓN Se puede comprobar fácilmente que (i) y (ii) no alteran las soluciones del sistema y por esta razón omitiremos esta demostración.

Para probar (iii), debemos tener en cuenta que una solución del sistema original es una solución de las dos ecuaciones $p = 0$ y $q = 0$. De acuerdo con esto, cada una de las expresiones p y q son iguales a cero cuando las variables son reemplazadas por números reales apropiados, y por lo tanto la expresión $kp + q$ será también igual a cero. Como no se ha cambiado ninguna de las otras ecuaciones, se demuestra que cualquier solución del sistema original es también una solución del sistema transformado que se obtuvo al reemplazar la ecuación $q = 0$ por $kp + q = 0$.

Recíprocamente, dada una solución del sistema transformado, las expresiones $kp + q$ y p son iguales a cero si las variables son reemplazadas por números apropiados. Esto implica que $(kp + q) - kp$ sea igual a cero. Como $(kp + q) - kp = q$, vemos que, cuando se hace la sustitución, también q debe ser igual a cero. Entonces, una solución del sistema transformado es también una solución del sistema original. Con esto se concluye la demostración. □

Por simplicidad, describiremos la transformación (iii) del teorema anterior con la frase "sumar a una de las ecuaciones del sistema k veces cualquier otra ecuación del sistema". Desde luego, el sumar dos ecuaciones implica necesariamente sumar sus lados correspondientes. Multiplicar una ecuación por k significa multiplicar cada uno de sus lados por k. Como se ilustra en el siguiente ejemplo, este proceso se puede llevar a cabo aun cuando alguna de las ecuaciones no sea igual a cero.

EJEMPLO 1 Hallar las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x - y = 5. \end{cases}$$

SOLUCIÓN Por (ii) del teorema anterior, podemos multiplicar la segunda ecuación por 3. Con esto obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 6x - 3y = 15. \end{cases}$$

Por (iii) del teorema, podemos sumarle a la segunda ecuación una vez la primera y así

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 7x \quad\;\; = 14. \end{cases}$$

En la última ecuación, se ve que el único valor posible de x es 2. Podemos encontrar el valor correspondiente de y al sustituir el valor de x en la ecuación $x + 3y = -1$. Esto es,

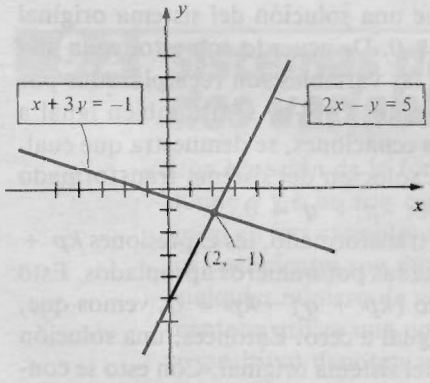
$$2 + 3y = -1, \qquad 3y = -3, \qquad y = -1.$$

Por consiguiente, el sistema dado tiene la solución $(2, -1)$.

Existen otros métodos de solución. Por ejemplo, podíamos haber empezado por multiplicar la primera ecuación por -2, obteniendo así

$$\begin{cases} -2x - 6y = 2 \\ 2x - y = 5. \end{cases}$$

FIGURA 9.4



Si, a continuación, sumamos la primera ecuación y la segunda, obtenemos

$$\begin{cases} -2x - 6y = 2 \\ \quad\;\; -7y = 7. \end{cases}$$

La última ecuación implica que $y = -1$. Al sustituir y en la ecuación $-2x - 6y = 2$, tenemos

$$-2x - 6(-1) = 2, \qquad -2x = -4, \qquad x = 2.$$

Volvemos a obtener la misma solución $(2, -1)$.

En la Figura 9.4 se muestran las gráficas de las dos ecuaciones, así como su punto de intersección $(2, -1)$. ∎

En el Ejemplo 1 se utilizó el llamado **método de eliminación** porque consiste en eliminar una variable de alguna de las ecuaciones. Cuando se usa el método de eliminación, generalmente las soluciones se obtienen en menos pasos que cuando se usa el método de sustitución estudiado en la Sección 9.1.

EJEMPLO 2 Obtener las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 6x + 2y = 12. \end{cases}$$

SOLUCIÓN Multiplicando la segunda ecuación por $\frac{1}{2}$,

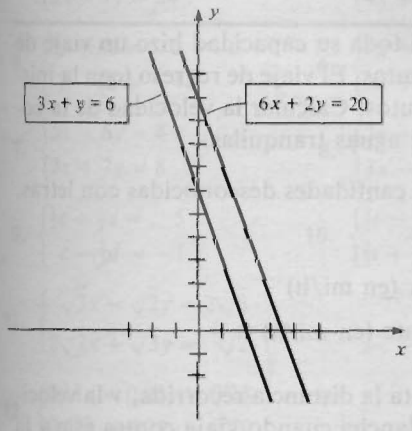
$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 3x + y = 6. \end{cases}$$

Por lo tanto, (a, b) es una solución si y sólo si $3a + b = 6$, o sea, $b = 6 - 3a$. Se deduce que las soluciones consisten en todos los pares ordenados de la forma $(a, 6 - 3a)$, en donde a es un número real. Si queremos encontrar soluciones particulares podemos dar diversos valores a a. Algunas soluciones son por ejemplo: $(0, 6)$, $(1, 3)$, $(3, -3)$, $(-2, 12)$ y $(\sqrt{2}, 6 - 3\sqrt{2})$. Nótese que la gráfica de cada ecuación es la misma recta. ■

EJEMPLO 3 Hallar las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 6x + 2y = 20. \end{cases}$$

FIGURA 9.5



SOLUCIÓN Si a la segunda ecuación le sumamos la primera multiplicada por -2 obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 0 = 8. \end{cases}$$

La última ecuación puede escribirse $0x + 0y = 8$, lo cual es falso para todo par ordenado (x, y). Por lo tanto, el sistema no tiene soluciones. Esto significa, evidentemente, que las gráficas de las ecuaciones dadas no se cortan (véase la Figura 9.5). ■

Como la gráfica para toda ecuación $ax + by = c$ es una recta, se deduce que para todo sistema de dos de tales ecuaciones, ocurre precisamente una de las siguientes posibilidades:

(i) Las rectas se cortan exactamente en un solo punto.

(ii) Las rectas son idénticas.

(iii) Las rectas son paralelas.

Como los pares que son soluciones determinan las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de las dos ecuaciones, podemos interpretar los enunciados anteriores de la siguiente manera:

TEOREMA

Dado un sistema de ecuaciones en dos variables, uno y sólo uno de los siguientes enunciados es verdadero:

(i) El sistema tiene exactamente una solución.

(ii) El sistema tiene un número infinito de soluciones.

(iii) El sistema no tiene soluciones.

Si ocurre (i) el sistema se llama **consistente**.
Si ocurre (ii), se dice que las ecuaciones son **dependientes**.
Cuando ocurre (iii) se dice que el sistema es **inconsistente**.

En la práctica, resulta bastante sencillo determinar cuál de los tres casos ocurre. Como se ilustró en el Ejemplo 1, la solución única (i) aparece cuando se aplican al sistema las transformaciones adecuadas. En el caso (ii) tenemos una solución similar a la del Ejemplo 2, donde se puede transformar una de las ecuaciones en la otra. El Ejemplo 3 muestra la obtención de un enunciado absurdo como $0 = 8$, que indica la ausencia de solución del caso (iii).

Algunos problemas aplicados se pueden resolver mediante un sistema de dos ecuaciones lineales, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Una lancha de motor operada a toda su capacidad hizo un viaje de 4 millas (contra una corriente constante) en 15 minutos. El viaje de regreso (con la misma corriente y a toda máquina) lo hizo en 12 minutos. Calcular la velocidad de la corriente y la velocidad equivalente de la lancha en aguas tranquilas.

SOLUCIÓN En primer lugar, identificamos las cantidades desconocidas con letras. Esto es,

$$x = \text{velocidad de la lancha (en mi/h)}$$
$$y = \text{velocidad de la corriente (en mi/h)}$$

Vamos a utilizar la fórmula $d = vt$, donde d denota la distancia recorrida, v la velocidad y t el tiempo. Como la corriente retarda a la lancha cuando viaja contra ésta y la impulsa cuando regresa, tenemos

$$\text{velocidad contra la corriente} = x - y \quad \text{(en mi/h)}$$
$$\text{velocidad a favor de la corriente} = x + y \quad \text{(en mi/h)}$$

El tiempo (en horas) que se navegó en cada dirección es

$$\text{tiempo contra la corriente} = \tfrac{15}{60} = \tfrac{1}{4} \quad \text{h.}$$
$$\text{tiempo a favor de la corriente} = \tfrac{12}{60} = \tfrac{1}{5} \quad \text{h.}$$

En cada viaje se recorrió una distancia de 4 millas. Sustituyendo en $d = vt$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 4 = (x - y)(\frac{1}{4}) \\ 4 = (x + y)(\frac{1}{5}) \end{cases}$$

o su equivalente,

$$\begin{cases} x - y = 16 \\ x + y = 20. \end{cases}$$

Sumando las dos últimas ecuaciones vemos que $2x = 36$, o bien $x = 18$. Por consiguiente, $y = 20 - x = 20 - 18 = 2$. Por lo tanto, la velocidad de la lancha en aguas tranquilas es de 18 mi/h y la velocidad de la corriente es 2 mi/h. ■

Ejercicios 9.2

En los Ejercicios 1 a 20, encuentre las soluciones de los sistemas.

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x + 5y = 13 \\ 3x + y = -4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ 3x - 7y = 24 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 7x - 8y = 9 \\ 4x + 3y = -10 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3r + 4s = 3 \\ r - 2s = -4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 9u + 2v = 0 \\ 3u - 5v = 17 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x - 6y = 4 \\ 3x + 7y = 8 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + 8y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{1}{3}c + \frac{1}{2}d = 5 \\ c - \frac{2}{3}d = -1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \frac{1}{2}t - \frac{1}{5}v = \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3}t + \frac{1}{4}v = \frac{5}{12} \end{cases}$

11. $\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \end{cases}$

12. $\begin{cases} 0.11x - 0.03y = 0.25 \\ 0.12x + 0.05y = 0.70 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -6x + 9y = 12 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3p - q = 7 \\ -12p + 4q = 3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3m - 4n = 2 \\ -6m + 8n = -4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x - 5y = 2 \\ 3x - 15y = 6 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2y - 5x = 0 \\ 3y + 4x = 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x + 7y = 9 \\ y = 5 \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = -2 \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{5}{y} = 1 \end{cases}$ (*Sugerencia:* Tomar $x' = 1/x$ así como $y' = 1/y$.)

20. $\begin{cases} \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{4}{y+2} = 2 \\ \dfrac{6}{x-1} - \dfrac{7}{y+2} = -3 \end{cases}$

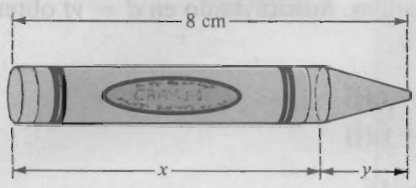
21. El precio del boleto para cierto evento es de \$2.25 para no estudiante y \$1.50 para estudiante. Se venden 450 boletos por un total de \$777.75, ¿cuántos boletos de cada tipo se compraron?

22. Una línea aérea vuela de Los Ángeles a Albuquerque con una escala en Phoenix. La tarifa a Phoenix es de \$45 (dólares), mientras que el pasaje a Albuquerque cuesta \$60. En Los Ángeles abordaron el avión 185 pasajeros y la compañía recibió en total \$10 500. ¿Cuántos pasajeros viajaron a Phoenix?

23. Una crayola o crayón debe tener 8 cm de largo, 1 cm de diámetro y necesita hacerse con 5 cm^3 de cera de color. La forma de la crayola debe ser

la de un cilindro con una pequeña punta cónica (véase la figura). Encuentre la longitud del cilindro y la altura del cono.

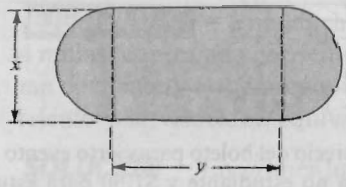
FIGURA PARA EL EJERCICIO 23



24. Un hombre rema en un bote 500 pie contra una corriente constante en 10 min. Después rema con la misma corriente a su favor, cubriendo 300 pie en 5 min. Encuentre la velocidad de la corriente y la velocidad equivalente a la que puede remar en aguas tranquilas.

25. Una mesa grande para una sala de conferencias debe tener la forma de un rectángulo con dos semicírculos en los extremos (véase la figura). Encuentre la longitud y el ancho de la parte rectangular, suponiendo que el perímetro de la mesa es de 400 pie y que el área de la parte rectangular debe ser el doble de la suma de las áreas de los dos extremos.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 25

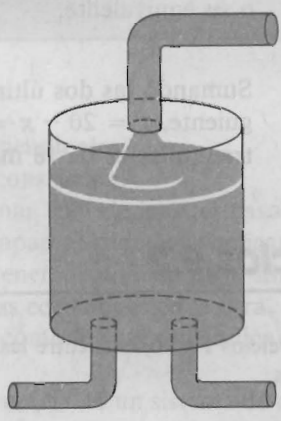


26. Una mujer ha invertido $10 000 en dos fondos que le redituan tasas de interés simple del 8% y 7%, respectivamente. Si cada año recibe un interés de $772, ¿cuánto tiene invertido en cada fondo?

27. Un hombre recibe ingresos por dos inversiones a tasas de interés simple del $6\frac{1}{2}$ % y 8%, respectivamente. Tiene invertido al $6\frac{1}{2}$ % el doble de lo que tiene al 8%. Si su ingreso anual de las dos inversiones es de $698.25, encuentre la cantidad que tiene invertida a cada tasa.

28. Para llenar un tanque de almacenamiento de agua de 300 gal se emplea un tubo único de entrada; para proveer de agua de riego a los campos de los alrededores se pueden utilizar dos tubos idénticos de salida (véase la figura). Se necesitan 5 horas para llenar el tanque, cuando los dos tubos de salida están abiertos. Cuando uno de ellos se halla cerrado, sólo toma 3 horas el llenado del tanque. Encuentre los flujos (en galones por hora) de entrada y de salida del tanque.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 28



29. Un fabricante de objetos de plata tiene dos aleaciones, la primera contiene 35% de plata y la segunda 60%. ¿Qué cantidad debe utilizar de cada una para obtener 100 g de una aleación que contenga 50% de plata?.

30. Un comerciante desea mezclar cacahuates que cuestan $2.00 la libra con nueces de $3.50 la libra para obtener 60 libras de una mezcla con valor de $2.65 la libra. ¿Cuántas libras debe mezclar de cada variedad?

31. Un avión viaja 1 200 millas en 2 horas volando con viento de cola. El viaje de regreso, contra el viento, le toma $2\frac{1}{2}$ horas. Encuentre la velocidad del avión y la del viento (suponga que ambas velocidades son constantes).

32. Una compañía papelera vende a una tienda escolar dos tipos de cuadernos. El precio de mayoreo del primero es de ₡50 y el del segundo ₡70. La compañía recibe una orden por 500 cuadernos y un cheque por $286. Si en la orden no

se especifica la cantidad que se desea de cada tipo, ¿cómo debe surtir el pedido la compañía?

33. La velocidad $v(t)$ (en cm/s) en el tiempo t (en segundos) de una pelota que rueda hacia abajo en un plano inclinado está dada por $v(t) = v_0 + at$, en donde v_0 es la velocidad inicial y a es la aceleración (en cm/s^2). Encuentre v_0 y a sabiendo que $v(2) = 16$ y $v(5) = 25$.

34. Si un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba desde una altura de s_0 pies con una velocidad inicial de v_0 pie/s, entonces su distancia respecto al suelo después de t segundos está dada por

$$s(t) = -16t^2 + v_0t + s_0.$$

Encuentre v_0 y s_0, sabiendo que $s(1) = 84$ y $s(2) = 116$.

35. Una pequeña fábrica de muebles produce sofás y sillones reclinables. Cada sofá requiere de 8 horas de trabajo y \$60 (dólares) de material, mientras que un sillón reclinable puede hacerse por \$35 en 6 horas. La compañía dispone de 340 horas de trabajo por semana y puede pagar \$2 250 de material. ¿Cuántos sofás y sillones reclinables pueden producirse si se utilizan todas las horas de trabajo y todos los materiales?

36. Un granjero prepara una mezcla de avena y maíz para alimentar a su ganado. Cada onza de avena contiene 4 gramos (g) de proteína y 18 g de carbohidratos, mientras que cada onza de maíz contiene 3 g de proteína y 24 g de carbohidratos. ¿Cuántas onzas de cada uno pueden usarse para cumplir con los requerimientos nutricionales de 200 g de proteínas y 1 320 g de carbohidratos por comida?

37. Un plomero P y un electricista E están haciendo reparaciones cada uno en su taller y se ponen de acuerdo para combinar sus servicios. El número de horas empleado en cada una de las obras conjuntas se muestra en la siguiente tabla:

	Trabajo de P	Trabajo de E
Tiempo de trabajo de P (horas)	6	4
Tiempo de trabajo de E (horas)	5	6

Normalmente pensarían que el asunto está parejo, pero, debido a la legislación sobre impuestos, deben cobrar por todo trabajo que hayan hecho. Se ponen de acuerdo en elegir pagos por hora de forma que la cuenta total en cada taller sea igual al ingreso que recibirían normalmente en las dos obras.

(a) Si x y y representan los pagos por hora del plomero P y del electricista E, respectivamente, demuestre que $6x + 5y = 10x$ y $4x + 6y = 11y$. Describa las soluciones del sistema.

(b) Si P gana normalmente \$20 (dólares) por hora, ¿cuánto debe cobrar E?

9.3 Sistemas de ecuaciones lineales con más de dos variables

Para resolver sistemas de ecuaciones con más de dos variables se puede utilizar el método de sustitución de la Sección 9.1, o las técnicas de eliminación que se desarrollaron en la Sección 9.2. El método de eliminación es el más corto y directo para obtener las soluciones. Además, conduce a la técnica de matrices, que se tratará en esta sección.

EJEMPLO 1 Hallar las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 4y - z = -2. \end{cases}$$

SOLUCIÓN Empezamos por eliminar a x en la segunda y en la tercera ecuaciones. Si a la segunda ecuación le sumamos -2 veces la primera, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 5y - 10z = -5 \\ -3x + 4y - z = -2. \end{cases}$$

Si ahora se suma a la tercera ecuación 3 veces la primera,

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 5y - 10z = -5 \\ -2y + 8z = 10. \end{cases}$$

Para simplificar los cálculos, multiplicamos la segunda ecuación por $\frac{1}{5}$, o sea

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ -2y + 8z = 10. \end{cases}$$

Ahora se elimina y de la tercera ecuación sumándole 2 veces la segunda. Con esto tenemos el sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ 4z = 8. \end{cases}$$

Por último, multiplicando la tercera ecuación por $\frac{1}{4}$ se obtiene

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ z = 2. \end{cases}$$

Las soluciones del último sistema son fáciles de obtener mediante un procedimiento conocido como **sustitución hacia atrás**. Así, de la tercera ecuación se obtiene $z = 2$. Sustituyendo z por 2 en la segunda ecuación, $y - 2z = -1$,

$$y - 2(2) = -1 \quad \text{o bien} \quad y = 3.$$

Finalmente, encontramos el valor de x sustituyendo y y z en la primera ecuación. Esto es,

$$x - 2(3) + 3(2) = 4 \quad \text{o sea} \quad x = 4.$$

Existe por lo tanto una solución, (4, 3, 2). ∎

Se puede demostrar que cualquier sistema de tres ecuaciones lineales en tres variables tiene una *solución única*, o un *número infinito de soluciones* o *no tiene soluciones*.

La terminología que se usa para describir estos casos es la misma que la que se usó para el caso de dos ecuaciones en dos variables, o sea, *consistente*, *dependiente*, o *inconsistente*, respectivamente.

Si analizamos el método de solución del Ejemplo 1, podemos ver que los símbolos utilizados para las variables son irrelevantes. Lo importante a considerar son los *coeficientes* de las variables. Así, si se usan diferentes símbolos como r, s y t para las variables, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} r - 2s + 3t = 4 \\ 2r + s - 4t = 3 \\ -3r + 4s - t = -2. \end{cases}$$

Con el método de eliminación se puede proceder de la misma manera que antes. Si esto es verdadero, es posible simplificar el proceso. Específicamente, se introduce un método que permita llevar un registro de los coeficientes de forma que las variables no tengan que ser escritas. Refiriéndonos al sistema anterior y comprobando que las variables aparecen en el mismo orden en cada ecuación, y que los términos en que no intervienen variables están a la derecha del signo igual, se enuncian los números involucrados en las ecuaciones de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Si alguna variable no aparece en una de las ecuaciones, debemos colocar cero en la posición apropiada. La ordenación de números de este tipo se llama **matriz**. Las **filas** de la matriz son los números que aparecen uno junto a otro *horizontalmente*. Así, la primera fila R_1 es 1 −2 3 4; la segunda fila R_2 es 2 1 −4 3; y la tercera fila R_3 es −3 4 −1 −2. Las **columnas** de la matriz son aquellos números que aparecen registrados *verticalmente*. Por ejemplo, la segunda columna es −2 1 4 (en este orden); la cuarta columna es 4 3 −2, y así sucesivamente.

Antes de estudiar el método para resolver sistemas de ecuaciones lineales por medio de matrices daremos una definición general de matriz. Es conveniente utilizar una **notación de índices dobles** para los símbolos que representan los elementos de una matriz. Concretamente, el símbolo a_{ij} denotará al número que aparece en la fila i y la columna j. Llamamos a i el **índice de fila** y a j el **índice de columna** de a_{ij}.

DEFINICIÓN

Si m y n son enteros positivos, entonces una **matriz de** $m \times n$ de números reales es un arreglo de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde todo a_{ij} es un número real.

El símbolo $m \times n$ de la definición se lee "m por n". Es posible considerar matrices en las que los elementos a_{ij} representan números complejos, polinomios u otras entidades matemáticas; sin embargo, aquí no se hará esto. Las filas y columnas se definen como antes. Así, la matriz de la definición tiene m filas y n columnas. El lector deberá examinar cuidadosamente la notación usada para una matriz, observando, por ejemplo, que el símbolo a_{23} se encuentra en la fila 2 y la columna 3, mientras que el a_{32} está en la fila 3 y la columna 2. Cada a_{ij} se llama un **elemento de la matriz**. Los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... se llaman **elementos de la diagonal principal**. Si $m \neq n$, se tiene una **matriz rectangular**. Si $m = n$, se tiene una **matriz cuadrada de orden n**.

Volvamos a considerar el sistema de ecuaciones considerado en el Ejemplo 1. La matriz 3×4 de la página 421 es la **matriz del sistema**. La matriz del sistema también se llama **matriz aumentada**. Si sólo se consideran los *coeficientes* de las variables del sistema de ecuaciones lineales, se tiene la **matriz de coeficientes**. La matriz de coeficientes del Ejemplo 1 es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Después de haber formado la matriz del sistema, operamos con las filas de la matriz *como si fueran ecuaciones*. Lo único que falta son los símbolos de las variables, los signos de suma que enlazan los términos y los signos de igualdad. Basta recordar que los números de la primera columna son los coeficientes de la primera variable; los números de la segunda columna son los de la segunda variable, etcétera. Las reglas para transformar matrices son formuladas de manera que siempre produzcan la matriz de un sistema equivalente. De hecho, el siguiente teorema para matrices es análogo al teorema para transformar sistemas de ecuaciones establecido en la página 413.

TEOREMA PARA TRANSFORMAR LAS FILAS DE UNA MATRIZ

Dada la matriz de un sistema de ecuaciones lineales, las siguientes transformaciones conducen a la matriz de un sistema de ecuaciones lineales equivalente:

(i) Intercambiar dos filas cualesquiera.

(ii) Multiplicar todos los elementos de una fila por el mismo número real k distinto de cero.

(iii) Sumar a los elementos de una fila, k veces los correspondientes elementos de cualquier otra fila, en donde k es un número real.

Nos referiremos a (ii) como al proceso de "multiplicar una fila por un número k" y describiremos a (iii) con la frase "sumar a una fila k veces cualquier otra fila". Las tres reglas del teorema anterior se llaman **transformaciones elementales de las filas** de una matriz.

Es conveniente usar los símbolos siguientes para especificar las transformaciones elementales de renglón de una matriz:

Símbolo	*Significado*
R_{ij}	Intercambiar renglones i y j
kR_i	Multiplicar por k el i-ésimo renglón
$kR_i + R_j$	Sumar al j-ésimo renglón k veces el i-ésimo renglón

En seguida se resolverá nuevamente el Ejemplo 1 utilizando matrices. Puede ser enriquecedor comparar las dos soluciones puesto que se utilizan pasos semejantes en cada caso.

EJEMPLO 2 Encontrar las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 4y - z = -2. \end{cases}$$

SOLUCIÓN Se empieza con la matriz del sistema y después se cambia su forma mediante transformaciones elementales de filas. Para especificar cada transformación se usará una flecha junto con los símbolos que se han introducido ya. Así, en la primera transformación en lo que sigue, $-2R_1 + R_2$ indica que se suma al segundo renglón -2 veces el primero. En la segunda transformación, $3R_1 + R_3$ indica que se suma al tercer renglón 3 veces el primero. En la tercera transformación, $\frac{1}{5}R_2$ indica que el segundo renglón ha sido multiplicado por $\frac{1}{5}$, y así sucesivamente.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & -2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz final se emplea para volver al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ z = 2, \end{cases}$$

que es equivalente al sistema original. Las soluciones se encuentran ahora mediante sustitución hacia atrás, como en el Ejemplo 1. ■

La matriz final en la solución del Ejemplo 2 se dice que está en **forma escalonada**. En general, una matriz está en forma escalonada si cumple con las siguientes condiciones.

FORMA ESCALONADA DE UNA MATRIZ

(i) El primer número diferente de cero en cada fila, leyendo de izquierda a derecha, es 1.

(ii) La columna que contiene el primer número diferente de cero en cualquier fila está a la izquierda de la columna que contiene el primer número distinto de cero en la siguiente fila.

(iii) Las filas que contienen únicamente ceros aparecen en la parte inferior de la matriz.

Las operaciones elementales de filas se pueden usar para transformar la matriz de cualquier sistema de ecuaciones lineales a la forma escalonada. La citada forma puede usarse después para producir un sistema de ecuaciones que sea equivalente al original. Las soluciones del último sistema se pueden encontrar por sustitución hacia atrás. El siguiente ejemplo ilustra el uso de esta técnica para un sistema de cuatro ecuaciones lineales.

EJEMPLO 3 Hallar las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x - 2z + 2w = 1 \\ -2x + 3y + 4z = -1 \\ y + z - w = 0 \\ 3x + y - 2z - w = 3. \end{cases}$$

SOLUCIÓN Nótese que las ecuaciones han sido ordenadas de manera que aparezcan las mismas variables en columnas verticales. Empezaremos con la matriz del sistema y procederemos de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3R_1 + R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)R_2 + R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz final está en forma escalonada y corresponde al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 2z + 2w = 1 \\ y + z - w = 0 \\ z - \frac{7}{3}w = -\frac{1}{3} \\ w = 1. \end{cases}$$

Ahora usaremos el método de sustitución hacia atrás para encontrar la solución. De la última ecuación vemos que $w = 1$. Sustituyendo en la tercera ecuación $z - \frac{7}{3}w = -\frac{1}{3}$, obtenemos

$$z - \tfrac{7}{3}(1) = -\tfrac{1}{3} \quad \text{o bien} \quad z = \tfrac{6}{3} = 2.$$

Sustituyendo $w = 1$ y $z = 2$ en la segunda ecuación $y + z - w = 0$, se tiene

$$y + 2 - 1 = 0 \quad \text{o bien} \quad y = -1.$$

Finalmente, de la primera ecuación $x - 2z + 2w = 1$, tenemos

$$x - 2(2) + 2(1) = 1 \quad \text{o bien} \quad x = 3.$$

Por lo tanto, el sistema tiene una solución, $x = 3$, $y = -1$, $z = 2$ y $w = 1$. ■

A veces es necesario considerar sistemas en los cuales el número de ecuaciones no es el mismo que el número de variables. Es aplicable la misma técnica de matrices, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Obtener las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 3. \end{cases}$$

SOLUCIÓN Cuando el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas se debe ir más allá de la forma escalonada, aplicando transformaciones elementales de renglón hasta que hay ceros tanto abajo *y* arriba del primer elemento diferente de cero en cada renglón. Por tanto,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{3}{2}R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{3}{2}R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

la última matriz es la matriz del sistema

$$\begin{cases} x - z = 5 \\ y + 2z = -3 \end{cases}$$

o equivalentemente,

$$\begin{cases} x = z + 5 \\ y = -2z - 3. \end{cases}$$

Para este sistema existe un número infinito de soluciones que se pueden encontrar asignando a z cualquier valor c y usando luego las últimas dos ecuaciones para expresar a x y a y en términos de c. Esto da

$$x = c + 5, \qquad y = -2c - 3, \qquad z = c.$$

Así, las soluciones del sistema son todas las tríadas ordenadas de la forma

$$(c + 5, -2c - 3, c)$$

en donde c es cualquier número real. Esto puede comprobarse sustituyendo x por $c + 5$, y por $-2c - 3$ y z por c en las dos ecuaciones dadas.

Podemos obtener cualquier número de soluciones para el sistema c por sustitución de números reales específicos. Por ejemplo, si $c = 0$, obtenemos $(5, -3, 0)$; si $c = 2$, se tiene $(7, -7, 2)$ y así sucesivamente.

Existen otras maneras de especificar la solución general. Por ejemplo, empezando con $x = z + 5$ y $y = -2z - 3$, se podría hacer $z = d - 5$, en donde d es cualquier número real. En este caso,

$$x = z + 5 = (d - 5) + 5 = d$$
$$y = -2z - 3 = -2(d - 5) - 3 = -2d + 7$$

y las soluciones del sistema son de la forma

$$(d, -2d + 7, d - 5).$$

Estas tríadas producen las mismas soluciones como $(c + 5, -2c - 3, c)$. Por ejemplo, si $d = 5$ obtenemos $(5, -3, 0)$; si $d = 7$ obtenemos $(7, -7, 2)$ y así sucesivamente. ■

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** si son nulos todos los términos que no contienen variables. Un sistema de ecuaciones homogéneas siempre tiene una **solución trivial** que se obtiene sustituyendo por cero cada variable. Algunas veces existen soluciones no triviales. El procedimiento para encontrar estas soluciones en el mismo que se usó para los sistemas no homogéneos.

EJEMPLO 5 Hallar las soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

SOLUCIÓN Se procede de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nótese que la penúltima matriz está en la forma escalonada. Al igual que en el Ejemplo 4 se ha dado un paso más, obteniendo un cero *arriba* del primer elemento diferente de cero de la segunda fila. La matriz final corresponde al sistema

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x = -z \\ y = 3z \end{cases}$$

Asignando cualquier valor c a z, se obtiene $x = -c$ y $y = 3c$. Así, las soluciones son todas las tríadas ordenadas de la forma $(-c, 3c, c)$, en donde c es un número real. ■

EJEMPLO 6 Encontrar la solución del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0. \end{cases}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La última matriz está en la forma escalonada y es la matriz del sistema

$$x + y + z = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0.$$

Se sigue entonces que la última solución para el sistema dado es la trivial (0, 0, 0). ■

El siguiente ejemplo presenta un problema aplicado que se puede resolver por medio de un sistema de tres ecuaciones lineales.

EJEMPLO 7 Un comerciante desea combinar dos clases de cacahuates con nueces cuyos costos respectivos son de \$1.50 y \$2.50 y \$4.00 por libra, para obtener 130 libras de mezcla que cueste \$3.00 la libra. ¿Cuántas libras de cada clase deberá utilizar, si además desea que la cantidad de cacahuates de la variedad más barata sea el doble que la de la variedad más cara?

SOLUCIÓN Utilizaremos las tres variables siguientes:

x = libras de cacahuates de \$1.50 la libra,

y = libras de cacahuates de \$2.50 la libra,

z = libras de nueces de \$4.00 la libra.

De acuerdo con el enunciado del problema, escribimos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 130 \\ 1.50x + 2.50y + 4.00z = 3.00(130) \\ x = 2y. \end{cases}$$

Se deja al lector verificar que la solución de este sistema es $x = 40$, $y = 20$, $z = 70$. De ahí que el comerciante deberá mezclar 40 libras de cacahuates de \$1.50, 20 libras de \$2.50 y 70 libras de nueces. ■

Ejercicios 9.3

Use matrices para resolver los sistemas de los Ejercicios 1 a 26.

1. $\begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y + z = 6 \\ x + 3y - 2z = 13 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 3y - z = -3 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x + 2y - z = -7 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 3y + z = 17 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x - y + 3z = 6 \\ -8x + 3y - 5z = -6 \\ 5x - 4y = -9 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x + 6y - 4z = 1 \\ x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + y - 3z = -7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5y + 3z = -2 \\ x - 7z = 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = -3 \\ -3x + 2y + z = 1 \\ 4x + y - 3z = 4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = -5 \\ 5x - 2y + z = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y - 4z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 7 \\ x + 4y - z = -2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x - y + 4z = 8 \\ -3x + y - 2z = 5 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4x - 2y + z = 5 \\ 3x + y - 4z = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5x + 2y - z = 10 \\ y + z = -3 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + 2y - z - 3w = 2 \\ 3x + y - 2z - w = 6 \\ x + y + 3z - 2w = -3 \\ 4x - 3y - z - 2w = -8 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x - 2y - 5z + w = -1 \\ 2x - y + z + w = 1 \\ 3x - 2y - 4z - 2w = 1 \\ x + y + 3z - 2w = 2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x - y - 2z + 2s - 5t = 2 \\ x + 3y - 2z + s - 2t = -5 \\ -x + 4y + 2z - 3s + 8t = -4 \\ 3x - 2y - 4z + s - 3t = -3 \\ 4x - 6y + z - 2s + t = 10 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x + 2y + z + 3u + v + w = 1 \\ 2x + y - 2z + 3u - v + 4w = 6 \\ 6x + 3y + 4z - u + 2v + w = -6 \\ x + y + z + u - v - w = 8 \\ -2x - 2y + z - 3u + 2v - 3w = -10 \\ x - 3y + 2z + u + 3v + w = -1 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 5x + 2z = 1 \\ y - 3z = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 3y + 2z = -3 \\ 7x - 3z = 1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 2x + y = -7 \\ -x + y = -1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ x + y = 1 \\ x - 2y = 13 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 3y = 4 \\ x + y = -2 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$

27. Un químico tiene tres soluciones que contienen un 10%, 30% y 50%, respectivamente, de cierto ácido; desea mezclar las tres soluciones, usando el doble de la solución al 50% respecto a la de 30%, para obtener 50 litros de una solución que contenga un 32% del ácido. ¿Cuántos litros de cada solución deberá usar?

28. Una piscina puede ser llenada con tres tuberías, A, B y C. La tubería A tarda 8 horas en llenar la piscina. Este mismo trabajo se realiza en 6 horas, si se emplean A y C simultáneamente, y en 10 horas si B y C funcionan conjuntamente. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse la piscina si se usan las tres tuberías?

29. Una compañía tiene tres máquinas A, B y C que producen cierto artículo. Sin embargo, debido a la falta de operarios capacitados, solamente se pueden operar dos de las máquinas simultáneamente. La siguiente tabla muestra la producción en periodos de tres días, usando las diversas combinaciones de dos máquinas.

Máquinas utilizadas	Horas de uso	Artículos producidos
A y B	6	4500
A y C	8	3600
B y C	7	4900

¿Cuánto tiempo le tomaría a cada máquina, si se usara sola, producir 1000 artículos?

30. Si dos resistencias R_1 y R_2 de un circuito eléctrico están conectadas en paralelo, se encuentra la resistencia total R con la fórmula $1/R = (1/R_1) + (1/R_2)$. Dadas tres resistencias A, B y C, y sabiendo que la resistencia total de A y B conectadas en paralelo es de 48 ohms, la de B y C es 80 ohms y la de A y C es 60 ohms, encuentre A, B y C.

31. Un proveedor de productos para el campo tiene tres tipos de fertilizantes G_1, G_2 y G_3 que tienen contenidos de nitrógeno de 30%, 20% y 15%, respectivamente. Se ha planeado mezclarlas para obtener 600 libras de fertilizante con un contenido de nitrógeno de 25%. Esta mezcla, debe contener 100 libras más del tipo G_3 que del tipo G_2. ¿Cuántas libras se deben usar de cada tipo?

32. Si una partícula se desplaza sobre una recta coordenada con una aceleración a (cm/s^2), entonces en el tiempo t (s) su distancia $s(t)$ (cm) respecto al origen está dada por

$$s(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

en donde v_0 y s_0 son la velocidad y la distancia a partir del origen respectivamente, para $t = 0$. Si las distancias de la partícula respecto al origen para $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$ y $t = \frac{3}{2}$ son 7, 11 y 17, respectivamente, encuentre a, v_0 y s_0.

33. En la figura se muestra un circuito eléctrico que contiene tres resistores (o resistencias), una batería de 6 V (volts) y otra batería de 12 V. Usando las leyes de Kirchoff se puede demostrar que las tres corrientes I_1, I_2 e I_3 satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

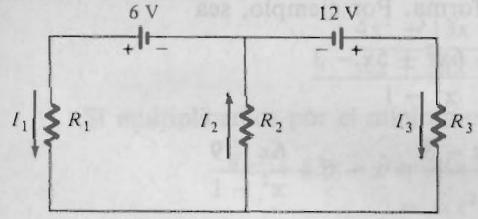
$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ R_1I_1 + R_2I_2 = 6 \\ R_2I_2 + R_3I_3 = 12. \end{cases}$$

Encuentre las tres corrientes si

(a) $R_1 = R_2 = R_3 = 3\,\Omega$ (ohms).

(b) $R_1 = 4$ ohms, $R_2 = 1$ ohm, y $R_3 = 4$ ohms.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 33



34. Una población estable de 35 000 aves vive en tres islas. Cada año, 10% de la población de la isla A emigra a la isla B; 20% de la población de B emigra a la isla C, y 5% de la población de C emigra a A. Calcule el número de pájaros que vive en cada isla si la población de cada una no varía de un año a otro.

35. Una tienda se especializa en la preparación de mezclas de café para conocedores. El dueño desea preparar bolsas de 1 libra que se venderán a \$3.50 (dólares) usando cafés colombiano, brasileño y de Kenia. El costo por libra de estos tres tipos de café es \$4, \$2 y \$3, respectivamente.

(a) Muestre que se debe usar al menos $\frac{1}{2}$ libras de café colombiano, y no más de $\frac{1}{4}$ de libra de café brasileño.

(b) Determine la cantidad de cada tipo de café suponiendo que el dueño decide usar $\frac{1}{8}$ de libra de café brasileño.

36. Un ganadero tiene 750 cabezas de ganado que consisten en 400 reses adultas (de 2 años o más de edad) 150 terneros y 200 becerros. Se conoce la siguiente información acerca de esta especie en particular. Cada primavera, una hembra adulta tiene un sólo becerro y 75% de estos becerros sobrevivencia de los terneros y las reses adultas son 80% y 90%, respectivamente. Por último, la razón macho-hembra es 1 para todos los grupos de edades.

(a) Calcule la población de cada grupo de edad para la próxima primavera.

(b) Calcule la población de cada grupo de edad en la primavera pasada.

37. Encuentre una función cuadrática f tal que $f(1) = 3$, $f(2) = 5/2$ y $f(-1) = 1$.

38. Si $f(x) = ax^3 + bx + c$, determine a, b y c tales que la gráfica de f pase por los puntos $(-3, -12)$, $(-1, 22)$ y $(2, 13)$.

39. Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P_1(2, 1)$, $P_2(-1, -4)$ y $P_3(3, 0)$. (*Sugerencia:* La ecuación de una circunferencia tiene la forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.)

40. Determine a, b y c tales que la gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pase por los puntos $P_1(3, -1)$, $P_2(1, -7)$ y $P_3(-2, 14)$.

9.4 Fracciones parciales

En esta sección se muestra cómo pueden emplearse los sistemas de ecuaciones para ayudar a descomponer expresiones racionales en sumas de expresiones más sencillas. Esta técnica es útil en algunas partes de los cursos de matemáticas avanzadas, como el cálculo.

Resulta sencillo comprobar que

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}.$$

La expresión del lado derecho de esta igualdad se llama *descomposición en fracciones parciales* de $2/(x^2-1)$.

Es teóricamente posible escribir *cualquier* expresión racional como una suma de expresiones racionales cuyos denominadores son potencias de polinomios de grados no mayores que dos. Si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios y *el grado de* $f(x)$ *es menor que el grado de* $g(x)$, puede comprobarse que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = F_1 + F_2 + \cdots + F_r$$

donde cada F_k tiene una de las formas

$$\frac{A}{(px+q)^m} \quad \text{o bien} \quad \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^n}$$

con m y n enteros no negativos, y en donde $ax^2 + bx + c$ es **irreducible**, en el sentido de ser un polinomio cuadrático que no tiene raíces reales, esto es, $b^2 - 4ac < 0$. La suma $F_1 + F_2 + \cdots + F_r$ se llama **descomposición en fracciones parciales** de $f(x)/g(x)$ y cada F_k es una **fracción parcial**. No demostraremos este resultado algebraico, pero daremos reglas para obtener la descomposición.

Para encontrar la descomposición en fracciones parciales de $f(x)/g(x)$ es *esencial que* $f(x)$ *tenga menor grado que* $g(x)$. Cuando éste no sea el caso, la división larga permite obtener una expresión de esta forma. Por ejemplo, sea

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1}$$

por división obtenemos, $\dfrac{x^3 - 6x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1} = x - 6 + \dfrac{6x - 9}{x^2 - 1}.$

Y $(6x - 9)/(x^2 - 1)$ se descompone así en fracciones parciales.

GUÍAS: Obtención de las descomposiciones en fracciones parciales de $\frac{f(x)}{g(x)}$

A Si el grado de la función $f(x)$ no es menor que el grado de $g(x)$, use la división (no abreviada) para encontrar la forma propia.

B Exprese $g(x)$ como producto de factores lineales $px + q$ o de factores cuadráticos irreducibles $ax^2 + bx + c$, y reúna factores repetidos de manera que $g(x)$ sea un producto de factores *distintos* de la forma $(px + q)^m$ o bien $(ax^2 + bx + c)^n$, en donde m y n son enteros no negativos.

C Aplique las siguientes reglas.

Regla 1. Para cada factor de la forma $(px + q)^m$, donde $m \geq 1$, la descomposición contiene una suma de m fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1}{px+q} + \frac{A_2}{(px+q)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(px+q)^m}$$

en donde cada A_k es un número real.

Regla 2. Para cada factor de la forma $(ax^2 + bx + c)^n$, en donde $n \geq 1$ y $ax^2 + bx + c$ es irreducible, la descomposición en fracciones parciales contiene una suma de n fracciones de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

en donde cada A_k y B_k es un número real. ■■■

EJEMPLO 1 Hallar la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x}.$$

SOLUCIÓN El denominador del cociente tiene la forma factorizada $x(x + 3)(x - 1)$. Cada uno de estos factores es de la forma de la Regla 1, con $m = 1$. Al factor x le corresponde una fracción parcial de la forma A/x. Similarmente, a los factores $x + 3$ y $x - 1$ les corresponden las fracciones parciales $B/(x + 3)$ y $C/(x - 1)$, respectivamente. La descomposición en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1}.$$

Si multiplicamos por el mínimo común denominador $x(x + 3)(x - 1)$, obtenemos

$$\begin{aligned} 4x^2 + 13x - 9 &= A(x+3)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+3) \\ &= A(x^2 + 2x - 3) + B(x^2 - x) + C(x^2 + 3x). \end{aligned}$$

Esto también puede expresarse como

$$4x^2 + 13x - 9 = (A + B + C)x^2 + (2A - B + 3C)x - 3A.$$

Si igualamos los coeficientes de las potencias iguales de x de cada lado de la última ecuación, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A + B + C = 4 \\ 2A - B + 3C = 13 \\ 3A = -9. \end{cases}$$

Puede demostrarse que la solución es $A = 3$, $B = -1$, $C = 2$. Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales es,

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x(x+3)(x-1)} = \frac{3}{x} + \frac{-1}{x+3} + \frac{2}{x-1}.$$

■

EJEMPLO 2 Efectuar la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{x^2 + 10x - 36}{x(x-3)^2}.$$

SOLUCIÓN Por la Regla 1, con $m = 1$, al factor x le corresponde la fracción parcial A/x. Aplicamos la Regla 1, y con $m = 2$ el factor al cuadrado $(x-3)^2$ da una suma de dos fracciones parciales, $B/(x-3) + C/(x-3)^2$. Entonces la descomposición en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{x^2 + 10x - 36}{x(x-3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}.$$

Multiplicando ambos lados por $x(x-3)^2$ obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + 10x - 36 &= A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx \\ &= A(x^2 - 6x + 9) + B(x^2 - 3x) + Cx \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$x^2 + 10x - 36 = (A + B)x^2 + (-6A - 3B + C)x + 9A.$$

Como en el Ejemplo 1, se igualan los coeficientes de las potencias iguales de x, obteniendo así

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -6A - 3B + C = 10 \\ 9A = -36. \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones tiene la solución $A = -4$, $B = 5$, $C = 1$. Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x^2 + 10x - 36}{x(x-3)^2} = \frac{-4}{x} + \frac{5}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2}.$$

■

EJEMPLO 3 Obtener la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}.$$

SOLUCIÓN Se puede factorizar el denominador de la siguiente forma:

$$2x^3 - x^2 + 8x - 4 = x^2(2x-1) + 4(2x-1) = (x^2 + 4)(2x-1).$$

Aplicamos la Regla 2 al factor cuadrático irreducible $x^2 + 4$ y vemos que una de las fracciones parciales tiene la forma $(Ax + B)/(x^2 + 4)$. Por la Regla 1, sabemos que también hay una fracción parcial $C/(2x-1)$ que corresponde al factor $2x - 1$. Por consiguiente,

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{2x - 1}.$$

Como se ha visto en los ejemplos anteriores esto nos conduce a

$$\begin{aligned} x^2 - x - 21 &= (Ax + B)(2x - 1) + C(x^2 + 4) \\ &= 2Ax^2 - Ax + 2Bx - B + Cx^2 + 4C \end{aligned}$$

o bien, $x^2 - x - 21 = (2A + C)x^2 + (-A + 2B)x - B + 4C.$

Esto da el sistema

$$\begin{cases} 2A + C = 1 \\ -A + 2B = -1 \\ -B + 4C = -21, \end{cases}$$

que tiene la solución $A = 3$, $B = 1$, $C = -5$. Entonces la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 4} + \frac{-5}{2x - 1}.$$

■

EJEMPLO 4 Hallar la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2}.$$

SOLUCIÓN Aplicando la Regla 2 con $n = 2$, se obtiene

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}.$$

Multiplicando ambos lados por $(x^2 + 1)^2$, obtenemos

$$5x^3 - 3x^2 + 7x - 3 = (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D$$

o bien $5x^3 - 3x^2 + 7x - 3 = Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D).$

Comparando los coeficientes de x^3 y x^2, se obtiene $A = 5$ y $B = -3$; por los coeficientes de x vemos que $A + C = 7$, o equivalentemente $C = 7 - A = 7 - 5 = 2$. Finalmente, los términos constantes dan $B + D = -3$, o sea $D = -3 - B = -3 - (-3) = 0$. Por lo tanto,

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{5x - 3}{x^2 + 1} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

■

Ejercicios 9.4

Obtenga la descomposición en fracciones parciales de los Ejercicios 1 a 26.

1. $\dfrac{8x-1}{(x-2)(x+3)}$
2. $\dfrac{x-29}{(x-4)(x+1)}$
3. $\dfrac{x+34}{x^2-4x-12}$
4. $\dfrac{5x-12}{x^2-4x}$
5. $\dfrac{4x^2-15x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)}$
6. $\dfrac{x^2+19x+20}{x(x+2)(x-5)}$
7. $\dfrac{4x^2-5x-15}{x^3-4x^2-5x}$
8. $\dfrac{37-11x}{(x+1)(x^2-5x+6)}$
9. $\dfrac{2x+3}{(x-1)^2}$
10. $\dfrac{5x^2-4}{x^2(x+2)}$
11. $\dfrac{19x^2+50x-25}{3x^3-5x^2}$
12. $\dfrac{10-x}{x^2+10x+25}$
13. $\dfrac{x^2-6}{(x+2)^2(2x-1)}$
14. $\dfrac{2x^2+x}{(x-1)^2(x+1)^2}$
15. $\dfrac{3x^3+11x^2+16x+5}{x(x+1)^3}$
16. $\dfrac{4x^3+3x^2+5x-2}{x^3(x+2)}$
17. $\dfrac{x^2+x-6}{(x^2+1)(x-1)}$
18. $\dfrac{x^2-x-21}{(x^2+4)(2x-1)}$
19. $\dfrac{9x^2-3x+8}{x^3+2x}$
20. $\dfrac{2x^3+2x^2+4x-3}{x^4+x^2}$
21. $\dfrac{4x^3-x^2+4x+2}{(x^2+1)^2}$
22. $\dfrac{3x^3+13x-1}{(x^2+4)^2}$
23. $\dfrac{2x^4-2x^3+6x^2-5x+1}{x^3-x^2+x-1}$
24. $\dfrac{x^3}{x^3-3x^2+9x-27}$
25. $\dfrac{4x^3+4x^2-4x+2}{2x^2-x-1}$
26. $\dfrac{x^5-5x^4+7x^3-x^2-4x+12}{x^3-3x^2}$

9.5 Álgebra de matrices

La teoría de las matrices tiene muchas aplicaciones matemáticas y científicas. En esta sección estudiaremos algunas propiedades algebraicas básicas de las matrices que sirven como punto de partida para dicha teoría.

Por razones de espacio resulta conveniente denotar una matriz A de $m \times n$ como la que aparece en la definición dada en la Sección 9.3 mediante el símbolo (a_{ij}). Si (b_{ij}) denota otra matriz B de $m \times n$, entonces decimos que A y B son **iguales** y escribimos

$$A = B \quad \text{si y sólo si} \quad a_{ij} = b_{ij}$$

para todo i, j. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ \sqrt[3]{8} & 3^2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 & \sqrt{25} \\ 2 & 9 & -2 \end{bmatrix}.$$

Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices de $m \times n$, entonces su **suma** $A + B$ se define como la matriz $C = (c_{ij})$ de $m \times n$, en donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i, j. De este modo, para sumar dos matrices sumamos los elementos que aparecen en las posiciones correspondientes de cada matriz. Nótese que dos matrices solamente pueden ser sumadas si tienen el mismo número de filas y de columnas. Usando la notación de paréntesis la definición de adición puede ser expresada de la siguiente manera:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

A pesar de que hemos usado el símbolo + en dos sentidos diferentes, es difícil confundirse, ya que cuando el símbolo + aparece entre los símbolos que denotan matrices, se refiere a la adición matricial, y cuando aparece entre números reales denota la suma de éstos. El siguiente es un ejemplo de la adición o suma de dos matrices de 3×2

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 7 & 0 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$$

No es difícil demostrar que la suma de matrices es asociativa y conmutativa, esto es

$$A + B = B + A, \qquad A + (B + C) = (A + B) + C$$

para las matrices A, B y C de $m \times n$.

La **matriz nula de** $m \times n$, denotada por O, es la matriz con m filas y n columnas en la que todos los elementos son números 0. Esta matriz es un elemento neutro respecto a la suma, ya que

$$A + O = A$$

para toda matriz A de $m \times n$. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

El **inverso aditivo** $-\mathbf{A}$ de la matriz $A = (a_{ij})$ es, por definición, la matriz $(-a_{ij})$ que se obtiene cambiando el signo de cada elemento de A. Por ejemplo

$$-\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Se deduce que para toda matriz A de $m \times n$,

$$A + (-A) = O.$$

La **resta** de dos matrices de $m \times n$ se define por

$$A - B = A + (-B).$$

Usando la notación de paréntesis para matrices, esto implica que

$$(a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij}) + (-b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij}).$$

De ahí que para restar dos matrices, se restan los elementos que están en posiciones correspondientes.

El **producto** de un número real c y una matriz $A = (a_{ij})$ de $m \times n$ se define por

$$cA = (ca_{ij}).$$

De este modo, para encontrar cA multiplicamos por c cada elemento de A. Por ejemplo,

$$3\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Se pueden establecer los siguientes resultados, en donde A y B son matrices de $m \times n$ y, c y d son números reales cualesquiera.

$$c(A + B) = cA + cB$$

$$(c + d)A = cA + dA$$

$$(cd)A = c(dA)$$

La siguiente definición del producto de dos matrices puede parecer insólita; sin embargo, existen muchas aplicaciones que justifican esta definición. Para poder definir el producto AB de dos matrices A y B, *es necesario que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B*. Supongamos que $A = (a_{ij})$ es de $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ es de $n \times p$. Para determinar el elemento c_{ij} del producto, aislamos la fila i de A y la columna j de B, esto es

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

Multiplicamos los elementos por pares y después los sumamos, usando la fórmula siguiente:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Por ejemplo, el elemento c_{11} de la primera fila y la primera columna de AB está dado por

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}.$$

El elemento c_{12} de la primera fila y la segunda columna de AB es

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2}.$$

Por definición, el producto AB tiene el mismo número de filas que A y el mismo número de columnas que B. *En particular, si A es de $m \times n$ y B es de $n \times p$, entonces*

AB es de $m \times p$. El siguiente ejemplo muestra el producto de una matriz de 2×3 por otra de 3×4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & 8 & -4 & -22 \\ 6 & -16 & 0 & -16 \end{bmatrix}.$$

Los siguientes son los cálculos necesarios para obtener algunos de los elementos c_{ij} del producto:

$$c_{11} = (1)(5) + (2)(-1) + (-3)(7) = 5 - 2 - 21 = -18$$
$$c_{13} = (1)(2) + (2)(3) + (-3)(4) = 2 + 6 - 12 = -4$$
$$c_{23} = (4)(2) + (0)(3) + (-2)(4) = 8 + 0 - 8 = 0$$
$$c_{24} = (4)(0) + (0)(1) + (-2)(8) = 0 + 0 - 16 = -16.$$

El lector debe calcular los elementos restantes.

La operación producto de dos matrices no es conmutativa. De hecho, si A es de 2×3, y B de 3×4, es posible encontrar AB, pero BA es indefinido ya que el número de columnas de B es diferente del número de filas de A. Lo más frecuente es que los productos AB y BA sean distintos, aun cuando ambos estén definidos. En el siguiente ejemplo se ilustra este hecho, así como el de que el producto de dos matrices no nulas puede ser igual a una matriz nula.

EJEMPLO 1

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, mostrar que $AB \neq BA$.

SOLUCIÓN Por la definición de producto, tenemos

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $AB \neq BA$. Nótese que BA es una matriz nula. ■

Se puede demostrar que la multiplicación de matrices es asociativa, o sea que

$$A(BC) = (AB)C$$

siempre que los productos indicados estén definidos; esto es, cuando A es de $m \times n$, B de $n \times p$ y C de $p \times q$. Si las matrices en cuestión tienen el número apropiado de filas y columnas, entonces las propiedades distributivas también se cumplen. De esta manera, si A_1 y A_2 son matrices de $m \times n$ y si B_1 y B_2 son de $n \times p$, entonces

$$A_1(B_1 + B_2) = A_1B_1 + A_1B_2$$

y

$$(A_1 + A_2)B_1 = A_1B_1 + A_2B_1.$$

Como caso especial, si todas las matrices son cuadradas, de orden n, entonces las propiedades asociativa y distributiva se verifican. No demostraremos estas propiedades.

En lo que resta de esta sección nos ocuparemos únicamente de las matrices cuadradas. El símbolo I_n se usará para denotar a la matriz cuadrada de orden n que tiene un 1 en cada posición de la diagonal principal y 0 en las demás posiciones. Por ejemplo,

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

etc. Se puede demostrar que si A es cualquier matriz cuadrada de orden n, entonces

$$AI_n = A = I_nA.$$

Por esta razón, I_n se llama **matriz identidad de orden n**. Como ilustración, si $A = (a_{ij})$ es de orden 2, entonces

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Algunas de las matrices A de $n \times n$ tienen matriz **inversa**; es decir que puede existir una matriz B tal que $AB = I_n = BA$. Si A tiene inversa, a ésta se la denota por A^{-1} y se tiene

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A.$$

El símbolo A^{-1} se lee "inversa de A". La teoría matricial *no* acepta el símbolo $1/A$ en lugar de A^{-1}.

A continuación describiremos la técnica para encontrar la inversa de una matriz cuadrada A, siempre que ésta exista. No justificaremos el procedimiento ya que esto requeriría del manejo de conceptos más allá del alcance de este texto. Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de $n \times n$, empezamos por formar la siguiente matriz de $n \times 2n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

en donde, como se indica, la matriz identidad I_n de $n \times n$ aparece "a la derecha" de la matriz A. Aplicamos después sucesivas transformaciones elementales de fila hasta obtener una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

donde la matriz identidad I_n aparece "a la izquierda" de la matriz (b_{ij}) de $n \times n$. Se puede demostrar que (b_{ij}) es la matriz inversa A^{-1}.

EJEMPLO 2

Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, determinar A^{-1}

SOLUCIÓN Empezamos por escribir $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ realizamos operaciones elementales de fila hasta que aparezca a la izquierda la matriz identidad I_2, esto es

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-4R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Se obtiene así,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}.$$

Para comprobar el resultado, el lector debe verificar que

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

■

EJEMPLO 3

Si $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, determinar A^{-1}

SOLUCIÓN Se procede como sigue:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)R_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-10R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 13 & -10 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{9}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{11}{9} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{10}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{11}{9} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{10}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{11}{9} \end{bmatrix}$$

Por consiguiente,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{13}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{11}{9} \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -10 & 7 & -5 \\ 4 & -1 & 2 \\ -13 & 10 & -11 \end{bmatrix}.$$

El lector deberá comprobar que

$$AA^{-1} = I_3 = A^{-1}A.$$

■

Existen múltiples aplicaciones de la inversa de una matriz. Una de ellas es la obtención de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales. Considérese por ejemplo el caso de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = k_2. \end{cases}$$

En términos de matrices, podemos expresar al sistema como

$$\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}.$$

Si hacemos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix},$$

Lo anterior toma la forma $AX = B$.

Si A^{-1} existe, entonces al multiplicar cada lado de la última ecuación por A^{-1} obtenemos $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Como $A^{-1}A = I_2$ e $I_2X = X$, entonces

$$X = A^{-1}B$$

de donde se obtiene la solución (x, y). Se puede extender la técnica a sistemas de n ecuaciones con n incógnitas.

EJEMPLO 4 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y = 3 \\ 3x + y - 2z = -2. \end{cases}$$

SOLUCIÓN Si hacemos

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

entonces, como en el ejemplo anterior, el sistema dado se puede escribir en términos de matrices en la forma $AX = B$. Esto implica que $X = A^{-1}B$. La matriz A^{-1} es la que se obtuvo en el Ejemplo 3. Sustituyendo X, A^{-1} y B, en la última ecuación obtenemos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \tfrac{1}{9}\begin{bmatrix} -10 & 7 & -5 \\ 4 & -1 & 2 \\ -13 & 10 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 21 \\ -3 \\ 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{13}{3} \end{bmatrix}.$$

Se deduce que $x = \frac{7}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$ y $z = \frac{13}{3}$. Por lo tanto, la tríada ordenada $(\frac{7}{3}, , -\frac{1}{3}, \frac{13}{3})$ es la solución del sistema dado. ■

El método de solución empleado en el Ejemplo 4 solamente se utiliza cuando se conoce A^{-1} o cuando se tienen que resolver muchos sistemas con la misma matriz de coeficientes, en otros casos es preferible usar el método de eliminación o el matricial de la Sección 9.3.

Ejercicios 9.5

En los Ejercicios 1 a 8, encuentre $A + B$, $A - B$, $2A$ y $-3B$.

1. $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 5 & 4 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

5. $A = [4 \quad -3 \quad 2]$, $B = [7 \quad 0 \quad -5]$

6. $A = \begin{bmatrix} 7 \\ -16 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -11 \\ 9 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 7 & -2 \end{bmatrix}$

8. $A = [-7]$, $B = [9]$

En los Ejercicios 9 a 18, encuentre AB y BA.

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

17. $A = [-3 \quad 7 \quad 2]$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$

18. $A = [4 \quad 8]$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 19 a 22, encuentre AB.

19. $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = [5 \quad 1]$

21. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ -7 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

23. Considerando que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, compruebe que $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$, en donde $A^2 = AA$ y $B^2 = BB$.

24. Si A y B son las matrices del Ejercicio 23, compruebe que $(A + B)(A + B) \neq A^2 + 2AB + B^2$.

25. Si A y B son las matrices del Ejercicio 23 y $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, demuestre que $A(B + C) = AB + AC$.

26. Si A, B y C son las matrices del Ejercicio 25, demuestre que $A(BC) = (AB)C$.

En los Ejercicios 27 a 30, demuestre las identidades dadas, para

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{22} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix},$$

c, d son números reales.

27. $c(A + B) = cA + cB$

28. $(c + d)A = cA + dA$

29. $A(B + C) = AB + AC$ **30.** $A(BC) = (AB)C$

En los Ejercicios 31 a 42, encuentre la inversa, si existe, de la matriz dada.

31. $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **32.** $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ **34.** $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **36.** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ **38.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

39. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ **40.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

41. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

42. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

43. ¿Qué condiciones deben cumplir a y b para que exista la inversa de la matriz $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$? Encuentre una fórmula para la inversa, cuando ésta exista.

44. Si $abc \neq 0$, encuentre la inversa de $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

45. Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, demuestre que $AI_3 = A = I_3A$.

46. Demuestre que para toda matriz cuadrada A de orden 4 se cumple que $AI_4 = A = I_4A$.

Resuelva los sistemas de los Ejercicios 47 a 50 por el método del Ejemplo 4. (Utilice las inversas de las matrices de los Ejercicios 31, 32, 37 y 38.)

47. $\begin{cases} 2x - 4y = 3 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

48. $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases}$

49. $\begin{cases} -2x + 2y + 3z = 1 \\ x - y = 3 \\ y + 4z = -2 \end{cases}$

50. $\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ -2x + y = 4 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$

9.6 Determinantes

En esta sección y en la siguiente supondremos que todas las matrices en cuestión son matrices *cuadradas*. A toda matriz cuadrada A se le asocia un número llamado **determinante** de A. Denotaremos al determinante de una matriz cuadrada A por $|A|$. No deberá confundirse esta notación con la del valor absoluto de un número real. Para evitar cualquier malentendido, en algunos textos se usa la expresión $\det A$ en lugar de $|A|$. Empezaremos por definir $|A|$ para el caso en que A es de orden 1 e iremos incrementando el orden paso por paso.

Si A es una matriz cuadrada de orden 1, entonces A tiene un solo elemento. De este modo, $A = [a_{11}]$ y definimos $|A| = a_{11}$. Si A es una matriz cuadrada de orden 2, entonces podemos escribir

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

y se define al determinante de A como

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Como se indica a continuación, al reemplazar por barras verticales a los corchetes (o paréntesis rectangulares) en el símbolo de A, se obtiene otra notación para $|A|$.

DEFINICIÓN

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

EJEMPLO 1

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, determinar $|A|$

SOLUCIÓN Por definición,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (2)(-3) - (4)(-1) = -6 + 4 = -2. \quad \blacksquare$$

Para matrices cuadradas de orden 3 es conveniente introducir la siguiente terminología.

DEFINICIÓN

Si A es una matriz de orden 3, entonces el **menor** M_{ij} de un elemento a_{ij} es el determinante de la matriz de orden 2 que se obtiene al omitir el renglón i y la columna j de A.

De este modo, para determinar el menor de un elemento descartamos el renglón y la columna en que éste aparece y se establece el determinante de la matriz resultante. Para ilustrarlo, consideremos la matriz general de 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

obtenemos
$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$
$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$$
$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$
$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$$

y de la misma manera para los otros menores M_{21}, M_{22}, M_{31}, M_{32} y M_{33}.
Emplearemos también el siguiente concepto.

DEFINICIÓN

El **cofactor** A_{ij} del elemento a_{ij} se define como
$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

De ahí que, para obtener el cofactor de a_{ij} encontramos el menor y lo multiplicamos por 1 o bien por -1, dependiendo de si la suma de i con j es par o impar, respectivamente. Una manera sencilla de recordar el signo $(-1)^{i+j}$ asociado al cofactor A_{ij} consiste en considerar el siguiente esquema:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 2 Si
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$
obtener M_{11}, M_{21}, M_{22}, A_{11}, A_{21} y A_{22}.

SOLUCIÓN Por definición,
$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (-7)(0) = 10$$
$$M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = (-3)(5) - (-7)(3) = 6$$
$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (1)(5) - (-2)(3) = 11.$$

Para obtener los cofactores solamente necesitamos anteponer a sus menores correspondientes el signo apropiado. De este modo, usando la definición de cofactor,

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (1)(10) = 10$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)(6) = -6$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = (1)(11) = 11.$$

Se podía haber utilizado también el esquema anterior para determinar los signos apropiados. ■

A continuación se define el determinante $|A|$ de una matriz cuadrada de orden 3.

DEFINICIÓN

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Como $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$, $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12}$ y $A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13}$, entonces la definición anterior es equivalente a

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

Si expresamos a M_{11}, M_{12} y M_{13} en términos de los elementos de A obtenemos la fórmula del $|A|$, esto es

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}.$$

La definición de $|A|$ de una matriz cuadrada A de orden 3 muestra un patrón que consiste en multiplicar cada elemento del renglón 1 por su cofactor y en seguida, sumarlos para encontrar $|A|$, esto es lo que se conoce como *el desarrollo de* $|A|$ *por el primer renglón*. Si llevamos a cabo los cálculos, resulta sencillo comprobar que *de una manera análoga se puede desarrollar* $|A|$ *usando cualquier renglón o columna*. Como una ilustración, el desarrollo por la segunda columna es

$$|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$
$$= a_{12}\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right) + a_{22}\left(+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{32}\left(-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\right).$$

Aplicando la definición a los determinantes que están entre paréntesis, realizando las multiplicaciones indicadas y ordenando los términos de la suma, podemos obtener la

fórmula de $|A|$ en términos de los elementos de A. En forma análoga, el desarrollo por el tercer renglón es

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}.$$

Lo cual concuerda con los desarrollos anteriores.

EJEMPLO 3

Evaluar $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Puesto que hay un cero en el segundo renglón, se desarrollará $|A|$ por ese renglón, ya que así sólo se necesita calcular dos cofactores. Entonces,

$$|A| = (2)A_{21} + (5)A_{22} + (0)A_{23}.$$

Usando la definición de cofactor,

$$A_{21} = (-1)^3 M_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -[(3)(-2) - (1)(1)] = 7$$

$$A_{22} = (-1)^4 M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = [(-1)(-2) - (3)(1)] = -1.$$

Por consiguiente,

$$|A| = (2)(7) + (5)(-1) + (0)A_{23} = 14 - 5 + 0 = 9.$$ ■

La definición del determinante de una matriz de orden arbitrario n se puede hacer siguiendo el patrón usado para el orden 3. Específicamente, el **menor** M_{ij} se define como el determinante de la matriz de orden $n - 1$ que se obtiene al omitir el renglón i y la columna j. El **cofactor** A_{ij} se define como $(-1)^{i+j}M_{ij}$. El signo $(-1)^{i+j}$ asociado con A_{ij} se puede recordar usando un esquema similar al que se usó para el orden 3 y continuando los renglones y columnas todo lo que sea necesario. Definimos entonces al determinante $|A|$ de una matriz A de orden n a través de su desarrollo por el primer renglón, esto es

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

o, en términos de menores,

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n}M_{1n}.$$

Se puede obtener el número $|A|$ usando *cualquier* renglón o columna. Concretamente, tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA PARA EL DESARROLLO DE LOS DETERMINANTES

Si A es una matriz cuadrada de orden $n > 1$, entonces el determinante $|A|$ se puede obtener multiplicando a los elementos de cualquier renglón (o columna) por sus respectivos cofactores, y sumando los productos resultantes.

La demostración de este teorema es complicada y puede encontrarse en textos de teoría matricial. Como se ilustra en el siguiente ejemplo, el teorema es de gran utilidad cuando aparecen muchos ceros en algún renglón o columna.

EJEMPLO 4

Evaluar $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Nótese que todos los elementos del tercer renglón, excepto uno, son cero. De este modo, si desarrollamos $|A|$ por el tercer renglón habrá cuando mucho un término diferente de cero. Específicamente,

$$|A| = (0)A_{31} + (0)A_{32} + (-3)A_{33} + (0)A_{34} = -3A_{33}$$

en donde $$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando A_{33} por la columna 1, obtenemos

$$A_{33} = (1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\left(-\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right) + 0\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 + 10 + 0 = 13.$$

Por lo tanto, $$|A| = -3A_{33} = (-3)(13) = -39.$$ ■

En general, si todos, excepto un elemento a, de algún renglón (o columna) de A son cero y si desarrollamos $|A|$ por ese renglón (o columna), entonces todos los términos, menos el producto del elemento a por su cofactor, desaparecen. Este hecho será de gran importancia en la siguiente sección.

Si *todo* elemento de un renglón (o columna) de la matriz A es cero, entonces al desarrollar $|A|$ por ese renglón (o columna) obtenemos el número 0. De esto, se deduce el siguiente resultado.

TEOREMA

Si todo elemento de un renglón (o columna) de una matriz cuadrada A es cero, entonces $|A| = 0$.

Ejercicios 9.6

En cada uno de los Ejercicios 1 a 4, encuentre todos los menores y cofactores de los elementos de las matrices dadas.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

5. al 8. Obtenga los determinantes de las matrices dadas en los Ejercicios 1 a 4.

En los Ejercicios 9 a 20, encuentre los determinantes de las matrices dadas.

9. $\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} a & -a \\ b & -b \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$ **20.** $\begin{bmatrix} a & u & v & w \\ 0 & b & x & y \\ 0 & 0 & c & z \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$

Desarrolle cada determinante de los Ejercicios 21 a 28 para verificar las identidades dadas.

21. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ **22.** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ **24.** $\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ ka + c & kb + d \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ka + b \\ c & kc + d \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b + e \\ c & d + f \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c + e & d + f \end{vmatrix}$

29. Demuestre que si una matriz cuadrada A de orden 2 tiene dos renglones o columnas iguales, entonces $|A| = 0$.

30. Pruebe el Ejercicio 29 para una matriz de orden 3.

En los Ejercicios 31 a 34 sea $I = I_2$ la matriz identidad de orden 2, y sea $f(x) = |A - xI|$. Determine (a) el polinomio $f(x)$, y (b) las raíces o ceros de $f(x)$. En el estudio de las matrices $f(x)$ se llama **polinomio característico de A**, y los ceros de $f(x)$ se conocen como **valores característicos** (o **eigenvalores**) de A.

31. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ **32.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

33. $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ **34.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 35 a 38 sea $I = I_3$ y sea $f(x) = |A - xI|$. Encuentre el polinomio $f(x)$, y (b) los ceros de $f(x)$.

35. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

36. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

37. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

38. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 39 a 42 exprese los determinantes en la forma $ai + bj + ck$, en la que a, b y c son números reales.

39. $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ **40.** $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

41. $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -6 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **42.** $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -6 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

9.7 Propiedades de los determinantes

El método de evaluar un determinante por medio del Teorema del Desarrollo, enunciado en la Sección 9.6 no es eficiente para matrices de orden superior. Por ejemplo, si desarrollamos por cualquiera de sus renglones (o columnas) el determinante de una matriz de orden 10, obtenemos la suma de 10 términos, donde cada uno de ellos contiene el determinante de una matriz de orden 9 (esto es, un cofactor de la matriz original). Si desarrollamos por un renglón (o columna) cualquiera de los últimos determinantes, obtenemos la suma de 9 términos que contienen, cada uno, el determinante de una matriz de orden 8. De este modo, hasta esta etapa se tienen que evaluar 90 determinantes de orden 8. El proceso continúa hasta llegar a determinantes de matrices de orden 2. A menos que la matriz original tenga muchos ceros, el trabajo que implican todos los cálculos es enorme.

Consideraremos, por lo tanto, algunas reglas que simplifican el proceso de evaluación de un determinante. Básicamente, se usan para introducir ceros en el determinante, pero también pueden ser usadas para cambiarlo a su forma escalonada en la que son cero los elementos que están abajo de los elementos a_{ii} de la diagonal principal. Las transformaciones de renglón que se enuncian en el siguiente teorema son las mismas que las transformaciones elementales de renglón de una matriz que se introdujeron en la Sección 9.3. Sin embargo, para los determinantes podemos también emplear transformaciones similares en las columnas.

TEOREMA PARA LAS TRANSFORMACIONES DE RENGLÓN Y COLUMNA DE UN DETERMINANTE

Sea A una matriz cuadrada de orden n.

(i) Si una matriz B se obtiene al intercambiar dos renglones (o columnas) de A, entonces $|B| = -|A|$.

(ii) Si B se obtiene al multiplicar por un número real k cada elemento de un renglón (o columna) de A, entonces $|B| = k|A|$.

(iii) Si B se obtiene al sumarle a cualquier renglón (o columna) de A, k veces otro de sus renglones (o columnas), en donde k es cualquier número real, entonces $|B| = |A|$.

Para justificar las manipulaciones con determinantes al hacer uso de este teorema, nos referiremos a los renglones (o columnas) del *determinante* en la forma evidente. Por ejemplo, la propiedad (iii) se puede enunciar como: "Sumar a cualquier renglón (o columna) el producto de k veces otro renglón (o columna) no afecta el valor del determinante".

La transformación por renglones de los determinantes se especificará mediante los símbolos $\mathbf{R}_{ij}$, $k\mathbf{R}_i$ y $k\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_j$, que se introdujeron en la Sección 9.3. Para las transformaciones por columna se usan símbolos análogos. Por ejemplo, $kC_i + C_j$ significa "sumar a la j-ésima columna k veces la i-ésima columna". En seguida se muestran

algunas ilustraciones del teorema anterior, en las que la razón que justifica cada igualdad se indica a la derecha.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} \qquad R_{12}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad C_{13}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} \qquad -2R_1 + R_2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \qquad 2C_2 + C_1$$

TEOREMA Si dos renglones (o columnas) de una matriz cuadrada A son idénticos, entonces $|A| = 0$.

DEMOSTRACIÓN Si B es una matriz que se obtiene al intercambiar dos renglones (o columnas) idénticos de A, entonces B y A son iguales y en consecuencia $|B| = |A|$. Sin embargo, por (i) del teorema para las transformaciones de renglón y columna de un determinante, tenemos que $|B| = -|A|$ y de ahí que, $-|A| = |A|$, lo que implica que $|A| = 0$. □

EJEMPLO 1

Evaluar $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Vamos a utilizar la parte (iii) del teorema para introducir varios ceros en algunos de los renglones o columnas. Para hacer esto, resulta conveniente escoger un elemento de la matriz que sea igual a 1 o -1, ya que de este modo, evitamos el uso de fracciones. Cuando no exista tal elemento 1 en la matriz original, usando (iii) o (ii) del teorema, podemos introducir el número1. En este ejemplo no tenemos ese problema ya que hay un 1 en el renglón 3 y se procede de la siguiente manera, en la que la razón de cada igualdad se indica a la derecha.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \qquad -2R_3 + R_1$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} \qquad 3R_3 + R_4$$

$$= (1) \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & -1 & 6 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{Se desarrolla por la primera columna.}$$

$$= \begin{vmatrix} 23 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ -28 & -6 & 4 \end{vmatrix} \qquad 5C_2 + C_1$$

$$= \begin{vmatrix} 23 & 4 & 22 \\ 0 & -1 & 0 \\ -28 & -6 & -32 \end{vmatrix} \qquad 6C_2 + C_3$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 23 & 22 \\ -28 & -32 \end{vmatrix} \qquad \text{Se desarrolla por el segundo renglón.}$$

$$= (-1)[(23)(-32) - (-28)(22)] \qquad \text{Por la definición del determinante.}$$

$$= 120$$

■

La parte (ii) del teorema de transformaciones de renglones y columnas se utiliza para encontrar factores de los determinantes. Como ilustración, para el determinante de una matriz de orden 3 tenemos la siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Cuando k es un factor común de los elementos de algún renglón o columna, se cumplen fórmulas similares a la anterior. Si el teorema se utiliza de esta manera, se acostumbra usar la frase "k es un factor común del renglón (o de la columna)".

EJEMPLO 2

Determinar si $A = \begin{bmatrix} 14 & -6 & 4 \\ 4 & -5 & 12 \\ -21 & 9 & -6 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 12 \\ -21 & 9 & -6 \end{vmatrix} \qquad 2 \text{ es un factor común del renglón 1.}$$

$$= (2)(-3)\begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 12 \\ 7 & -3 & 2 \end{vmatrix} \qquad -3 \text{ es un factor común del renglón 3.}$$

$$= 0 \qquad \text{Dos renglones son idénticos.} \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Sin desarrollar el determinante, demostrar que $a - b$ es un factor de

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

SOLUCIÓN

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-b & b & c \\ a^2-b^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \qquad (-1)C_2 + C_1$$

$$= (a-b)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \\ a+b & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \qquad a - b \text{ es un factor común de la columna 1.} \quad \blacksquare$$

Ejercicios 9.7

Explique, sin hacer el desarrollo, la razón por la que los enunciados de los Ejercicios 1 a 14 son verdaderos.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

8. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

12. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

13. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$

En cada uno de los Ejercicios 15 a 24, después de introducir ceros como se hizo en el Ejemplo 1, encuentre el determinante de la matriz.

15. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 5 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ **20.** $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

25. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$

(*Sugerencia:* Véase el Ejemplo 3.)

26. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

27. Si A es una matriz de orden 4 de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

muestre que $|A| = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

28. Si

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{bmatrix}$$

demuestre que

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$$

29. Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son dos matrices cuadradas arbitrarias de orden 2, demuestre que $|AB| = |A|\,|B|$.

30. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n y k es cualquier número real, demuestre que $|kA| = k^n|A|$. (*Sugerencia:* Use (ii) del Teorema para Transformaciones de Renglón y Columna de un Determinante.)

31. Use las propiedades de los determinantes para demostrar que

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

es una ecuación de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

32. Aplique las propiedades de los determinantes para demostrar que

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

es la ecuación de una circunferencia que pasa por los tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3).

9.8 Regla de Cramer

Los determinantes se deducen de una manera natural en el estudio de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. Para ilustrarlo, consideremos el caso general de dos ecuaciones lineales en dos incógnitas x y y:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = k_2 \end{cases}$$

en donde en cada ecuación hay al menos un coeficiente distinto de cero. Podemos suponer que $a_{11} \neq 0$, o bien que $a_{12} \neq 0$, en cuyo caso se puede considerar que y es la "primera" variable en lugar de x. Usaremos transformaciones elementales de renglón para obtener un sistema equivalente de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{a_{21}}{a_{11}}R_1 + R_2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ 0 & a_{22} - \left(\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}\right) & k_2 - \left(\frac{a_{21}k_1}{a_{11}}\right) \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{a_{11}R_2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ 0 & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) & (a_{11}k_2 - a_{21}k_1) \end{bmatrix}$$

De ahí que el sistema dado sea equivalente a

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}k_2 - a_{21}k_1 \end{cases}$$

lo que puede ser escrito también como

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, podemos resolver la segunda ecuación para evaluar y, obteniendo

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

El valor correspondiente para x se puede encontrar sustituyendo y en la primera ecuación; se puede demostrar que esto conduce a

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Lo anterior demuestra que *si el determinante de la matriz de coeficientes de un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables es distinto de cero, entonces el sistema tiene solución única*. Las dos últimas fórmulas para x y y en términos de los cocientes de ciertos determinantes constituyen lo que se conoce como **Regla de Cramer**.

Existe una forma sencilla para recordar la Regla de Cramer. Sea

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

la matriz de coeficientes de un sistema y sea D la matriz obtenida a partir de D reemplazando los coeficientes a_{11}, a_{21} de x por los números k_1, k_2, respectivamente. De igual manera, sea D la matriz obtenida al reemplazar en D los coeficientes a_{12}, a_{22} de y por los números k_1, k_2, respectivamente. De este modo,

$$D_x = \begin{bmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad D_y = \begin{bmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{bmatrix}.$$

Si $|D| \neq 0$, entonces la solución (x, y) está dada por

REGLA DE CRAMER

$$x = \frac{|D_x|}{|D|}, \qquad y = \frac{|D_y|}{|D|}.$$

EJEMPLO 1 Usar la Regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 5x + 7y = 1. \end{cases}$$

SOLUCIÓN El determinante de la matriz de coeficientes es

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 29.$$

Con la notación introducida antes,

$$|D_x| = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -25, \qquad |D_y| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 22.$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{-25}{29}, \qquad y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{22}{29}.$$

De ahí que el sistema tenga la solución única $(-\frac{25}{29}, \frac{22}{29})$. ■

La Regla de Cramer se puede generalizar a sistemas de n ecuaciones lineales en n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, en donde cada ecuación es de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = a.$$

Para resolver tal sistema denotamos por D a la matriz de coeficientes y por D_{x_i} a la matriz obtenida al reemplazar en D a los coeficientes de x_i por la columna de números $k_1, k_2, \ldots, k_n$ que aparece a la derecha de los signos igual en el sistema. Se puede demostrar que si $|D| \neq 0$, entonces el sistema tiene una solución única dada por:

REGLA DE CRAMER (FORMA GENERAL)

$$x_1 = \frac{|D_{x_1}|}{|D|}, \quad x_2 = \frac{|D_{x_2}|}{|D|}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{|D_{x_n}|}{|D|}.$$

Así mismo, se puede mostrar que si $|D| = 0$, las ecuaciones son dependientes o inconsistentes, según si todos los $|D_{x_i}|$ son cero o cuando menos uno de ellos es distinto de cero.

EJEMPLO 2 Aplicar la Regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{cases} x \quad - 2z = 3 \\ \quad - y + 3z = 1 \\ 2x \quad + 5z = 0. \end{cases}$$

SOLUCIÓN Solamente enumeramos los distintos determinantes que se utilizan, dejando la comprobación de las respuestas al lector:

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -9, \qquad |D_x| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -15,$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 27, \qquad |D_z| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6.$$

Por la Regla de Cramer, la solución es

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{-15}{-9} = \frac{5}{3}, \quad y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{27}{-9} = -3, \quad z = \frac{|D_z|}{|D|} = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}.$$

■

Esta regla es un método ineficiente si hay un número grande de ecuaciones, ya que involucra muchos determinantes de matrices de órdenes mayores. Nótese también que no se puede usar directamente si $|D| = 0$ o si el número de ecuaciones es distinto del número de variables. En general, el método de eliminación o el matricial son muy superiores a la Regla de Cramer.

Ejercicios 9.8

1. al 18. Use la Regla de Cramer para resolver los sistemas de los Ejercicios 1 a 18 de la Sección 9.2.

19. al 26. Use la Regla de Cramer para resolver los sistemas en los Ejercicios 1 a 8 de la Sección 9.3.

27. al 30. Use la Reglade Cramer para resolver los sistemas de los Ejercicios 17, 18, 21 y 22 de la Sección 9.3.

9.9 Sistemas de desigualdades

En el Capítulo 2 trabajamos con desigualdades en una sola variable. Se puede desarrollar la notación de desigualdades en varias variables de una manera semejante a la usada para ecuaciones en varias variables. Por ejemplo, a expresiones de la forma

$$3x + y < 5y^2 + 1,$$

$$2x^2 \geq 4 - 3y,$$

y así sucesivamente, se les llama **desigualdades en x y y**. Igual que con las ecuaciones, una **solución** de una desigualdad en x y y se define como una pareja ordenada (a, b) que da lugar a un enunciado verdadero cuando x y y son sustituidas por a y b, respectivamente. La **gráfica de una desigualdad** es la gráfica de la totalidad de las soluciones. Dos desigualdades son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones. Se puede simplificar una desigualdad en x y y si a ésta se le suma en cada lado una expresión en x y y, o si se multiplica por tal expresión cada uno de sus lados, siempre y cuando se tenga cuidado con los signos. Para desigualdades en más de dos variables se usan definiciones y observaciones similares. Sin embargo, restringiremos nuestro estudio al caso de desigualdades en dos variables.

EJEMPLO 1 Hallar las soluciones y trazar la gráfica de la desigualdad

$$3x - 3 < 5x - y.$$

SOLUCIÓN Las desigualdades de la lista siguiente son equivalentes:

$$3x - 3 < 5x - y$$

$$y + 3x - 3 < 5x$$

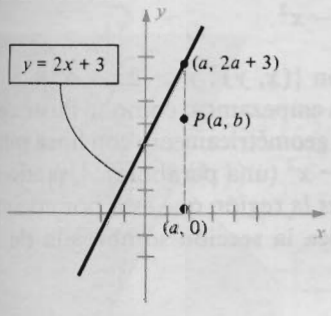
$$y < 5x - (3x - 3)$$

$$y < 2x + 3.$$

De este modo, las soluciones consisten en todas las parejas ordenadas (x, y) tales que $y < 2x + 3$. Es conveniente denotar a las soluciones de la siguiente manera:

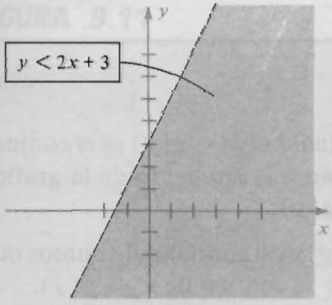
$$\{(x, y): y < 2x + 3\}.$$

FIGURA 9.6



Existe una estrecha relación entre la gráfica de la desigualdad $y < 2x + 3$ y la de $y = 2x + 3$. La gráfica de la ecuación es la recta trazada en la Figura 9.6. Para cada número real a, el punto en la recta con abscisa a tiene coordenadas $(a, 2a + 3)$. Un punto $P(a, b)$ pertenece a la gráfica de la *desigualdad* si y sólo si $b < 2a + 3$; esto es, si y sólo si $P(a, b)$ está directamente abajo del punto con coordenadas $(a, 2a + 3)$ como se muestra en la Figura 9.6. Se concluye que la gráfica de la desigualdad $y < 2x + 3$ consiste en todos los puntos en el plano que se encuentran por debajo de la recta $y = 2x + 3$. En la Figura 9.7 se ha sombreado una sección de la gráfica. La recta aparece punteada para indicar que no pertenece a la gráfica de la desigualdad. ■

FIGURA 9.7



A una región como la que se muestra en la Figura 9.7 se le llama **semiplano**. Para ser más precisos, si la recta *no* está incluida nos referiremos a dicha región como un **semiplano abierto**. Si la recta está incluida, como sería en el caso de la gráfica de la desigualdad $y \leq 2x + 3$, entonces a la región se le llama **semiplano cerrado**.

Por un razonamiento similar al que se usó en el Ejemplo 1, se puede demostrar que la gráfica de la desigualdad $y > 2x + 3$ es el semiplano abierto que está *por encima* de la recta con ecuación $y = 2x + 3$.

Si una desigualdad comprende solamente polinomios de primer grado en x y y, se le llama **desigualdad lineal**.

Se puede generalizar el procedimiento del Ejemplo 1 para desigualdades de la forma $y < f(x)$, en donde f es cualquier función. Concretamente, se puede establecer el siguiente teorema.

TEOREMA

Sea f una función.

(i) La gráfica de la desigualdad $y < f(x)$ es el conjunto de puntos que están por debajo de la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

(ii) La gráfica de $y > f(x)$ es el conjunto de puntos que están por encima de la gráfica de $y = f(x)$.

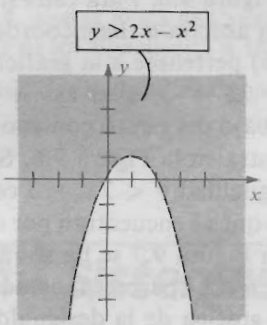
EJEMPLO 2 Obtener las soluciones y trazar la gráfica de la desigualdad

$$x(x + 1) - 2y > 3(x - y).$$

SOLUCIÓN La desigualdad dada es equivalente a

$$x^2 + x - 2y > 3x - 3y.$$

FIGURA 9.8



Sumando $3y - x^2 - x$ en cada lado obtenemos

$$y > 2x - x^2.$$

De ahí que las soluciones son $\{(x, y) : y > 2x - x^2\}$.

Para encontrar la gráfica empezamos, como se ilustra en la Figura 9.8, por representar geométricamente con línea punteada a la ecuación $y = 2x - x^2$ (una parábola). Usando el teorema anterior, la gráfica es la región que está por encima de la parábola como lo indica la sección sombreada de la figura. ■

El siguiente resultado se puede demostrar.

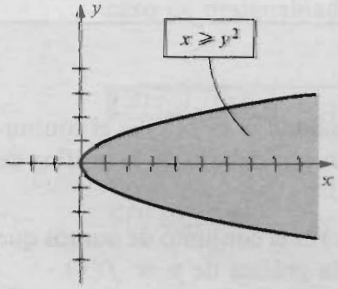
TEOREMA

Sea g una función.

(i) La gráfica de la desigualdad $x < g(y)$ es el conjunto de puntos que están a la *izquierda* de la gráfica de la ecuación $x = g(y)$.

(ii) La gráfica de $x > g(y)$ es el conjunto de puntos que están a la *derecha* de la gráfica de $x = g(y)$.

FIGURA 9.9



EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de $x \geq y^2$.

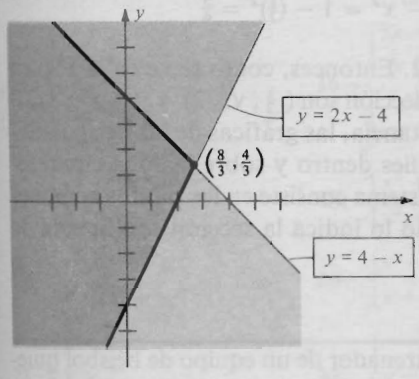
SOLUCIÓN La gráfica de la ecuación $x = y^2$ es una parábola simétrica al eje x. Por el teorema anterior, la gráfica de la desigualdad consiste en todos los puntos de la parábola, así como los puntos en la región que está a la derecha de ésta (véase la Figura 9.9). ■

Algunas veces es necesario trabajar simultáneamente con varias desigualdades en dos variables. En este caso nos referimos a las desigualdades dadas como un **sistema de desigualdades**. Las **soluciones de un sistema** de desigualdades son, por definición, las soluciones comunes a todas las desigualdades del sistema. Debe de ser evidente la forma en que se definen los **sistemas equivalentes** y la **gráfica de un sistema** de desigualdades. En los siguientes ejemplos se ilustra un método para resolver sistemas de desigualdades.

EJEMPLO 4 Hallar las soluciones y trazar la gráfica del sistema

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x - y \leq 4. \end{cases}$$

FIGURA 9.10

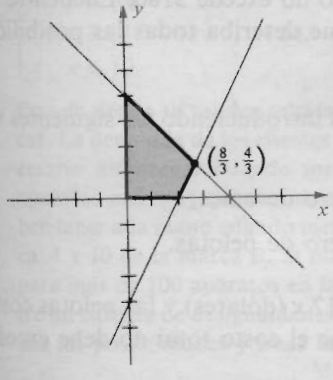


SOLUCIÓN El sistema dado es equivalente a

$$\begin{cases} y \leq 4 - x \\ y \geq 2x - 4. \end{cases}$$

Procedemos a trazar las gráficas de las rectas $y = 4 - x$ y $y = 2x - 4$. Como se muestra en la Figura 9.10, las rectas se cortan en el punto $(\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$. La gráfica de $y \leq 4 - x$ incluye los puntos de la gráfica de $y = 4 - x$, así como los puntos que están por debajo de esta recta. La gráfica de $y \geq 2x - 4$ incluye los puntos de la recta $y = 2x - 4$, así como los que están por encima de ésta. En la Figura 9.10 se muestra una sección de cada una de estas regiones. La gráfica del sistema consiste en los puntos que están en las *dos* regiones, como la que se muestra en la figura. ■

FIGURA 9.11



EJEMPLO 5 Trazar la gráfica del sistema

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x - y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

SOLUCIÓN Las primeras dos desigualdades son las mismas que se consideraron en el Ejemplo 4 y de ahí que los puntos en la gráfica de este sistema deben estar en la región con doble sombreado que se muestra en la Figura 9.10. La tercera y cuarta desigualdades del sistema indican que los puntos deben estar además en el primer cuadrante o sobre sus fronteras; con lo que obtenemos la región de la Figura 9.11. ■

EJEMPLO 6 Trazar la gráfica del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ (x - 1)^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$$

SOLUCIÓN Las gráficas de las ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$ y $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ son circunferencias unitarias con centro en el origen y en el punto $C(1, 0)$, respectivamente. Para encontrar los puntos de intersección de las dos curvas, despejamos y^2 en la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, obteniendo $y^2 = 1 - x^2$. La sustitución de y^2 en $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ conduce a las siguientes ecuaciones:

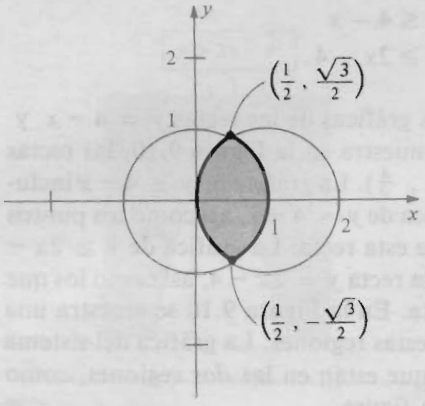
$$(x - 1)^2 + (1 - x^2) = 1$$

$$x^2 - 2x + 1 + 1 - x^2 = 1$$

$$-2x = -1$$

$$x = \tfrac{1}{2}.$$

FIGURA 9.12



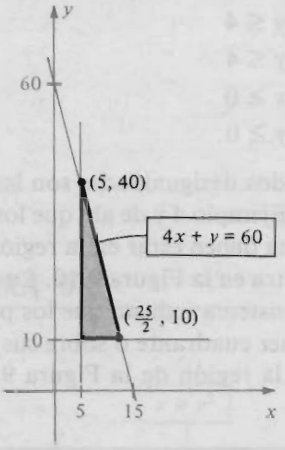
Los valores correspondientes de y están dados por

$$y^2 = 1 - x^2 = 1 - (\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{3}{4}$$

y de ahí que $y = \pm\sqrt{3}/2$. Entonces, como se ve en la Figura 9.12, los puntos de intersección son $(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$ y $(\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2)$. Por la fórmula de la distancia, las gráficas de las desigualdades dadas son las regiones dentro y sobre las dos circunferencias. La gráfica del sistema consiste en los puntos comunes a las dos regiones, como lo indica la sección sombreada de la figura. ■

EJEMPLO 7 El entrenador de un equipo de béisbol quiere comprar bates y pelotas que cuestan \$12 y \$3 (dólares) cada uno, respectivamente. Al menos se requieren 5 bates y 10 pelotas y el total de su costo no excede \$180. Encuentre un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades y grafique.

FIGURA 9.13



SOLUCIÓN Empecemos introduciendo las siguientes variables:

x = número de bates,

y = número de pelotas.

Así que los bates costarán $12x$ (dólares) y las pelotas costarán $3y$ (dólares). Puesto que el costo total no debe exceder de \$180, se debe tener que

$$12x + 3y \le 180 \quad \text{o bien} \quad 4x + y \le 60.$$

Las otras restricciones son

$$x \ge 5 \quad \text{y} \quad y \ge 10.$$

La gráfica del sistema se muestra en la Figura 9.13. ■

Ejercicios 9.9

En los Ejercicios 1 a 10, encuentre la solución y trace la gráfica de la desigualdad dada.

1. $3x - 2y < 6$
2. $4x + 3y < 12$
3. $2x + 3y \ge 2y + 1$
4. $2x - y > 3$
5. $y + 2 < x^2$
6. $y^2 - x \le 0$
7. $x^2 + 1 \le y$
8. $y - x^3 < 1$
9. $yx^2 \ge 1$
10. $x^2 + 4 \ge y$

En los Ejercicios 11 a 24, trace la gráfica del sistema de desigualdades.

11. $\begin{cases} 3x + y < 3 \\ 4 - y < 2x \end{cases}$
12. $\begin{cases} y + 2 < 2x \\ y - x > 4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} y - x < 0 \\ 2x + 5y < 10 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2y - x \le 4 \\ 3y + 2x < 6 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x + y \le 6 \\ y - 2x \ge 1 \\ x \ge -2 \\ y \le 4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x - 4y \ge 12 \\ x - 2y \le 2 \\ x \ge 9 \\ y \le 5 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ x + y \ge 1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2 \le 1 - y \\ x \ge 1 + y \end{cases}$

20. $\begin{cases} x - y^2 < 0 \\ x + y^2 > 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} y < 3^x \\ y > 2^x \\ x \ge 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} y \ge \log x \\ y - x \le 1 \\ x \ge 1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} y \le \log x \\ y + x \ge 1 \\ x \le 10 \end{cases}$

24. $\begin{cases} y \le 3^{-x} \\ y \ge 2^{-x} \\ y < 9 \end{cases}$

25. En una tienda se venden televisores de dos marcas. La demanda de los clientes indica que es necesario almacenar cuando menos el doble de aparatos marca A que de marca B, y que se deben tener a la mano cuando menos 20 de la marca A y 10 de la marca B. Si no se tiene espacio para más de 100 aparatos en la tienda, encuentre un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades y trace la gráfica.

26. En un auditorio hay 600 asientos. Se ha planeado que para cierto evento se cobre \$8.00 (dólares) por algunos asientos y \$5.00 por otros. Se deben vender cuando menos 225 boletos de \$5.00 y se desea vender más de \$3 000 en total. Encuentre un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades y trace la gráfica.

27. Una mujer desea invertir \$15 000 en dos cuentas de ahorro distintas. Quiere tener cuando menos \$2 000 en cada cuenta, y que la cantidad que haya en una de ellas sea cuando menos el triple de lo que hay en la otra. Encuentre un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades y trace la gráfica.

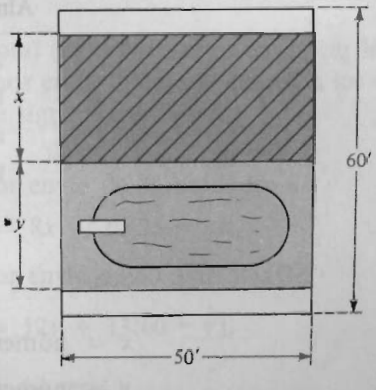
28. El administrador de una tienda escolar tiene dos tipos de libretas, el primero con un precio de mayoreo de 55 centavos y el segundo de 85 centavos. Si la máxima cantidad que se puede gastar es \$600 y si se desea un inventario de cuando menos 300 de la de 85 centavos y 400 de la de 55 centavos, obtenga un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades y trace la gráfica.

29. Una lata de aerosol debe tener la forma de un cilindro circular con un pequeño cono en la parte superior. La altura total de la lata no debe ser mayor que 9 pulg y el cilindro debe contener al menos 75% del volumen total. Además, la altura de la sección cónica debe ser de cuando menos 1 pulg. Encuentre y grafique el sistema de desigualdades que describe las posibles relaciones entre la altura del cilindro y la altura del cono.

30. Una ventana de vidrio traslúcido de color debe construirse en la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. La altura total de la ventana no puede ser mayor que 6 pie, y el área de la parte rectangular debe ser al menos el doble que el área del semicírculo. Además, el diámetro de este último debe ser cuando menos 2 pie. Encuentre y grafique el sistema de desigualdades que describe las posibilidades para la longitud y la anchura del rectángulo.

31. Se construirá una planta nuclear para satisfacer las necesidades de electricidad de las ciudades A y B. La ciudad B está 100 millas al este de A. El gobierno ha prometido que la planta estará al menos a 60 millas de cada ciudad. No es posible, sin embargo, construir la planta al sur de ninguna de las ciudades debido a que el terreno es accidentado y la planta debe estar a menos de 100 millas tanto de A como de B. Suponiendo que A está en el origen, encuentre y grafique el sistema de desigualdades que describe todas las localizaciones posibles de la planta.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 32



32. Un hombre tiene un patio trasero rectangular de 50 pie de frente y 60 pie de fondo. Planea tener una piscina (o alberca) y un patio, como se muestra en la figura, y puede gastar cuando mucho \$12 000 (dólares) en el proyecto. El área del patio debe ser al menos tan grande como la de la piscina. El costo del área de ésta es de \$5.00 por pie cuadrado, y el del patio es de \$3.00 por pie cuadrado. Obtenga y grafique el sistema de desigualdades que describe las posibilidades para el ancho del patio y del área del tanque. (Véase figura en la página anterior.)

9.10 Programación lineal

Muchos problemas de aplicación implican la resolución particular de un sistema de desigualdades. Un problema común consiste en encontrar el valor máximo o mínimo de ciertas expresiones que involucran variables que están sujetas a diversas restricciones. Si todas las expresiones y desigualdades son lineales en las variables, entonces como ayuda para resolver tales problemas se puede usar una técnica llamada **programación lineal**. Esta técnica ha alcanzado una gran importancia en las empresas, donde se deben tomar decisiones acerca del mejor uso de los inventarios, refacciones o procesos de fabricación. Generalmente, el objetivo de una empresa es maximizar las ganancias o minimizar los costos. Como frecuentemente hay muchas alternativas, resulta muy difícil tomar una decisión acertada. La teoría matemática que respalda a la programación lineal puede simplificar considerablemente este proceso. El desarrollo lógico de los teoremas y técnicas necesarios están más allá de los objetivos de este texto, por lo que, nos limitaremos a presentar algunos ejemplos.

EJEMPLO 1 El fabricante de cierto producto tiene dos almacenes W_1 y W_2. En W_1 tiene almacenadas 80 unidades, y en W_2, 70. Dos clientes A y B le ordenan 35 y 60 unidades, respectivamente. El costo del flete desde cada almacén hasta A y B está determinado de acuerdo con la siguiente tabla. ¿Cuántas unidades, de cada almacén, se le deberán mandar a cada cliente, para minimizar el costo del flete?

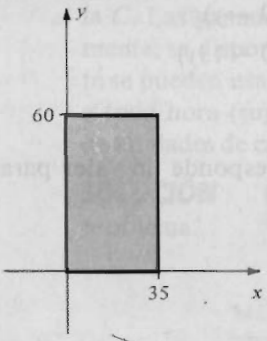
Almacén	Cliente	Costo del flete por unidad
W_1	A	\$ 8
W_1	B	12
W_2	A	10
W_2	B	13

SOLUCIÓN Sea

$x =$ número de unidades que se embarcan a A de W_1,

$y =$ número de unidades que se embarcan a B de W_1.

FIGURA 9.14



Entonces, para surtir los pedidos se necesitan

$35 - x =$ número enviado a A de W_2,

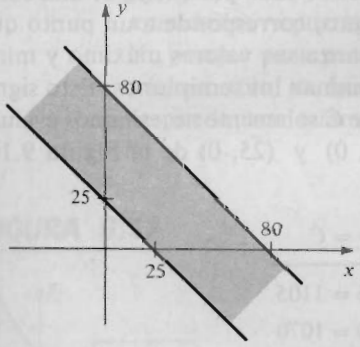
$60 - y =$ número enviado a B de W_2.

Debemos ahora determinar los valores de x y y que minimizan los costos totales de los fletes. En primer lugar, debemos notar que la pareja (x, y) debe ser una solución del siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 35 \\ 0 \leq y \leq 60. \end{cases}$$

La gráfica de este sistema es la región rectangular de la Figura 9.14.

FIGURA 9.15



Existen otras restricciones para x y y que hacen posible reducir el tamaño de la región anterior. Como el número total de unidades embarcadas desde W_1 y W_2 no puede exceder de 80 y 70 respectivamente, entonces la pareja (x, y) debe también satisfacer el sistema

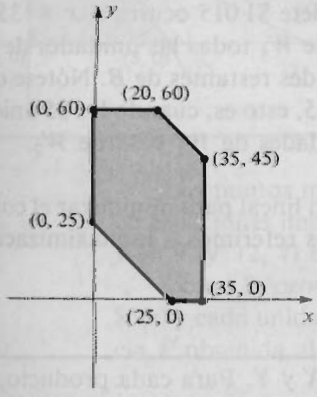
$$\begin{cases} x + y \leq 80 \\ (35 - x) + (60 - y) \leq 70. \end{cases}$$

Este sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x + y \leq 80 \\ x + y \geq 25. \end{cases}$$

Su gráfica es la región que está entre las rectas paralelas $x + y = 80$ y $x + y = 25$ (véase la Figura 9.15). Como la pareja (x, y) que estamos buscando debe ser una solución de este sistema y también del sistema $0 \leq x \leq 35$, $0 \leq y \leq 60$, entonces el punto correspondiente debe estar en la región de la Figura 9.16.

FIGURA 9.16



Sea C el costo total (en dólares) por embarcar la mercancía a A y B. Vemos en la tabla que enumera los costos por envío que lo que sigue es verdadero:

Costo por envío de 35 unidades a

$$A = 8x + 10(35 - x),$$

Costo por envío de 60 unidades a

$$B = 12y + 13(60 - y).$$

De ahí que, el costo total sea

$$C = 8x + 10(35 - x) + 12y + 13(60 - y)$$
$$= (8x + 350 - 10x) + (12y + 780 - 13y)$$

o bien $$C = 1130 - 2x - y.$$

A cada punto (x, y) de la región de la Figura 9.16 corresponde un valor para C. Por ejemplo, en (20, 40)

$$C = 1130 - 40 - 40 = 1050,$$

y en (10, 50) $$C = 1130 - 20 - 50 = 1060.$$

Como x y y son enteros, existe solamente un número finito de valores posibles de C. Al comprobar cada posibilidad, podemos encontrar la pareja (x, y) que produce el menor costo. Sin embargo, como existe un gran número de pares, la comprobación de cada uno de ellos es sumamente tediosa. Es en este punto que la teoría desarrollada en programación lineal tiene utilidad. Se puede demostrar que si estamos interesados en el valor C de una expresión lineal $ax + by + c$, donde cada par (x, y) es una solución del sistema de desigualdades lineales y por lo tanto, corresponde a un punto que está en la intersección de semiplanos, entonces C alcanza sus valores máximo y mínimo en un punto de intersección de las rectas que determinan los semiplanos. Esto significa que para determinar el valor mínimo (o máximo) de C solamente necesitamos evaluar en los puntos (0, 25), (0, 60), (20, 60), (35, 45), (35, 0) y (25, 0) de la Figura 9.16. En la siguiente tabla se muestran estos valores.

Punto	$1130 - 2x - y = C$
(0, 25)	$1130 - 2(0) - 25 = 1105$
(0, 60)	$1130 - 2(0) - 60 = 1070$
(20, 60)	$1130 - 2(20) - 60 = 1030$
(35, 45)	$1130 - 2(35) - 45 = 1015$
(35, 0)	$1130 - 2(35) - 0 = 1060$
(25, 0)	$1130 - 2(25) - 0 = 1080$

Conforme a estas observaciones, el mínimo costo del flete \$1 015 ocurre si $x = 35$ y $y = 45$. Por lo tanto, el fabricante debe embarcar desde W_1 todas las unidades de A, así como 45 de las unidades de B, y desde W_2 las unidades restantes de B. Nótese que el *máximo* costo del flete ocurre cuando $x = 0$ y $y = 25$, esto es, cuando las 35 unidades de A son embarcadas desde W_2 y B recibe 25 unidades de W_1 y 35 de W_2. ■

El ejemplo anterior ilustra el uso de la programación lineal para minimizar el costo en una situación específica. En el siguiente ejemplo nos referimos a la maximización de las ganancias.

EJEMPLO 2 Una empresa fabrica dos productos X y Y. Para cada producto, es necesario usar tres máquinas distintas, A, B y C. La fabricación de una unidad de X

requiere usar la máquina A durante 3 horas, la B por 1 hora y la C por 1 hora, mientras que para fabricar una unidad de Y se necesita usar 2 horas la A, 2 horas la B y 1 hora la C. Las ganancias por unidad de los productos X y Y son de \$500 y \$350, respectivamente; se dispone de la máquina A durante las 24 horas del día, sin embargo, solamente se pueden usar B por 16 horas y C por 9 horas. Si se puede disponer de las máquinas a toda hora (sujeto a las mencionadas restricciones de tiempo), determine el número de unidades de cada producto que se deberán fabricar para maximizar la ganancia diaria.

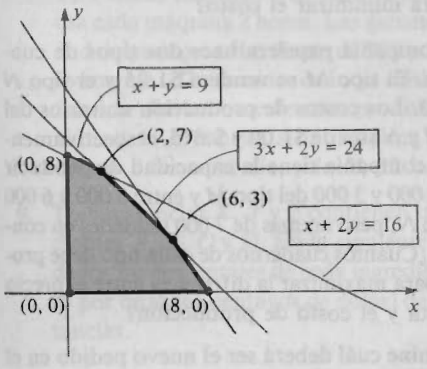
SOLUCIÓN En la siguiente tabla se sintetizan los datos dados en el enunciado del problema.

Máquina	Horas requeridas para 1 unidad de X	Horas requeridas para 1 unidad de Y	Horas disponibles
A	3	2	24
B	1	2	16
C	1	1	9

Sean x y y el número de unidades de X y Y, respectivamente, que se deben fabricar por día. Como cada unidad del producto X requiere 3 horas de la máquina A, entonces x unidades requieren $3x$ horas. Análogamente, y unidades de Y requieren $2y$ horas de A, porque para producir una unidad de Y se usa A durante 2 horas. De ahí que, el número total de horas por día que se debe usar la máquina A es $3x + 2y$. Como A se puede usar cuando mucho 24 horas al día, tenemos

$$3x + 2y \leq 24.$$

FIGURA 9.17



Haciendo el mismo tipo de razonamiento en los renglones dos y tres de la tabla obtenemos que

$$x + 2y \leq 16$$
$$x + y \leq 9.$$

este sistema de tres desigualdades lineales, así como las desigualdades evidentes

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

establecen, en forma matemática, las restricciones que ocurren en el proceso de fabricación. En la Figura 9.17, se muestra la gráfica del sistema anterior de cinco desigualdades lineales.

Los puntos marcados en la figura son los que se obtienen al resolver los sistemas de ecuaciones lineales. Específicamente, (6, 3) es una solución de $3x + 2y = 24$, $x + y = 9$ y (2, 7) es una solución del sistema $x + 2y = 16$, $x + y = 9$.

Como la producción de cada unidad del producto X conduce a una ganancia de \$500 y cada unidad de producto Y resulta en una ganancia de \$350, entonces la ganancia P obtenida al producir x unidades de X y y unidades de Y está dada por

$$P = 500x + 350y.$$

El valor máximo de P debe ocurrir en alguno de los puntos de la Figura 9.17. En la siguiente tabla se muestran los valores de P en cada uno de los puntos.

(x, y)	$500x + 350y = P$
$(0, 8)$	$500(0) + 350(8) = 2800$
$(2, 7)$	$500(2) + 350(7) = 3450$
$(6, 3)$	$500(6) + 350(3) = 4050$
$(8, 0)$	$500(8) + 350(0) = 4000$
$(0, 0)$	$500(0) + 350(0) = 0$

De la tabla vemos que la máxima ganancia de \$4 050 ocurre si hay una producción diaria de 6 unidades del producto X y 3 unidades de producto Y. ■

Los dos ejemplos que hemos dado en esta sección son problemas elementales de programación lineal que pueden ser resueltos por métodos rudimentarios. Los problemas prácticos más complicados se resuelven generalmente empleando técnicas matriciales que se adaptan a su resolución por computadora.

Ejercicios 9.10

1. Un fabricante de raquetas de tenis obtiene una ganancia de \$15 en cada raqueta Set Point y \$8 en cada raqueta Double Fault. Para satisfacer la demanda de sus distribuidores, la producción diaria de las Double Fault debe ser de entre 30 y 80, así como de entre 10 y 30 de las Set Point. Pero para mantener una buena calidad, no debe producir en total más de 80 por día. ¿Cuántas raquetas de cada tipo debe producir para maximizar su ganancia.

2. Un fabricante de radios de banda civil CB obtiene una ganancia de \$25 en el modelo de lujo y de \$30 en el estándar. La compañía desea producir un mínimo de 80 modelos de lujo y cuando menos 100 de tipo estándar por día. Para mantener una alta calidad, la producción total no debe exceder de 200 radios. ¿Cuántos debe producir diariamente de cada tipo para maximizar la ganancia?

3. Dos sustancias S y T contienen cada una dos tipos de ingredientes I y G. Una libra de S contiene 2 onzas de I y 4 onzas de G, y una libra de T contiene 2 onzas de I y 6 onzas de G. Se desea combinar las dos sustancias para obtener una mezcla cuyo contenido sea de al menos 9 onzas de I y 20 onzas de G. Si los costos respectivos de las sustancias S y T son de \$3.00 y \$4.00 por libra, ¿qué cantidad se debe usar de cada sustancia para minimizar el costo?

4. Una compañía papelera hace dos tipos de cuadernos. El tipo M se vende a \$1.25 y el tipo N a \$0.90. Los costos de producción unitarios del tipo M y N son de \$1.00 y \$.075, respectivamente. La compañía tiene la capacidad de producir entre 2 000 y 3 000 del tipo M y entre 3 000 y 6 000 del tipo N, pero no más de 7 000 unidades en conjunto. ¿Cuántos cuadernos de cada tipo debe producir para maximizar la diferencia entre el precio de venta y el costo de producción?

5. Determine cuál deberá ser el nuevo pedido en el Ejemplo 1 de esta sección, si se desea minimizar el costo total del flete y los costos de embarque de W_1 a A, de W_2 a A, de W_1 a B y de W_2 a B son de \$12, \$10, \$16 y \$12 por unidad, respectivamente.

6. Una compañía cafetalera compra lotes de una mezcla de distintos tipos de grados de café y luego los clasifica en supremo, regular e inservible. La compañía necesita cuando menos 280 toneladas del grado de suprema calidad y no menos de

200 toneladas del regular, y puede comprar cualquier cantidad de café no clasificado a dos proveedores A y B. En la siguiente tabla se indican los porcentajes de las clases suprema, regular e inservible que contienen las muestras que proporcionaron cada uno de los proveedores.

Proveedor	Supremo	Regular	Inservible
A	20%	50%	30%
B	40%	20%	40%

¿Qué cantidad le debe comprar a cada proveedor para satisfacer sus necesidades a un costo mínimo, si A vende a \$125 la tonelada y B a \$200?

7. Un granjero dispone de 100 acres para sembrar dos cultivos A y B. La semilla para el cultivo A cuesta \$4 por acre y para la B, \$6 por acre, y los costos totales de mano de obra respectivos son \$20 y \$10 por acre. El ingreso esperado es de \$110 por acre de la cosecha A y de \$150 por acre de la B. ¿Cuántos acres debe sembrar de cada cultivo para obtener la máxima ganancia, si no desea invertir más de \$480 en semilla, ni más de \$1 400 en mano de obra?

8. Una empresa emplea dos máquinas X y Y para fabricar dos productos A y B. La fabricación de A requiere usar la máquina X $\frac{1}{2}$ hora, y la de Y, 1 hora, mientras que para el producto B se usa cada máquina 2 horas. Las ganancias por unidad de producto A y B son de \$20 y \$50, respectivamente. Determine cuántas unidades debe fabricar diariamente de cada producto para maximizar la ganancia, si la máquina X se puede operar 8 horas al día, y la Y, 12 horas al día.

9. Tres sustancias X, Y y Z contienen cuatro ingredientes A, B, C y D. En la siguiente tabla están dados los porcentajes de cada ingrediente y el costo por onza (en centavos de dólar) de las tres sustancias.

Sustancia	A	B	C	D	Costo/Onza
X	20%	10%	25%	45%	25¢
Y	20%	40%	15%	25%	35¢
Z	10%	20%	25%	45%	50¢

¿Cuántas onzas se deben combinar de cada sustancia para obtener, con un costo mínimo, 20 onzas con un contenido de al menos 14% de A, 16% de B y 20% de C? ¿Con qué combinación se maximiza el costo?

10. Un hombre planea poner un puesto en una feria que dura un día y en el que venderá bolsas de cacahuates y de dulces. Dispone de \$100 para comprar su mercancía, cuyo costo es de \$0.10 por cada bolsa de cacahuates y de \$0.20 por cada bolsa de dulces. Los precios de venta serán de \$0.15 por bolsa de cacahuates y \$0.26 por bolsa de dulces. En el puesto se pueden acomodar 500 bolsas de cacahuates y 100 bolsas de dulces. Por sus experiencias en el pasado, sabe que no venderá más de 700 bolsas en total. Determine el número de bolsas que debe tener de cada producto para maximizar su ganancia. ¿Cuál es su ganancia máxima?

11. Una pequeña ciudad desea adquirir minibuses y autobuses medianos para su sistema de transporte público. La ciudad no puede gastar más de \$100 000 (dólares) en los vehículos ni más de \$500 mensuales en mantenimiento. El precio de los minibuses es de \$10 000 cada uno y su mantenimiento cuesta en promedio \$100 mensuales. Las estimaciones correspondientes a los costos de cada autobús son de \$20 000 y \$75 mensuales. Si cada minibús puede transportar 10 pasajeros y cada autobús 15, calcule el número de minibuses y de autobuses que se deben comprar para maximizar la capacidad de transporte de pasajeros del sistema.

12. Refiérase al Ejercicio 11. El costo mensual de combustible (tomando como base 5 000 millas de servicios) para cada minibús es de \$550 (dólares), mientras que cada autobús consume \$850 en combustible. Determine el número de minibuses y de autobuses que se deberían comprar para minimizar los costos mensuales de combustible si la capacidad de transporte de pasajeros del sistema debe ser cuando menos de 75.

13. Un piscicultor comprará no más de 5 000 truchas y lobinas jóvenes de un vivero y las alimentará durante un año, con una dieta especial. Cada trucha consume \$0.50 (de dólar) en alimento, mientras que cada lobina consume \$0.75. La cantidad total que puede gastarse en la dieta especial no debe exceder de \$3 000 (dólares). Al terminar el año una trucha típica pesará 2 libras y una lobina, 3 libras. ¿Cuántos peces de cada clase deben mantenerse en el estanque para que el número total de libras de pescado sea máximo al terminar el año?

14. El dietista de un hospital desea preparar un platillo de maíz y calabazas que proporcione al menos 3 g (gramos) de proteínas y no cueste más de 36 ¢ (de dólar) por ración. Una onza de maíz con crema proporciona 0.5 g de proteína y cuesta 4 ¢. Una onza de calabazas proporciona 0.25 g de proteínas y cuesta 3 ¢. Para un buen sabor se necesitan al menos 2 onzas de maíz y la misma cantidad de calabaza que de maíz. Es importante que el número de onzas por ración sea tan pequeño como sea posible. Halle la combinación de maíz y calabaza que hace mínimo el tamaño de la ración.

15. Un contratista desea convertir un edificio grande en una serie de espacios para almacenar objetos personales. Para ello construirá unidades básicas de 8 × 10 pies, y unidades de lujo de 12 × 10 pies, que contendrán anaqueles adicionales y un ropero. Las consideraciones del mercado indican que habrá al menos el doble de unidades pequeñas que grandes, y que las unidades pequeñas se pueden vender en \$40 (dólares) mensuales, y las de lujo en \$75. Hay cuando mucho 7 200 pie^2 para los compartimentos y no se pueden gastar más de \$30 000 en la construcción. Si el costo de construcción de cada unidad pequeña sería de \$300, mientras que cada unidad de lujo costaría \$600, ¿cuántas unidades de cada tipo se deben construir para maximizar los ingresos mensuales?

9.11 Repaso

Defina o discuta cada uno de los siguientes conceptos.

1. Sistema de ecuaciones.
2. Solución de un sistema de ecuaciones.
3. Sistemas de ecuaciones equivalentes.
4. Sistema de ecuaciones lineales.
5. Descomposición en fracciones parciales.
6. Matriz de $m \times n$.
7. Matriz cuadrada de orden n.
8. Matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales; matriz aumentada.
9. Transformaciones elementales de renglones.
10. Sistema de ecuaciones lineales homogéneo.
11. Suma y producto de dos matrices.
12. Matriz nula (o cero).
13. Matriz identidad.
14. Inversa de una matriz.
15. Determinante.
16. Menor.
17. Cofactor.
18. Propiedades de los determinantes.
19. Regla de Cramer.
20. Sistema de desigualdades.
21. Programación lineal.

Ejercicios 9.11

Halle las soluciones de los sistemas de ecuaciones de los Ejercicios 1 a 16.

1. $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y + 4 = x^2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 9x^2 + 16y^2 = 140 \\ x^2 - 4y^2 = 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x = y^2 + 3z \\ x = y^2 + z - 1 \\ x^2 = xz \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=7 \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{y}=1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2^x + 3^{y+1} = 10 \\ 2^{x+1} - 3^y = 5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 4x + 5y - z = -2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ y - 5z = 3 \\ 2x + z = -1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 4x - 3y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x + 2y - z = 1 \\ 3x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 3y = 17 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}=4 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{z}=1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x - y + 3z - w = -3 \\ 3x + 2y - z + w = 13 \\ x - 3y + z - 2w = -4 \\ -x + y + 4z + 3w = 0 \end{cases}$

Encuentre las soluciones y trace las gráficas de cada uno de los sistemas de los Ejercicios 17 a 20.

17. $\begin{cases} x^2 + y^2 < 16 \\ y - x^2 > 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} y - x \le 0 \\ y + x \ge 2 \\ x \le 5 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x - 2y \le 2 \\ y - 3x \le 4 \\ 2x + y \le 4 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2 - y < 0 \\ y - 2x < 5 \\ xy < 0 \end{cases}$

Obtenga los determinantes de las matrices de los Ejercicios 21 a 30.

21. $\begin{bmatrix} -6 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -4 \\ 7 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

31. Obtenga el determinante de la matriz (a_{ij}) de $n \times n$, en donde $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

32. Demuestre, sin hacer el desarrollo, que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0.$$

En los Ejercicios 33 a 36, determine la inversa de cada una de las matrices.

33. $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Exprese cada producto o suma de los Ejercicios 37 a 46 como una matriz única.

37. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

38. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

39. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

40. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 8 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$

41. $2\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

42. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ **43.** $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

44. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

45. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\right\}$

46. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

Verifique los Ejercicios 47 y 48 sin desarrollar los determinantes.

47. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

48. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & k \\ a & b & c \end{vmatrix}$

En los Ejercicios 49 y 50, encuentre las soluciones de la ecuación $|A - xI| = 0$, en la que x representa un número real.

49. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $I = I_2$

50. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $I = I_3$

51. Suponga que $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n tal que $a_{ij} = 0$ si $i < j$. Demuestre que

$$|A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

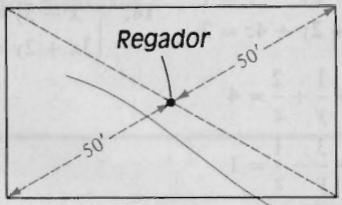
52. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cualquiera de 2×2 tal que $|A| \neq 0$, demuestre que A tiene inversa y encuentre una fórmula general para A^{-1}.

En los Ejercicios 53 y 54 encuentre la descomposición en fracciones parciales.

53. $\dfrac{4x^2 + 54x + 134}{(x + 3)(x^2 + 4x - 5)}$ **54.** $\dfrac{x^2 + 14x - 13}{x^3 + 5x^2 + 4x + 20}$

55. En el centro de un terreno rectangular se colocará un regador giratorio con un alcance de 55 pie (véase la figura). Calcule las dimensiones del terreno suponiendo que contiene 4 000 pie^2 y que el agua debe llegar a las esquinas del terreno.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 55



56. Encuentre las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y que pasan por el punto (0, 3). (*Sugerencia:* Considere $y = mx + 3$ y encuentre las condiciones que m debe cumplir para asegurar que el sistema tenga una solución única.

57. Un contador debe pagar impuestos y bonos sobre nóminas a los empleados a partir de las utilidades de la compañía, que fueron de $50 000 (dólares). El impuesto total es de 40% de la cantidad que queda una vez que se han pagado los bonos, y el total a pagar en bonos es el 10% de la cantidad que queda después de impuestos. Calcule el impuesto total y el importe total por bonos.

58. Una pista circular debe tener una anchura de 10 pie y la longitud total de la circunferencia interior debe ser el 90% de la circunferencia exterior. Encuentre las dimensiones de la pista.

59. Para llenar un tanque de almacenamiento de agua de 1 000 pie^3 se pueden utilizar tres tuberías de entrada A, B y C. Cuando las tres operan a su capacidad total, el tanque se puede llenar en 10 horas. Cuando sólo se utilizan A y B, el tiempo se incrementa a 20 horas. Las tuberías A y C pueden llenar el tanque en 12.5 horas. Obtenga las

intensidades de flujo (en pies cúbicos por hora) de cada una de las tuberías.

60. Un venado ocupa su día en tres actividades básicas: descansar, buscar alimento y pastar. Debe descansar al menos 6 horas diarias y el número de horas que dedica a buscar comida es al menos el doble de las que toma para pastar. Tomando el número de horas dedicadas a buscar comida como x y el número de horas dedicadas a pastar como y, determine y grafique el sistema de desigualdades que describe las posibles maneras de dividir el día.

61. Un fabricante produce una podadora de pasto con motor y una cortadora para orillas. Estos productos son de tan buena calidad que la compañía puede vender todos los que fabrica, pero su capacidad de producción en las áreas de maquinado, soldadura y ensamble es limitada. La compañía dispone de 600 horas semanales para maquinado, 300 horas para soldadura y 550 horas para ensamble. El número de horas que se requiere para producir un solo objeto se muestra en la tabla siguiente:

Producto	Maquinado	Soldadura	Ensable
Podadora	6	2	5
Cortadora	4	3	5

Las utilidades por la venta de una podadora y una cortadora son de \$100 (dólares) y \$80, respectivamente. ¿Cuántas podadoras y cortadoras se deben producir en una semana para que la ganancia sea máxima.

CAPÍTULO 10

Sucesiones, series y probabilidad

El método de demostración llamado ***inducción matemática****, considerado en la primera sección de este capítulo, es necesario para demostrar que ciertas proposiciones son verdaderas para cualquier número entero positivo.* ■ *A continuación se presenta material que contiene una discusión de las* ***sucesiones*** *y la* ***notación de sumatoria****.* ■ *De interés especial son las* ***sucesiones aritmética*** *y* ***geométrica*** *consideradas en las Secciones 10.3 y 10.4.* ■ *La última parte del capítulo contiene una discusión de* ***procesos de conteo*** *que surgen frecuentemente en las matemáticas y en la vida diaria.* ■ *Entre éstos están las nociones de* ***permutaciones****,* ***combinaciones*** *y* ***probabilidad****.*

10.1 Inducción matemática

Si n es un entero positivo, sea P_n el enunciado

$$(xy)^n = x^n y^n$$

en donde x y y son números reales. De esta manera P_1 representa el enunciado $(xy)^1 = x^1 y^1$, P_2 denota $(xy)^2 = x^2 y^2$, P_3 es $(xy)^3 = x^3 y^3$, etcétera. Es fácil demostrar que P_1, P_2 y P_3 son enunciados *verdaderos*. Sin embargo, puesto que el conjunto de los enteros positivos es infinito, es imposible verificar la validez de P_n para todo entero positivo n. Para dar una demostración se requiere del método de la inducción matemática. Este método se basa en el siguiente axioma fundamental.

AXIOMA DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Supóngase que un conjunto S de enteros positivos tiene las siguientes dos propiedades:

(i) S contiene al entero 1.
(ii) Siempre que S contenga a un entero positivo k, S también contiene $k + 1$.

Entonces S contiene a todo entero positivo.

Si S es un conjunto de enteros positivos que satisfacen la propiedad (ii) entonces siempre que S contenga un entero positivo arbitrario k, también debe contener el siguiente entero positivo $k + 1$. Si S también satisface la propiedad (i), entonces S contiene a 1 y por lo tanto por (ii), S contiene $1 + 1$, o sea 2. Aplicando de nuevo (ii), vemos que S contiene a $2 + 1$, o sea 3. Nuevamente S debe contener a $3 + 1$, o sea 4. Si continuamos de esta manera se puede argumentar que si n es cualquier entero positivo *específico*, entonces n está en S, puesto que paso a paso podemos, eventualmente, alcanzar n. Aunque este argumento no demuestra el axioma, ciertamente lo hace plausible.

Usaremos el axioma anterior para establecer el siguiente principio fundamental.

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Si a cada entero positivo n existe asociado un enunciado P_n, entonces todos los enunciados P_n son verdaderos, siempre que se cumplan las siguientes dos condiciones:

(i) P_1 es verdadero.

(ii) Siempre que k sea un entero positivo tal que P_k es verdadero, entonces P_{k+1} es también verdadero.

DEMOSTRACIÓN Supóngase que las condiciones (i) y (ii) del principio de inducción son válidas y sea S el conjunto de todos los enteros positivos n tal que P_n es verdade-

ro. Por hipótesis, P_1 es verdadero, y consecuentemente, 1 está en S. De esta manera S satisface la propiedad (i) del axioma de inducción matemática. Siempre que S contenga un entero positivo k entonces, por la definición de S, P_k es verdadero y por lo tanto de la condición (ii) del principio de inducción, P_{k+1} también es verdadero. Esto significa que S contiene a $k + 1$. Hemos demostrado que siempre que S contenga un entero positivo k entonces también contiene a $k + 1$. Consecuentemente, la propiedad (ii) del axioma de inducción matemática se verifica, y por lo tanto S contiene a todo entero positivo; esto es, P_n es verdadero para todo entero positivo n. □

Hay otras variaciones del principio de inducción matemática. Una está más adelante en esta sección. En la mayor parte de nuestro trabajo el enunciado P_n usualmente se dará en la forma de una ecuación que involucra al entero positivo arbitrario n, como en $(xy)^n = x^n y^n$.

Cuando apliquemos el principio de inducción matemática se deben seguir siempre los dos pasos siguienes:

Paso (i) Demostrar que P_1 es verdadero.

Paso (ii) Suponer que P_k es verdadero y demostrar que P_{k+1} se verifica.

El paso (ii) usualmente es el más confuso para el principiante. No *demostramos* que P_k es verdadero (excepto para $k = 1$). En vez de ello, demostramos que *si* P_k se verifica entonces el enunciado P_{k+1} es verdadero. Esto es todo lo que es necesario de acuerdo con el principio de inducción matemática. El supuesto de que P_k es verdadero se conoce como **hipótesis de inducción**.

EJEMPLO 1 Demostrar que para todo entero positivo n, la suma de los primeros n enteros positivos es

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

SOLUCIÓN Si n es cualquier entero positivo, sea P_n el enunciado

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Los siguientes son algunos casos especiales de P_n:

Si $n = 2$, entonces P_2 es

$$1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2} \quad \text{o bien} \quad 3 = 3.$$

Si $n = 3$, entonces P_3 es

$$1 + 2 + 3 = \frac{3(3+1)}{2} \quad \text{o bien} \quad 6 = 6.$$

Si $n = 5$, entonces P_5 es

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5(5+1)}{2} \quad \text{o bien} \quad 15 = 15.$$

Aunque es instructivo verificar la validez de P_n para diversos valores de n como lo hicimos antes, no es necesario hacerlo así. Únicamente se necesita aplicar los dos pasos del procedimiento señalado antes de este ejemplo. De manera que procedemos como sigue:

Paso (*i*): Si sustituimos $n = 1$ en P_n entonces, por convención, el lado izquierdo contiene sólo el número 1 y el lado derecho es $\frac{1(1+1)}{2}$, que también es 1. Esto demuestra que P_1 es verdadero.

Paso (*ii*): Supóngase que P_k se verifica. De esta manera, la hipótesis de inducción es

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Nuestro objetivo es demostrar que P_{k+1} es verdad, esto es,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.$$

Por la hipótesis de inducción tenemos ya una fórmula para la suma de los primeros k enteros positivos. Por lo tanto, una fórmula para la suma de los primeros $k + 1$ enteros positivos se puede encontrar sumando simplemente $(k + 1)$ en ambos lados. Haciéndolo así y simplificando obtenemos

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

Hemos demostrado que P_{k+1} es verdad y, por lo tanto, la demostración por inducción matemática está completa. ■

EJEMPLO 2 Demostrar que para cada entero positivo n,

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

SOLUCIÓN Para cada entero positivo n, sea P_n el enunciado dado. Nótese que ésta es una fórmula para la suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos impares. De nuevo seguiremos el procedimiento de dos pasos usado en el Ejemplo 1.

Paso (*i*): Sustituyendo n por 1 en P_n obtenemos

$$1^2 = \frac{(1)(2-1)(2+1)}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

lo cual muestra que P_1 es verdadero.

Paso (*ii*): Suponemos que P_k se verifica. De esta manera, la hipótesis de inducción es

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}.$$

Se desea demostrar que P_{k+1} es verdadero, esto es,

$$1^2 + 3^2 + \cdots + [2(k+1)-1]^2 = \frac{(k+1)[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}{3}.$$

Esta ecuación para P_{k+1} se simplifica a

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}.$$

Obsérvese que el antepenúltimo término (de derecha a izquierda) en el lado izquierdo de esta ecuación es $(2k-1)^2$. De manera análoga a la solución del Ejemplo 1, podemos obtener el lado izquierdo de P_{k+1} sumando $(2k+1)^2$ a ambos miembros de la ecuación establecida en la hipótesis de inducción P_k. Esto da.

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2.$$

Se deja como ejercicio demostrar que el lado derecho de la ecuación anterior se puede escribir en la forma del lado derecho de P_{k+1}. Esto demuestra que P_{k+1} es verdadero, y por lo tanto P_n que se verifica para todo n. ■

Considérese un entero positivo j y supóngase que a cada entero $n \geq j$ se asocia un enunciado P_n. Por ejemplo, si $j = 6$, entonces los enunciados se numeran P_6, P_7, P_8, ... El principio de inducción matemática se puede extender para cubrir esta situación. Tal como antes, se usan dos pasos. Específicamente, para demostrar que los enunciados S_n son verdaderos para $n \geq j$, se usan los dos pasos siguientes:

PRINCIPIO EXTENDIDO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA PARA P_k, $k \geq j$

(i′) Demostrar que P_j es verdadero.

(ii′) Suponga que P_k es verdadero para $k \geq j$ y demuestre que P_{k+1} es verdadero.

EJEMPLO 3 Sea a un número real no nulo tal que $a > -1$. Demostrar que $(1+a)^n > 1 + na$ para todo entero $n \geq 2$.

SOLUCIÓN Para cada entero positivo n, sea P_n la desigualdad $(1 + a)^n > 1 + na$. Nótese que P_1 es falso, puesto que $(1 + a)^1 = 1 + (1)(a)$. Sin embargo, podemos demostrar que P_n es cierto para $n \geq 2$ usando el principio ampliado con $j = 2$.

Paso (i'): Primero notamos que $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2$. Puesto que $a \neq 0$, tenemos $a^2 > 0$, y por lo tanto, $1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$. Esto da $(1 + a)^2 > 1 + 2a$, y por consiguiente, P_2 es verdadero.

Paso (ii'): Supóngase que P_k es verdadero para $k \geq 2$. De esta manera, la hipótesis de inducción es

$$(1 + a)^k > 1 + ka.$$

Deseamos demostrar que P_{k+1} se verifica, esto es,

$$(1 + a)^{k+1} > 1 + (k + 1)a.$$

Puesto que $a > -1$, tenemos $a + 1 > 0$, y por lo tanto multiplicar ambos lados de la hipótesis de inducción por $1 + a$ no cambiará el signo de la desigualdad. Consecuentemente,

$$(1 + a)^k(1 + a) > (1 + ka)(1 + a),$$

esto se puede volver a escribir como

$$(1 + a)^{k+1} > 1 + ka + a + ka^2$$

o como $$(1 + a)^{k+1} > 1 + (k + 1)a + ka^2.$$

Puesto que $ka^2 > 0$, tenemos

$$1 + (k + 1)a + ka^2 > 1 + (k + 1)a$$

y por lo tanto, $$(1 + a)^{k+1} > 1 + (k + 1)a.$$

De esta manera, P_{k+1} es verdadero y la demostración queda completa. ■

El Teorema del Binomio se enunció sin demostrarlo, en la Sección 1.5. Esta sección concluirá estableciendo de nuevo este importante resultado y efectuando la demostración mediante inducción matemática.

TEOREMA DEL BINOMIO

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

DEMOSTRACIÓN Para cada entero positivo n, sea P_n el enunciado dado en el Teoma del Binomio.

Paso (i): Si $n = 1$, el enunciado se reduce a $(a + b)^1 = a^1 + b^1$. Consecuentemente P_1 es verdadero.

Paso (ii): Supóngase que P_k se verifica. Entonces la hipótesis de inducción es

$$(a+b)^k = a^k + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}b^2 + \cdots + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}b^{r-1} + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)}{r!}a^{k-r}b^r + \cdots + kab^{k-1} + b^k.$$

en donde hemos demostrado tanto el término r-ésimo como el $(r + 1)$-ésimo en el desarrollo.

Si multiplicamos ambos lados de la ecuación por $(a + b)$ obtenemos

$$(a+b)^{k+1} = \left[a^{k+1} + ka^kb + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-1}b^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{r!}a^{k-r+1}b^r + \cdots + ab^k\right] + \left[a^kb + ka^{k-1}b^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}b^r + \cdots + kab^k + b^{k+1}\right]$$

en donde los términos en el primer paréntesis rectangular resultan de multiplicar por a el lado derecho de la hipótesis de inducción y los términos en el segundo paréntesis rectangular resultan de multiplicar por b. Al reordenar y combinar términos resulta

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + (k+1)a^kb + \left[\frac{k(k-1)}{2!} + k\right]a^{k-1}b^2 + \cdots + \left[\frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{r!} + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}\right]a^{k-r+1}b^r + \cdots + (1+k)ab^k + b^{k+1}.$$

Se puede demostrar que si se simplifican los coeficientes, obtenemos P_n con $k + 1$ en vez de n; entonces P_{k+1} es verdadero, y por lo tanto P_n se cumple para todo entero positivo n. Esto completa la demostración. □

Ejercicios 10.1

En los Ejercicios 1 a 18 demuestre que la fórmula dada es verdadera para todo entero positivo n.

1. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$

2. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

3. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

4. $3 + 9 + 15 + \cdots + (6n - 3) = 3n^2$

5. $2 + 7 + 12 + \cdots + (5n - 3) = \frac{1}{2}n(5n - 1)$

6. $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$

7. $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n - 1) \cdot 2^n$

8. $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^n = \dfrac{(-1)^n - 1}{2}$

9. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$

10. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n + 1)}{2}\right]^2$

11. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n + 1)} = \dfrac{n}{n + 1}$

12. $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n(n + 1)(n + 2)} = \dfrac{n(n + 3)}{4(n + 1)(n + 2)}$

13. $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$

14. $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

15. $n < 2^n$

16. $1 + 2n \leq 3^n$

17. $1 + 2 + 3 + \cdots + n < \frac{1}{8}(2n + 1)^2$

18. Si $0 < a < b$, entonces $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1} < \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

Demuestre que los enunciados en los Ejercicios 19 a 22 son verdaderos para todo entero positivo n.

19. 3 es un factor de $n^3 - n + 3$.

20. 2 es un factor de $n^2 + n$.

21. 4 es un factor de $5^n - 1$.

22. 9 es un factor de $10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5$.

23. Use la inducción matemática para demostrar que si a es cualquier número real mayor que 1, entonces $a^n > 1$ para todo entero positivo n.

24. Demuestre que

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

en donde n es cualquier entero positivo y a y r son números reales con $r \neq 1$.

25. Use inducción matemática para demostrar que $a - b$ es un factor de $a^n - b^n$ para todo entero positivo n. (*Sugerencia:* $a^{k+1} - b^{k+1} = a^k(a - b) + (a^k - b^k)b$.)

26. Demuestre que $a + b$ es un factor de $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ para todo entero positivo n.

27. Use inducción matemática para demostrar el teorema de De Moivre:

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n[\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta]$$

para todo entero positivo n.

28. Demuestre que para todo entero positivo $n \geq 3$, la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n - 2) \cdot 180°$.

Demuestre que las fórmulas en los Ejercicios 29 y 30 son verdaderas para todo entero positivo n.

29. $\operatorname{sen}(\theta + n\pi) = (-1)^n \operatorname{sen}\theta$.

30. $\cos(\theta + n\pi) = (-1)^n \cos\theta$.

10.2 Sucesiones infinitas y notación de sumatoria

Una función f de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asocia a cada elemento x de D un elemento único $f(x)$ de E. Hasta ahora el dominio D ha sido por lo general un conjunto de números reales. En esta sección consideraremos una clase diferente de funciones.

DEFINICIÓN

Una **sucesión infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos.

Por conveniencia, algunas veces nos referimos a las sucesiones infinitas simplemente como *sucesiones*. En este libro, el contradominio de una sucesión infinita será un conjunto de números reales.

Si f es una sucesión infinita, entonces a cada entero positivo n corresponde un número real $f(n)$. A estos números en el contradominio de f se les puede representar escribiendo

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$$

en donde los puntos al final indican que la sucesión no termina. Al número $f(1)$ se le llama **primer término** de la sucesión, a $f(2)$ el **segundo término**, y en general, $f(n)$ es el ***n*-ésimo término** de la sucesión. Es común usar notación de subíndice en vez de notación funcional y escribir estos números como

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

en donde se entiende que para cada entero positivo n, el símbolo a_n denota el número real $f(n)$. De esta manera obtenemos un conjunto infinito de números reales que está *ordenado* en el sentido de que existe un primer número, un segundo número, un cuadragésimo quinto número, y así sucesivamente. A pesar de que las sucesiones son funciones, un conjunto ordenado del tipo anterior también será llamado sucesión infinita. Si deseamos convertir el conjunto en una función f, hacemos $f(n) = a_n$ para todo entero positivo n.

De la definición de igualdad de funciones vemos que una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

es **igual** a una sucesión

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

si y sólo si $a_k = b_k$ para todo entero positivo k. A menudo se definen las sucesiones infinitas enunciando la fórmula del n-ésimo término como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 Enunciar los cuatro primeros términos y el décimo término de la sucesión cuyo n-ésimo término es como sigue:

(a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (b) $a_n = 2 + (0.1)^n$

(c) $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}$ (d) $a_n = 4$

SOLUCIÓN Para encontrar los cuatro primeros términos sustituimos sucesivamente $n = 1, 2, 3$ y 4 en la fórmula de a_n. El décimo término se encuentra al sustituir 10 en lugar de n. Al hacer esto y simplificar obtenemos lo siguiente:

Término n-ésimo	*Primeros cuatro términos*	*Décimo término*
(a) $\dfrac{n}{n+1}$	$\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}$	$\dfrac{10}{11}$

(b) $2 + (0.1)^n$	2.1, 2.01, 2.001, 2.0001	2.0000000001
(c) $(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}$	$\dfrac{1}{2}, -\dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{8}, -\dfrac{16}{11}$	$-\dfrac{100}{29}$
(d) 4	4, 4, 4, 4	4

Algunas secuencias infinitas se describen enunciando el primer término a_1 junto con una regla que muestra cómo obtener cualquier término a_{k+1} a partir del término anterior a_k, siempre que $k \geq 1$. A una descripción de este tipo se la llama **definición recursiva (o recurrente)** y se dice que la secuencia está definida **recursivamente**.

EJEMPLO 2 Hallar los cuatro primeros términos y el n-ésimo término de la sucesión infinita que se define como

$$a_1 = 3 \quad \text{y} \quad a_{k+1} = 2a_k, \quad \text{para} \quad k \geq 1.$$

SOLUCIÓN La definición de la sucesión es recursiva, ya que el primer término está dado, y además, siempre que se conozca un término a_k, se puede encontrar el siguiente término a_{k+1}. Entonces

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 3 = 6$$
$$a_3 = 2a_2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 12$$
$$a_4 = 2a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 = 24.$$

Hemos expresado los términos como productos para obtener información acerca de la naturaleza del n-ésimo término. Si continuamos, obtenemos $a_5 = 2^4 \cdot 3$ y $a_6 = 2^5 \cdot 3$ y se concluye que

$$a_n = 2^{n-1} \cdot 3$$

para todo entero positivo n. Demostraremos que esta conclusión es correcta, por medio de inducción matemática. Si P_n denota la expresión $a_n = 2^{n-1} \cdot 3$, entonces P_1 es verdadera porque $a_1 = 2^0 \cdot 3 = 3$. Ahora, *supóngase* que P_k es verdadera, esto es, $a_k = 2^{k-1} \cdot 3$. Entonces

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k && \text{(definición de } a_{k+1}\text{)} \\ &= 2 \cdot 2^{k-1} \cdot 3 && \text{(hipótesis de inducción)} \\ &= 2^k \cdot 3 && \text{(una ley de exponentes)} \\ &= 2^{(k+1)-1} \cdot 3. && \text{(que equivale a } 2^k \cdot 3\text{)} \end{aligned}$$

lo que demuestra que P_{k+1} es verdadera. Entonces $a_n = 2^{n-1} \cdot 3$ para todo entero positivo n. ■

Es importante observar que si sólo se conocen unos cuantos términos de una sucesión infinita, resulta imposible predecir otros términos. Por ejemplo, si se dan 3,

6, 9, ... y se pide encontrar el cuarto término, no es posible proceder sin información adicional. La sucesión infinita cuyo n-ésimo término es

$$a_n = 3n + (1 - n)^3(2 - n)^2(3 - n)$$

tiene los cuatro primeros términos 3, 6, 9 y 120. Es posible describir sucesiones cuyos tres primeros términos sean 3, 6 y 9, y el cuarto término sea *cualquier* número dado. Esto demuestra que cuando trabajamos con sucesiones infinitas es esencial tener información específica respecto al n-ésimo término o conocer un método general para obtener cada término a partir del que le precede.

A veces es necesario determinar la suma de muchos términos de una sucesión infinita. Para mayor facilidad al expresar tales sumas se utiliza la **notación de sumatoria** que se describe a continuación. Dada una sucesión infinita

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

el símbolo $\sum_{k=1}^{m} a_k$ representa la suma de los m primeros términos, esto es,

NOTACIÓN DE SUMATORIA

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m.$$

La letra griega mayúscula Σ (sigma) indica una suma y el símbolo a_k representa el k-ésimo término. A la letra k se la llama **índice de sumatoria**, o **variable de sumatoria**, y los números 1 y m indican los valores extremos de la citada variable de sumatoria.

EJEMPLO 3 Evaluar

$$\sum_{k=1}^{4} k^2(k - 3).$$

SOLUCIÓN En este caso $a_k = k^2(k - 3)$. Para determinar la suma indicada, simplemente sustituimos, sucesivamente, los enteros k por 1, 2, 3 y 4 y sumamos los términos resultantes. Así,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} k^2(k - 3) &= 1^2(1 - 3) + 2^2(2 - 3) + 3^2(3 - 3) + 4^2(4 - 3)\\ &= (-2) + (-4) + 0 + 16 = 10.\end{aligned}$$

■

La letra que designe la variable de sumatoria es arbitraria. Para ilustrar esto, si usamos j como variable de esa clase entonces

$$\sum_{j=1}^{m} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m,$$

que es lo mismo que $\sum_{k=1}^{m} a_k$. Otros símbolos se pueden usar de manera similar. Como ejemplo numérico, la sumatoria del Ejemplo 3 se puede escribir como

$$\sum_{j=1}^{4} j^2(j-3).$$

Si n es un entero positivo, la suma de los n primeros términos de una sucesión infinita se denota con S_n. Por ejemplo, dada $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$,

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

y en general,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Al número real S_n se le llama ***n*-ésima suma parcial** $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, y a la sucesión infinita

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

se le llama **sucesión de sumas parciales**. Las sucesiones de sumas parciales son muy importantes en cálculo, donde se estudia el concepto de *serie infinita*. Se describirán algunos tipos especiales de series infinitas en la Sección 10.4.

EJEMPLO 4 Determinar los cuatro primeros términos y el n-ésimo término de la sucesión de sumas parciales asociadas a la sucesión 1, 2, 3, ..., n, ... de enteros positivos.

SOLUCIÓN Los cuatro primeros términos de la sucesión de sumas parciales son

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + 2 = 3$$
$$S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$
$$S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Del Ejemplo 1 de la Sección 10.1 vemos que

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$ ■

Si a_k es la misma para todos los enteros positivos k, digamos $a_k = c$, donde c es un número real, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$
$$= c + c + c + \cdots + c = nc.$$

De aquí se obtiene el siguiente resultado.

TEOREMA

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc$$

El dominio de la variable de sumatoria no tiene que empezar en 1. Por ejemplo, lo siguiente se explica por sí mismo:

$$\sum_{k=4}^{8} a_k = a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8.$$

En otra variante, si el primer término de una sucesión infinita es a_0, como en

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

entonces se pueden considerar sumas de la forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Obsérvese que esta es la suma de los $(n + 1)$ primeros términos de la sucesión dada.

EJEMPLO 5 Evaluar

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{2^k}{(k+1)}.$$

SOLUCIÓN

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{2^k}{(k+1)} = \frac{2^0}{(0+1)} + \frac{2^1}{(1+1)} + \frac{2^2}{(2+1)} + \frac{2^3}{(3+1)}$$

$$= 1 + 1 + \frac{4}{3} + 2 = \frac{16}{3}.$$

■

Se puede usar la notación de suma para denotar polinomios en forma compacta. Por ejemplo, en lugar de

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

podemos escribir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k.$$

En otra aplicación, la prolija fórmula del teorema del binomio se puede expresar como

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

El siguiente teorema se refiere a sumas y tiene muchos usos en cursos avanzados de matemáticas.

TEOREMA DE LAS SUMAS

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, son sucesiones infinitas, entonces para todo entero positivo n,

(i) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

(ii) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

(iii) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ para todo número c.

DEMOSTRACIÓN Aunque se puede demostrar el teorema por inducción matemática, usaremos un argumento que hace transparente la veracidad de las fórmulas. Empezamos con lo siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n).$$

Si utilizamos muchas veces las propiedades conmutativa y asociativa, podemos reordenar los términos de la derecha para llegar a

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n).$$

La expresión del lado derecho en notación de sumatoria da la fórmula (i).

Para la fórmula (iii) tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (ca_k) &= ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n \\ &= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \\ &= c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right).\end{aligned}$$

La demostración de (ii) se deja como ejercicio. □

Ejercicios 10.2

En los Ejercicios 1 a 16 encuentre los cinco primeros términos y el octavo término de la sucesión de la que se da el n-ésimo término.

1. $a_n = 12 - 3n$

2. $a_n = \dfrac{3}{5n - 2}$

3. $a_n = \dfrac{3n - 2}{n^2 + 1}$

4. $a_n = 10 + \dfrac{1}{n}$

5. $a_n = 9$

6. $a_n = (n - 1)(n - 2)(n - 3)$

7. $a_n = 2 + (-0.1)^n$

8. $a_n = 4 + (0.1)^n$

9. $a_n = (-1)^{n-1} \dfrac{n + 7}{2n}$

10. $a_n = (-1)^n \dfrac{6 - 2n}{\sqrt{n + 1}}$

11. $a_n = 1 + (-1)^{n+1}$

12. $a_n = (-1)^{n+1} + (0.1)^{n-1}$

13. $a_n = \dfrac{2^n}{n^2 + 2}$ **14.** $a_n = \sqrt{2}$

15. a_n es el número de cifras decimales en $(0.1)^n$.

16. a_n es el número de enteros positivos menores que n^3.

Encuentre los cinco primeros términos de las sucesiones que se definen en forma recursiva en los Ejercicios 17 a 24.

17. $a_1 = 2,\ a_{k+1} = 3a_k - 5$

18. $a_1 = 5,\ a_{k+1} = 7 - 2a_k$

19. $a_1 = -3,\ a_{k+1} = a_k^2$

20. $a_1 = 128,\ a_{k+1} = a_k/4$

21. $a_1 = 5,\ a_{k+1} = ka_k$

22. $a_1 = 3,\ a_{k+1} = 1/a_k$

23. $a_1 = 2,\ a_{k+1} = (a_k)^k$

24. $a_1 = 2,\ a_{k+1} = (a_k)^{1/k}$

25. Una pregunta de un examen enuncia los cuatro primeros términos de una sucesión 2, 4, 6 y 8, y pide el quinto término. Demuestre que el citado quinto término puede ser cualquier número real a, encontrando el n-ésimo término de una sucesión que tenga como primeros cinco términos a 2, 4, 6, 8 y a.

26. El número de bacterias que hay en un cierto cultivo se duplica cada día. Si el número inicial de bacterias es 500, ¿cuántas hay al cabo de un día?, ¿de dos días?, ¿de tres días? Obtenga una fórmula para el número de bacterias después de n días.

Encuentre el número dado en cada uno de los Ejercicios 27 a 42.

27. $\sum_{k=1}^{5} (2k - 7)$ **28.** $\sum_{k=1}^{6} (10 - 3k)$

29. $\sum_{k=1}^{4} (k^2 - 5)$ **30.** $\sum_{k=1}^{10} [1 + (-1)^k]$

31. $\sum_{k=0}^{5} k(k - 2)$ **32.** $\sum_{k=0}^{4} (k - 1)(k - 3)$

33. $\sum_{k=3}^{6} \dfrac{k - 5}{k - 1}$ **34.** $\sum_{k=1}^{6} \dfrac{3}{k + 1}$

35. $\sum_{k=1}^{5} (-3)^{k-1}$ **36.** $\sum_{k=0}^{4} 3(2^k)$

37. $\sum_{k=1}^{100} 100$ **38.** $\sum_{k=1}^{1000} 5$

39. $\sum_{k=1}^{n} (k^2 + 3k + 5)$ (*Sugerencia:* Use el teorema de la sumas para expresar la suma como $\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 5$. A continuación utilice el Ejercicio 9 y el Ejemplo 1 de la Sección 10.1, junto con la fórmula para $\sum_{k=1}^{n} c$.)

40. $\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 2k + 1)$

41. $\sum_{k=1}^{n} (2k - 3)^2$

42. $\sum_{k=1}^{n} (k^3 + 2k^2 - k + 4)$

(*Sugerencia:* Véase el Ejercicio 10 de la Sección 10.1.)

Exprese las sumas de los Ejercicios 43 a 52 en términos de la notación de sumatoria.

43. $1 + 5 + 9 + 13 + 17$

44. $2 + 5 + 8 + 11 + 14$

45. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{4}{11}$

46. $\frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{3}{14} + \frac{4}{19}$

47. $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^6}{6} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2n}$

48. $2 - 4 + 8 - 16 + 32 - 64$

49. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$

50. $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{x^n}{n}$

51. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{99 \cdot 100}$

52. $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{98 \cdot 99 \cdot 100}$

53. Demuestre (ii) del teorema de las sumas.

54. Desarrolle (i) del teorema de las sumas hasta $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k + c_k)$.

55. Demuestre el teorema de las sumas por inducción matemática.

56. Demuestre $\sum_{k=1}^{n} c = nc$ por inducción matemática.

Ejercicios para Calculadora 10.2

1. Los términos de la sucesión, definida recursivamente mediante $a_1 = 5$, $a_{k+1} = \sqrt{a_k}$, pueden generarse ingresando 5 y oprimiendo la tecla de la raíz cuadrada repetidamente. Describa lo que ocurre a los términos de la sucesión conforme k aumenta.

2. Los términos de la sucesión definida recursivamente mediante $a_1 = 1$, $a_{k+1} = \cos a_k$ se pueden generar ingresando 1 y oprimiendo repetidamente la tecla del coseno (en el modo de radianes). Describa lo que ocurre a los términos de la sucesión conforme k aumenta.

3. A partir de la sucesión siguiente se pueden generar aproximaciones para π:

$$x_1 = 3,\ x_{k+1} = x_k - \tan x_k.$$

Encuentre los cinco primeros términos de esta sucesión. ¿Qué pasa a los términos de la sucesión cuando $x_1 = 6$?

4. Se pueden generar aproximaciones para $\sqrt{N}$ a partir de la sucesión

$$x_1 = \frac{N}{2},\ x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{N}{x_k}\right).$$

Determine x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 si $N = 10$.

5. La *sucesión de Bode*, definida por la ecuación $a_1 = \frac{4}{10}$ y $a_k = (3 \cdot 2^{k-2} + 4)/10$ para $k \geq 2$, puede emplearse para calcular las distancias de los planetas al Sol. El tercer término de la sucesión es $a_3 = 1$ *unidad astronómica* (que equivale a 92 900 000 millas) y corresponde a la Tierra. Aproxime los primeros cino términos de la sucesión. (El quinto término corresponde al planetoide (o asteroide) Ceres.)

6. La famosa *sucesión de Fibonacci* se define recursivamente mediante $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ con $a_1 = a_2 = 1$.
   (a) Encuentre los primeros diez términos de la sucesión.
   (b) Los términos de la sucesión $r_k = a_{k+1}/a_k$ dan progresivamente mejores aproximaciones de τ, la *razón de oro*. Aproxime los primeros diez términos de la sucesión.

7. La *sucesión logística discreta* es la sucesión definida recursivamente mediante

$$y_{k+1} = y_k + \frac{r}{K} y_k(K - y_k)$$

en la que r y K son constantes positivas. Esta sucesión se utiliza para modelar el crecimiento de una población que es fecundada estacionalmente en un entorno con recursos limitados.
   (a) Obtenga los términos de la sucesión si $y_1 = K$.
   (b) Aproxime los primeros diez términos de la sucesión si $y_1 = 400$, $r = 2$ y $K = 500$. Describa el comportamiento de esta sucesión que predice el número y_k en la población después de k años.

10.3 Sucesiones aritméticas

En esta sección y en la siguiente nos concentraremos en dos tipos especiales de sucesiones. Al primer tipo lo podemos definir como sigue.

DEFINICIÓN

Una **sucesión aritmética** es una sucesión cuyos términos consecutivos difieren en el mismo número real.

Las sucesiones aritméticas también se llaman **progresiones aritméticas**. Por definición, una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

es aritmética si y sólo si existe un número real d tal que

$$a_{k+1} - a_k = d$$

para todo entero positivo k. Al número d se le llama **diferencia común** asociada con la sucesión aritmética.

EJEMPLO 1 Demostrar que la sucesión

$$1, 4, 7, 10, \ldots, 3n - 2, \ldots$$

es aritmética y determinar la diferencia común.

SOLUCIÓN Si $a_n = 3n - 2$ entonces para todo entero positivo k,

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= [3(k + 1) - 2] - (3k - 2) \\ &= 3k + 3 - 2 - 3k + 2 = 3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por definición, la sucesión dada es aritmética con diferencia común 3. ■

Dada una sucesión aritmética sabemos que

$$a_{k+1} = a_k + d$$

para todo entero positivo k. Esto da una fórmula de recurrencia para obtener términos sucesivos. Si empezamos con cualquier número real a_1, podemos generar una sucesión aritmética con diferencia común d simplemente sumando d a a_1, después a $a_1 + d$ y así sucesivamente para obtener

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, \ldots$$

Es evidente que el n-ésimo término a_n de esta sucesión está dado por la siguiente fórmula.

n-ésimo TÉRMINO DE UNA SUCESIÓN ARITMÉTICA

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

EJEMPLO 2 Hallar el decimoquinto término de la sucesión aritmética cuyos tres primeros términos son 20, 16.5 y 13.

SOLUCIÓN La diferencia común es -3.5. Al sustituir $a_1 = 20$, $d = -3.5$ y $n = 15$ en la fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)d$ resulta

$$a_{15} = 20 + (15 - 1)(-3.5) = 20 - 49 = -29.$$ ■

EJEMPLO 3 Si el cuarto término de una sucesión aritmética es 5 y el noveno término es 20, obtener el sexto término.

9. Encuentre el decimosegundo término de la sucesión aritmética cuyos dos primeros términos son 9.1 y 7.5.

10. Halle el decimoprimer término de la sucesión aritmética cuyos dos primeros términos son $2 + \sqrt{2}$ y 3.

11. Los términos sexto y séptimo de una sucesión aritmética son 2.7 y 5.2. Obtenga el primer término.

12. Dada una sucesión aritmética con $a_3 = 7$ y $a_{20} = 43$, encuentre a_{15}.

En los Ejercicios 13 a 16 encuentre la suma S_n para la sucesión aritmética que satisface las condiciones dadas.

13. $a_1 = 40,\ d = -3,\ n = 30$

14. $a_1 = 5,\ d = 0.1,\ n = 40$

15. $a_1 = -9,\ a_{10} = 15,\ n = 10$

16. $a_7 = \frac{7}{3},\ d = -\frac{2}{3},\ n = 15$

Determine las sumas en los Ejercicios 17 a 20.

17. $\sum_{k=1}^{20} (3k - 5)$

18. $\sum_{k=1}^{12} (7 - 4k)$

19. $\sum_{k=1}^{18} \left(\frac{1}{2}k + 7\right)$

20. $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{4}k + 3\right)$

21. ¿Cuántos enteros entre 32 y 395 son divisibles entre 6? Encuentre la suma de ellos.

22. ¿Cuántos enteros negativos mayores que -500 son divisibles entre 33? Encuentre la suma de ellos.

23. ¿Cuántos términos hay en una sucesión aritmética con primer término -2, diferencia común $\frac{1}{4}$ y suma 21?

24. ¿Cuántos términos hay en una sucesión aritmética con sexto término -3, diferencia común 0.2 y suma -33?

25. Inserte cinco medias aritméticas entre 2 y 10.

26. Inserte tres medias aritméticas entre 3 y -5.

27. Una pila de troncos tiene 24 de ellos en la primera capa, 23 en la segunda, 22 en la tercera y así sucesivamente. La última capa contiene 10 maderos. Encuentre el número total de troncos de la pila.

28. En una sección de un estadio atlético hay 30 asientos en la primera fila, 32 asientos en la segunda, 34 en la tercera y así sucesivamente, hasta la décima, después de la cual hay 10 filas más, cada una con 50 asientos. Encuentre el número total de asientos en la sección.

29. Un hombre desea construir una escalera con nueve peldaños que disminuyen uniformemente desde 24 pulgadas en la base hasta 18 pulgadas en la parte superior. Determine la longitud de los siete peldaños intermedios.

30. Un joven que va cuesta abajo en su bicicleta recorre 4 pie en el primer segundo y en cada uno de los segundos siguientes recorre 5 pie más que en el segundo anterior. Si llega hasta abajo en 11 segundos, calcule la distancia total que recorre.

31. En un concurso habrá cinco premios que en total suman \$5000, y una diferencia de \$100 entre los premios sucesivos. Encuentre el primer término.

32. Una compañía debe distribuir \$46 000 en bonos entre sus diez mejores vendedores. La décima persona de la lista recibirá \$1 000 y la diferencia en dinero entre los bonos de los vendedores clasificados sucesivamente debe ser constante. Determine el bono de cada vendedor.

33. Algunos polígonos de n lados tienen la propiedad de que las medidas de los ángulos interiores se pueden disponer en una sucesión aritmética. Si en un polígono de este tipo, el ángulo más pequeño es de 20°, y el más grande, de 160°, calcule el número de lados del polígono. (*Sugerencia:* Obtenga una expresión para la suma de los ángulos interiores si el polígono tiene n lados.)

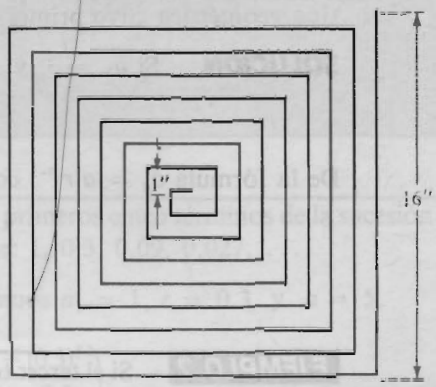
34. Si f es una función lineal, muestre que la sucesión cuyo n-ésimo término $a_n = f(n)$ es una sucesión aritmética.

35. La sucesión definida recursivamente por $x_{k+1} = x_k/(1 + x_k)$ aparece en genética en el estudio de la eliminación de un gene deficiente de una po-

blación. Demuestre que es aritmética la sucesión cuyo n-ésimo término es $1/x_n$.

36. Calcule la longitud total de la línea laberíntica de la figura, si el ancho del laberinto formado por la línea es de 16 pulg y los corredores del mismo tienen un ancho de 1 pulg. ¿Cuál sería la longitud si el ancho del laberinto fuera de 32 pulg?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 36



10.4 Sucesiones geométricas

A continuación se define otro tipo importante de sucesiones infinitas.

DEFINICIÓN

Una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ es una **sucesión geométrica** si y sólo si existe un número real $r \neq 0$ tal que

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$$

para todo entero positivo k.

A las sucesiones geométricas también se las denomina **progresiones geométricas**. Al número r de la definición se le llama **razón común** asociada a la sucesión geométrica. Entonces $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ es geométrica (con razón común r) si y sólo si

$$a_{k+1} = a_k r$$

para todo entero positivo k. Como en las sucesiones aritméticas, esto da un método recursivo para obtener términos. Si empezamos con cualquier número real a_1 diferente de cero y *multiplicamos* por el número r sucesivamente, obtenemos

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \ldots$$

El n-ésimo término a_n de esta sucesión está dado por la siguiente fórmula:

n-ésimo TÉRMINO DE UNA SUCESIÓN GEOMÉTRICA

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

EJEMPLO 1 Hallar los cinco primeros términos y el décimo término de la sucesión geométrica cuyo primer término es 3 y en la que la razón común es $-\frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN Si $a_1 = 3$ y $r = -\frac{1}{2}$, entonces los cinco primeros términos son

$$3, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{4}, -\tfrac{3}{8}, \tfrac{3}{16}.$$

De la fórmula $a_n = a_1 r^{n-1}$ con $n = 10$, obtenemos

$$a_{10} = 3(-\tfrac{1}{2})^9 = -\tfrac{3}{512}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Si el tercer término de una sucesión geométrica es 5 y el sexto término es -40, hallar el octavo término.

SOLUCIÓN Tenemos $a_3 = 5$ y $a_6 = -40$. Si sustituimos $n = 3$ y $n = 6$ en la fórmula $a_n = a_1 r^{n-1}$ llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5 = a_1 r^2 \\ -40 = a_1 r^5. \end{cases}$$

Como $r \neq 0$, la primera ecuación es equivalente a $a_1 = 5/r^2$. La sustitución de a_1 en la segunda ecuación da

$$-40 = \left(\frac{5}{r^2}\right) \cdot r^5 = 5r^3.$$

Por lo tanto, $r^3 = -8$ y $r = -2$. Si ahora sustituimos r por -2 en la ecuación $5 = a_1 r^2$, obtenemos $a_1 = \frac{5}{4}$. Finalmente, si $a_n = a_1 r^{n-1}$ con $n = 8$, tenemos que

$$a_8 = (\tfrac{5}{4})(-2)^7 = -160. \quad \blacksquare$$

Encontremos ahora una fórmula para S_n, la n-ésima suma parcial de una sucesión geométrica. Si el primer término es a_1 y la razón común es r, entonces

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}.$$

Si $r = 1$, esto da $S_n = n a_1$. Ahora supóngase que $r \neq 1$. Si multiplicamos por r ambos lados de la fórmula general de S_n, obtenemos

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n.$$

Si ahora se resta ésta de la ecuación de S_n, muchos de los términos del lado derecho se cancelan y queda

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n \quad \text{o bien} \quad (1 - r)S_n = a_1(1 - r^n).$$

Como $r \neq 1$, tenemos que $1 - r \neq 0$ y entonces podemos dividir ambos lados entre $1 - r$ para llegar a

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Hemos demostrado así el teorema siguiente.

TEOREMA La n-ésima suma parcial de una sucesión geométrica, cuyo primer término es a_1 y su razón común es $r \neq 1$, es

$$S_n = a_1 \frac{(1 - r^n)}{1 - r}.$$

EJEMPLO 3 Determinar la suma de los primeros cinco términos de la sucesión geométrica que empieza de la manera siguiente: 1, 0.3, 0.09, 0.027, ...

SOLUCIÓN Si en la fórmula de S_n hacemos $a_1 = 1$, $r = 0.3$ y $n = 5$,

$$S_5 = 1\left(\frac{1 - (0.3)^5}{1 - 0.3}\right).$$

Lo cual se reduce a $S_5 = 1.4251$. ■

EJEMPLO 4 Un hombre desea ahorrar dinero y guarda 1 centavo el primer día, 2 centavos el segundo día, 4 centavos el tercer día y así sucesivamente, duplicando la cantidad cada día. Si continúa así, ¿cuánto deberá guardar el decimoquinto día? Suponiendo que no se le acaba el dinero, ¿cuál es el total ahorrado a los 30 días?

SOLUCIÓN La cantidad (en centavos) guardada en días consecutivos constituye una sucesión geométrica

$$1, 2, 4, 8, \ldots$$

con primer término 1 y razón 2. La cantidad requerida en el decimoquinto día se encuentra mediante $a_n = a_1 r^{n-1}$ con $a_1 = 1$ y $n = 15$. Esto nos da $1 \cdot 2^{14}$, o sea \$163.84. Para determinar el total ahorrado al final de 30 días, utilizamos la fórmula para S_n con $n = 30$. Entonces

$$S_{30} = 1\frac{(1 - 2^{30})}{1 - 2},$$

que se simplifica a \$10 737 418.23. ■

Dada una serie geométrica con primer término a_1 y razón común $r \neq 1$, podemos expresar la fórmula para S_n que se dio en el teorema anterior en la forma

$$S_n = \frac{a_1}{1 - r} - \frac{a_1}{1 - r} r^n.$$

Aunque no lo haremos, puede demostrarse que si $|r| < 1$, entonces r^n *se acerca al número* 0 *cuando* n *crece*; esto es, podemos hacer r^n tan cercano a 0 como queramos, tomando n suficientemente grande. Se concluye que S_n se acerca a $a_1/(1 - r)$ cuando n crece indefinidamente. Si usamos la notación utilizada en el estudio de las funciones racionales en el Capítulo 4, esto se puede expresar simbólicamente como

$$S_n \to \frac{a_1}{1 - r} \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Al número $a_1/(1 - r)$ se le llama *suma de una serie geométrica infinita*

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1} + \cdots$$

Esto da el resultado siguiente.

TEOREMA

Si $|r| < 1$, la serie geométrica infinita

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1} + \cdots$$

tiene la suma $\dfrac{a_1}{1 - r}$.

Intuitivamente, el teorema anterior implica que si se suman más y más términos de la serie geométrica infinita indicada, las sumas se acercan más y más a $a_1/(1 - r)$. El siguiente ejemplo ilustra la forma de usar el teorema para demostrar que todo número real que se representa con un decimal que se repite, es racional.

EJEMPLO 5 Obtener el número racional que corresponde al número decimal repetitivo en forma infinita $5.4\overline{27}$, en donde la barra significa que el grupo de dígitos bajo ella se repite indefinidamente.

SOLUCIÓN A partir de la expresión decimal 5.4272727 . . . obtenemos la serie infinita

$$5.4 + 0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \cdots$$

La parte de la expresión que aparece después del primer término es

$$0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \cdots,$$

que tiene la forma dada en el último teorema, con $a_1 = 0.027$ y $r = 0.01$. Entonces la suma de esta serie geométrica infinita es

$$\frac{0.027}{1 - 0.01} = \frac{0.027}{0.99} = \frac{27}{990} = \frac{3}{110}.$$

Por lo tanto, el número deseado es $5.4 + \frac{3}{110}$, o sea $\frac{597}{110}$. Si se verifica mediante una división no abreviada, se demuestra que $\frac{597}{110}$ es igual al número repetitivo dado. ■

En general, dada cualquier sucesión infinita $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, a una expresión de la forma

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

se la llama **serie infinita**, o simplemente **serie**. En notación de sumatoria, esta serie se denota con

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

en donde la variable de sumatoria es k. A cada número a_k se le llama **término** de la serie y a a_n se le llama ***n*-ésimo término**. Como sólo las sumas finitas pueden sumarse algebraicamente, es necesario *definir* lo que significa suma infinita. Una forma natural de hacerlo es usar la sucesión de sumas parciales

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

Si existe un número S tal que $S_n \to S$ cuando $n \to \infty$, entonces, como en el estudio de series geométricas infinitas, llamamos a S la **suma** de la serie y escribimos

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Entonces en el Ejemplo 5 podemos escribir

$$\tfrac{597}{110} = 5.4 + 0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \cdots$$

El siguiente ejemplo ilustra una serie infinita no geométrica. Como un tratamiento completo está fuera del alcance de este texto, la solución se da de manera intuitiva.

EJEMPLO 6 Demostrar que la serie infinita

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

tiene suma.

SOLUCIÓN El n-ésimo término $a_n = 1/n(n+1)$ se puede descomponer en las fracciones parciales

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

En consecuencia, la n-ésima suma parcial de la serie se puede expresar como

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Como $1/(n+1) \to 0$ cuando $n \to \infty$, se concluye que $S_n \to 1$ y podemos escribir

$$1 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

Esto significa que a medida que sumamos más y más términos de la serie, la suma se acerca más y más a 1. ■

Si los términos de una sucesión infinita son positivos y negativos alternadamente y consideramos la expresión

$$a_1 + (-a_2) + a_3 + (-a_4) + \cdots + [(-1)^{n+1} a_n] + \cdots$$

donde todas las a_k son números positivos reales, entonces esta expresión se conoce como **serie infinita alternante**, y la expresamos como

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots$$

Ejemplos de series infinitas alternantes pueden obtenerse mediante series geométricas con razón común negativa.

Las series infinitas tienen muchas aplicaciones en matemáticas y en las ciencias naturales. El lector puede acudir a textos de cálculo para un estudio riguroso de este importante concepto.

Ejercicios 10.4

En cada uno de los Ejercicios 1 a 12 encuentre el quinto término, el octavo término y el n-ésimo término de la sucesión geométrica dada.

1. $8, 4, 2, 1, \ldots$

2. $4, 1.2, 0.36, 0.108, \ldots$

3. $300, -30, 3, -0.3, \ldots$

4. $1, -\sqrt{3}, 3, -\sqrt{27}, \ldots$

5. $5, 25, 125, 625, \ldots$

6. $2, 6, 18, 54, \ldots$

7. $4, -6, 9, -13.5, \ldots$

8. $162, -54, 18, -6, \ldots$

9. $1, -x^2, x^4, -x^6, \ldots$

10. $1, -\frac{x}{3}, \frac{x^2}{9}, -\frac{x^3}{27}, \ldots$

11. $2, 2^{x+1}, 2^{2x+1}, 2^{3x+1}, \ldots$

12. $10, 10^{2x-1}, 10^{4x-3}, 10^{6x-5}, \ldots$

13. Halle el sexto término de la sucesión geométrica cuyos dos primeros términos son 4 y 6.

14. Obtenga el séptimo término de la sucesión cuyos segundo y tercer términos son 2 y $-\sqrt{2}$, respectivamente.

15. En una sucesión geométrica $a_5 = 1/16$ y $r = 3/2$. Encuentre a_1 y S_5.

16. Dada una sucesión geométrica en la que $a_4 = 4$ y $a_7 = 12$, encuentre r y a_{10}.

Encuentre la suma en cada uno de los Ejercicios 17 a 20.

17. $\sum_{k=1}^{10} 3^k$

18. $\sum_{k=1}^{9} (-\sqrt{5})^k$

19. $\sum_{k=0}^{9} (-\frac{1}{2})^{k+1}$

20. $\sum_{k=1}^{7} (3^{-k})$

21. Una bomba de vacío extrae la mitad del aire de un recipiente en cada carrera. ¿Qué porcentaje del aire original queda en el recipiente después de 10 carreras?

22. La depreciación anual de una máquina es 25% de su valor al principio del año. Si el costo original de la máquina es \$20 000 (dólares), determine su valor al cabo de 6 años.

23. Un cultivo de bacterias se incrementa 20% cada hora. Si el cultivo original tenía 10 000 bacterias, obtenga una fórmula para determinar el número de bacterias que hay después de t horas. ¿Cuántos microorganismos habrá en el cultivo al cabo de 10 horas?

24. Si se deposita una cantidad P de dinero en una cuenta de ahorros que paga interés a una tasa de r por ciento anual capitalizable trimestralmente, y si el capital y el interés acumulado se deja en la cuenta, encuentre una fórmula para el monto total después de n años.

Determine las sumas de las series geométricas infinitas de los Ejercicios 25 a 30 siempre y cuando existan.

25. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$

26. $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots$

27. $1.5 + 0.015 + 0.00015 + \cdots$

28. $1 - 0.1 + 0.01 - 0.001 + \cdots$

29. $\sqrt{2} - 2 + \sqrt{8} - 4 + \cdots$

30. $250 - 100 + 40 - 16 + \cdots$

En los Ejercicios 31 a 38 encuentre el número racional representado por el número decimal repetitivo dado.

31. $0.\overline{23}$

32. $0.0\overline{71}$

33. $2.4\overline{17}$

34. $10.\overline{55}$

35. $5.1\overline{46}$

36. $3.2\overline{394}$

37. $1.\overline{6124}$

38. $123.6\overline{183}$

39. Se deja caer una pelota de goma desde una altura de 10 m. Si rebota aproximadamente la mitad de la distancia en cada caída, use una serie geométrica infinita para calcular aproximadamente la distancia total que recorre la pelota antes de detenerse.

40. El disco de un péndulo se balancea en un arco de 24 cm de largo en su primera oscilación. Si cada balanceo sucesivo es de aproximadamente cinco sextos de la longitud del anterior, use una serie geométrica para determinar la distancia total aproximada que recorre antes de detenerse.

41. En una pequeña ciudad se ha establecido recientemente una sucursal de una compañía manufacturera de ropa que pagará dos millones de dólares anuales en salarios. Se ha estimado que 60% de estos salarios se gastarán en el área local y de este dinero, otro 60% cambiará de manos dentro de la ciudad. Este proceso se repetirá *ad infinitum*. Al citado proceso se le conoce como el *efecto multiplicador*. Calcule el total de las erogaciones que serán generadas por los salarios de la compañía.

42. En un programa de erradicación de plagas, se sueltan cada día N moscas machos esterilizadas, en la población general, y 90% de ellas sobrevivirá un día dado.

(a) Muestre que el número de moscas esterilizadas en la población n días después del inicio del programa es

$$N + (0.9)N + (0.9)^2 N + \cdots + (0.9)^{n-1} N.$$

(b) Si el objetivo a *largo plazo* del programa es mantener en la población, 20 000 insectos machos esterilizados, ¿cuántas moscas deben soltarse cada día?

43. La semivida (o "vida media") en el torrente sanguíneo de cierto fármaco es de alrededor de 2 horas. Cada 4 horas se administrarán dosis de D mg, en donde D debe calcularse.

(a) Muestre que el número de miligramos del medicamento en el torrente sanguíneo, después de que se ha administrado la n-ésima dosis es

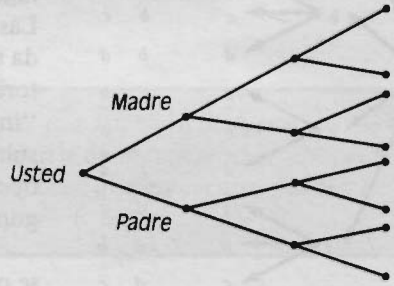
$$D + \tfrac{1}{4}D + \cdots + (\tfrac{1}{4})^{n-1} D$$

y que esta suma es aproximadamente $\frac{4}{3} D$ para valores grandes de n.

(b) Si se considera peligroso que haya más de 500 mg del fármaco en el torrente sanguíneo, encuentre la mayor dosis que se puede administrar repetidamente en un periodo largo.

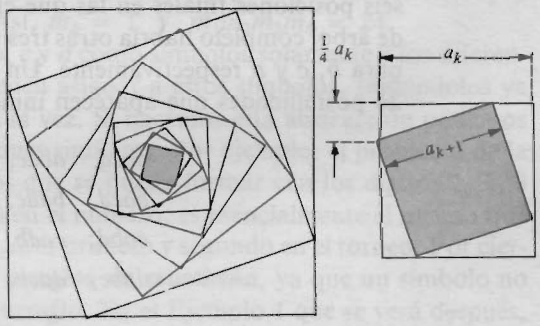
44. En la figura se indica un árbol genealógico que muestra tres generaciones anteriores y un total de 12 antecesores. Si usted tuviera que trazar su historia familiar hasta 10 generaciones atrás, ¿cuántos ancestros encontraría?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 44



45. En el primer croquis de la figura se muestra una sucesión anidada de cuadrados $S_1, S_2, \ldots, S_k$,

FIGURA PARA EL EJERCICIO 45



.... Sean a_k, A_k y P_k el lado, el área y el perímetro, respectivamente, del cuadrado S_k. El cuadrado S_{k+1} se construye a partir del S_k, seleccionando cuatro puntos en S_k que estén a una distancia de $\frac{1}{4}$ a_k de los vértices y uniéndolos luego (véase la segunda figura).

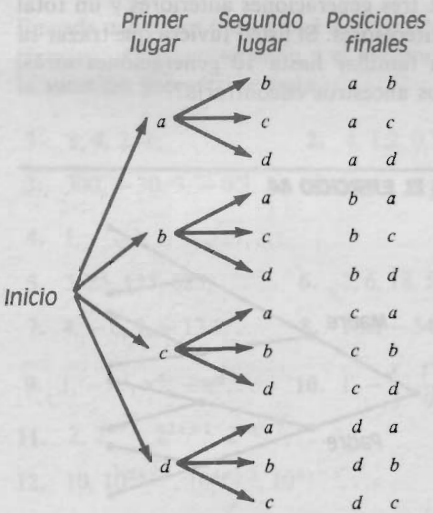
(a) Determine la relación entre a_{k+1} y a_k.

(b) Calcule a_n, A_n y P_n.

(c) Calcule $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$.

10.5 Permutaciones

FIGURA 10.1



Supongamos que en un torneo se van a determinar los lugares primero, segundo, tercero y cuarto entre los cuatro equipos participantes. Para propósitos de identificación, llamemos a los equipos *a*, *b*, *c* y *d*. Determinemos el número de formas diferentes en que se pueden decidir el primero y segundo lugares. Conviene usar un **diagrama de árbol** como el de la Figura 10.1. Si empezamos con la palabra "inicio", se listan las cuatro posibilidades para el primer lugar. A partir de cada una de ellas, una flecha señala un posible segundo lugar. En este problema la posición del segundo lugar está ocupada por un equipo diferente del que tiene la posición del primer lugar y por tanto se dibujan *tres* flechas desde cada posición. Las posiciones finales listan los resultados posibles, de izquierda a derecha. Estos se encuentran siguiendo todas las trayectorias diferentes (*ramas* del árbol) que van de la palabra "inicio" al equipo en segundo lugar. El número total de resultados es 12 y notamos que es el producto del número de opciones (4) para primer lugar y el de opciones (3) para segundo lugar (una vez que se ha determinado el primero).

Determinemos ahora el número total de formas en que se pueden ocupar las posiciones de primero, segundo, tercero y cuarto lugares. Para construir un diagrama de árbol podemos empezar dibujando flechas de la palabra "inicio" a cada uno de los posibles ocupantes del segundo lugar, como se hace en la Figura 10.1. A continuación, de cada posición de segundo lugar las flechas indican los posibles terceros lugares. Finalmente trazamos flechas hacia el equipo en cuarto lugar. Si consideramos sólo el caso en que el equipo *a* termina en primer lugar, tenemos el diagrama de la Figura 10.2. Note que existen seis posiciones finales en las que el equipo *a* ocupa el primer lugar. En un diagrama de árbol completo habría otras tres ramas de este tipo, correspondientes al primer lugar para *b*, *c* y *d* respectivamente. Un diagrama completo de posiciones finales daría las 24 posibilidades que aparecen inmediatamente a continuación de la Figura 10.2:

abcd, *abdc*, *acbd*, *acdb*, *adbc*, *adcb*,
bacd, *badc*, *bcad*, *bcda*, *bdac*, *bdca*,
cabd, *cadb*, *cbad*, *cbda*, *cdab*, *cdba*,
dabc, *dacb*, *dbac*, *dbca*, *dcab*, *dcba*.

Obsérvese que el número 24 es el producto del número de formas (4) en que puede ocu-

FIGURA 10.2



rrir el primer lugar, el número de posibilidades (3) para el segundo lugar (una vez que se ha decidido el primer lugar), el número de posibles resultados (2) para el tercer lugar (después de que se ha decidido el segundo lugar) y el número de formas (1) en que puede ocurrir el cuarto lugar (una vez que se han ocupado los tres primeros lugares).

Lo anterior ilustra la siguiente regla general, que aceptamos como un axioma básico de conteo.

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO

Sean $E_1, E_2, \ldots, E_k$ una sucesión de k eventos. Si para cada i, E_i puede ocurrir de m_i maneras, entonces el número total de maneras en que los eventos pueden ocurrir es el producto $m_1 m_2 \cdots m_k$.

En relación con la primera ilustración, si E_1 representa la determinación del equipo ganador del primer lugar, entonces $m_1 = 4$. Si E_2 indica la determinación del equipo en segundo lugar, $m_2 = 3$. Por lo tanto, el número de resultados para la sucesión E_1, E_2 es $4 \cdot 3 = 12$, que es igual al valor que encontramos por medio del diagrama de árbol. Si procedemos a E_3, la determinación del equipo en tercer lugar, entonces $m_3 = 2$ y entonces $m_1 m_2 m_3 = 24$. Finalmente, si ya han ocurrido E_1, E_2 y E_3, sólo hay una posibilidad para E_4. Así, $m_4 = 1$ y $m_1 m_2 m_3 m_4 = 24$.

En vez de equipos consideremos a, b, c y d como símbolos solamente y los diferentes *ordenamientos* o *arreglos* que se pueden asignar a estos símbolos, tomándolos ya sea dos a la vez, tres a la vez o cuatro a la vez. Si hacemos esta abstracción podemos aplicar nuestros métodos a otras situaciones similares. Por ejemplo, el problema de la determinación del número de dos dígitos que se puede formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4, de modo que ningún dígito se repita en el número, es esencialmente el mismo que el de nuestra ilustración de enlistar los lugares primero y segundo en el torneo. Por cierto, a los arreglos anteriores se les llama **arreglos sin repetición**, ya que un símbolo no puede ser utilizado dos veces en el miso arreglo. En el Ejemplo 1 que se verá después, consideramos arreglos en los que *sí* se permiten las repeticiones.

Anteriormente definimos pares (o díadas) ordenados y ternas (o tríadas) ordenadas. Similarmente, una **tétrada ordenada** es un conjunto de cuatro elementos x_1, x_2, x_3, x_4, en los que se ha especificado un ordenamiento tal que uno de los elementos puede considerarse como *primer elemento*, otro de ellos como *segundo elemento* y así sucesivamente. Se utiliza el símbolo (x_1, x_2, x_3, x_4) para la tétrada (cuarteta) ordenada que tiene el primer elemento x_1, segundo elemento x_2, tercer elemento x_3 y cuarto elemento x_4. En general, para cualquier entero positivo r, hablamos de la ***r*-ada ordenada**

$$(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$

para referirnos a un conjunto de elementos tales que a x_1 se le denomina primer elemento, a x_2 segundo elemento, y así sucesivamente hasta el r-ésimo.

EJEMPLO 1 ¿Cuántas tríadas ordenadas pueden obtenerse usando las letras a, b, c y d? ¿Cuántas tétradas ordenadas se pueden obtener? ¿Cuántas r-adas?

SOLUCIÓN Para dar respuesta a la primera pregunta debemos determinar el número de símbolos de la forma (x_1, x_2, x_3) que se pueden obtener usando sólo las letras a, b, c y d. Esto no es igual a enlistar primero, segundo y tercer lugar como en nuestra ilustración anterior, ya que no hemos descartado la posibilidad de tener repeticiones. Por ejemplo, (a, b, a), (a, a, b) y (b, a, a) son ternas diferentes del tipo deseado. Si hacemos que E_i represente la determinación de x_i en la terna (x_1, x_2, x_3), para $i = 1, 2, 3$, entonces, como se permiten repeticiones, hay cuatro posibilidades para cada uno de E_1, E_2 y E_3. Por lo tanto, por el Principio Fundamental del Conteo, el número total de tríadas ordenadas es $4 \cdot 4 \cdot 4$, o sea 64. Similarmente, el número de tétradas posibles (x_1, x_2, x_3, x_4) es $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$. Evidentemente, el número de r-adas es el producto $4 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 4$, en donde el 4 aparece r veces como factor. Este producto es 4^n. ■

EJEMPLO 2 En un salón de clases hay 60 alumnas y 40 alumnos. ¿De cuántas maneras pueden escogerse presidente, vicepresidente, tesorero y secretario si el tesorero debe ser mujer, el secretario debe ser varón y ningún estudiante puede ocupar más de un puesto?

SOLUCIÓN Si un evento está especializado de alguna manera (por ejemplo, el tesorero *debe* ser una alumna), entonces tal evento debe llevarse a cabo antes que cualquiera de los eventos no especializados. Si E_1 representa la selección de tesorero, E_2 la de secretario, y E_3 y E_4 la selección de presidente y vicepresidente respectivamente; como en el Principio Fundamental del Conteo, m_i denota el número de formas diferentes en que puede ocurrir E_i, para $i = 1, 2, 3$ y 4. Se ve entonces que $m_1 = 60$, $m_2 = 40$, $m_3 = 98$ y $m_4 = 97$. De acuerdo con el principio del conteo, el número total de posibilidades es

$$60 \cdot 40 \cdot 98 \cdot 97 = 22\,814\,400.$$ ■

Cuando hablamos de conjuntos, generalmente no nos preocupa el orden o arreglo de los elementos. Sin embargo, en el resto de esta sección, la principal preocupación

será el orden de los elementos. En la siguiente definición, S denota un conjunto de n elementos y r es un entero positivo tal que $r \leq n$.

DEFINICIÓN

> Una **permutación** de r elementos de un conjunto S, es un arreglo, sin repetición, de r elementos de S.

Usaremos el símbolo ${}_nP_r$ para denotar el número de permutaciones diferentes de r elementos que se pueden obtener a partir de un conjunto que contiene n elementos. También es común referirse a una permutación de r elementos de un conjunto de n elementos como **permutación de n elementos tomando r a la vez**. Como caso especial, ${}_nP_n$ denota el número de arreglos de los n elementos de S, esto es, ${}_nP_n$ es el número de maneras en que se pueden ordenar *todos* los elementos de S.

En nuestra primera ilustración, con los cuatro equipos a, b, c, d, teníamos ${}_4P_2 = 12$, ya que hay 12 formas diferentes de arreglas los cuatro equipos en grupos de dos. También se demostró que el número de formas en que se pueden arreglar todos los elementos a, b, c, d es 24. Con la notación presente, esto se escribiría ${}_4P_4 = 24$.

No es difícil encontrar una fórmula general para ${}_nP_r$. Si S denota un conjunto de n elementos, entonces el problema de determinar ${}_nP_r$ es equivalente a la determinación del número de r-adas diferentes $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, donde cada x_i es un elemento de S, y ningún elemento de S aparece dos veces en la misma r-ada. Encontraremos este número por medio del Principio Fundamental del Conteo. Para cada $i = 1, 2, \ldots, r$, E_i representa la determinación del elemento x_i y m_i es el número de formas diferentes de realizar E_i. Deseamos aplicar la sucesión $E_1, E_2, \ldots, E_r$. Hay n selecciones posibles para x_1 y consecuentemente tenemos que $m_1 = n$. Como no se permiten repeticiones, hay $n - 1$ posibilidades para x_2, de modo que $m_2 = n - 1$. Al continuar de esta manera, obtenemos sucesivamente $m_3 = n - 2$, $m_4 = n - 3$, y por último $m_r = n - (r - 1)$, o sea $m_r = n - r + 1$. Por lo tanto, por el Principio Fundamental del Conteo tenemos

$$ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) $$

en donde hay r factores en el lado derecho de la ecuación. Para mayor ilustración, si consideramos los casos especiales $r = 1$, 2, 3 y 4, entonces $n - r + 1$ es igual a n, $n - 1$, $n - 2$ y $n - 3$, respectivamente, y si usamos la fórmula para ${}_nP_r$ obtenemos

$$ {}_nP_1 = n $$
$$ {}_nP_2 = n(n-1) $$
$$ {}_nP_3 = n(n-1)(n-2) $$
$$ {}_nP_4 = n(n-1)(n-2)(n-3). $$

EJEMPLO 3 Determinar (a) ${}_5P_2$; (b) ${}_6P_4$; (c) ${}_5P_5$.

SOLUCIÓN Al usar la fórmula para ${}_nP_r$,

(a) ${}_5P_2 = 5 \cdot 4 = 20$

(b) ${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

(c) ${}_5P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$ ■

EJEMPLO 4 Un equipo de béisbol tiene nueve jugadores. Hallar el número de formas de asignar las cuatro primeras posiciones en el orden de bateo, si se excluye al lanzador.

SOLUCIÓN Se desea determinar el número de permutaciones de 8 objetos tomando 4 cada vez. La fórmula de ${}_nP_r$ con $n = 8$ y $r = 4$ nos da

$${}_8P_4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$$ ■

Si $r = n$ obtenemos el número de diferentes arreglos de *todos* los elementos de S. En este caso, $n - r + 1 = n - n + 1 = 1$ y entonces

$${}_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

En consecuencia, ${}_nP_n$ es el producto de los n primeros enteros positivos. También podemos obtener una expresión para ${}_nP_r$ con notación de factoriales. Si r y n son enteros positivos con $r \leq n$, entonces

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\cdot[(n-r)!]}{(n-r)!}$$

$$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

La comparación con la fórmula para ${}_nP_r$ da

$$\boxed{{}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}.}$$

Ejercicios 10.5

Resuelva los Ejercicios 1 a 14 mediante diagramas de árbol o el Principio Fundamental del Conteo.

1. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 si (a) no se permiten repeticiones, (b) se permiten repeticiones?
2. Repita el Ejercicio 1 para números de cuatro cifras.
3. ¿Cuántos números se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4 si no se permiten repeticiones? (*Nota:* 42 y 231 son ejemplos de tales números).
4. Repita el Ejercicio 3 si se permiten repeticiones.
5. Si en un torneo de baloncesto toman parte ocho equipos; determine el número de formas diferentes en que se pueden decidir los lugares primero, segundo y tercero, si los empates no son posibles.
6. Repita el Ejercicio 5 para doce equipos.
7. Una joven tiene cuatro faldas y seis blusas. ¿Cuántas combinaciones diferentes de falda y blusa puede vestir?
8. Si la joven del Ejercicio 7 también tiene tres sué-

teres, ¿en cuántas formas diferentes puede combinar las tres prendas de vestir?

9. Las placas de automóvil en un cierto lugar empiezan con una letra del alfabeto seguida por cinco números, usando los dígitos 0, 1, 2, ..., 9. Determine cuántas placas diferentes es posible tener si:
   (a) el primer dígito que sigue a la letra no puede ser 0;
   (b) la letra no puede ser *O* o *I*, y el primer dígito no puede ser 0.

10. Se tiran dos dados, uno después de otro. ¿De cuántas formas diferentes pueden caer? Enuncie el número de formas diferentes en que la suma de los puntos puede ser igual a: (a) tres, (b) cinco, (c) siete, (d) nueve, (e) once.

11. Se va a llenar una fila de seis asientos de un salón de clase, mediante la selección de personas de un grupo de diez estudiantes. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ocuparse los asientos? Si hay seis varones y cuatro mujeres en el grupo y se deben alternar los varones y las mujeres, determine el número de arreglos diferentes al sentarse.

12. Un estudiante puede tomar matemáticas a las 8, 10, 11 o 12 horas; literatura a las 9, 1 o 2 e historia a las 8, 11, 2 o 3. Determine el número de formas diferentes en que el estudiante puede arreglar su horario con los tres cursos.

13. De cuántas formas distintas puede contestarse un examen con diez preguntas que deben responderse verdadero o falso?

14. Un examen consta de seis preguntas de opción múltiple y el número de opciones por pregunta es cinco. ¿De cuántas maneras diferentes puede responderse la prueba?

En los Ejercicios 15 a 22 determine el número que se pide.

15. ${}_7P_3$ 16. ${}_8P_5$ 17. ${}_9P_6$

18. ${}_5P_3$ 19. ${}_5P_5$ 20. ${}_4P_4$

21. ${}_6P_1$ 22. ${}_5P_1$

Use permutaciones para resolver los Ejercicios 23 a 30.

23. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse ocho personas en una fila?

24. ¿De cuántas maneras diferentes pueden colocarse diez libros en un anaquel?

25. Un señalero tiene seis banderas. ¿Cuántas señales diferentes puede formar colocando tres banderas, una sobre otra en el asta?

26. ¿De cuántas formas distintas pueden seleccionarse cinco libros de un estante con doce libros diferentes?

27. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 2, 4, 6, 8 y 9 si (a) no se permiten repeticiones, (b) se permiten repeticiones?

28. Existen 24 letras en el alfabeto griego. ¿De cuántas formas se pueden escoger tres letras si: (a) no se permiten repeticiones, (b) se permiten repeticiones?

29. ¿Cuántos números de teléfono de siete dígitos se pueden formar con los números 0, 1, 2, 3, ..., 9 si el primer dígito no debe ser 0?

30. El manejador de un equipo de béisbol selecciona nueve jugadores y arregla el orden de bateo de modo que el lanzador es el último en el turno y el mejor bateador tiene el cuarto turno. ¿De cuántas maneras diferentes puede arreglarse el resto del orden de bateo?

10.6 Permutaciones distinguibles y combinaciones

En ciertos problemas se tienen que encontrar diferentes arreglos de objetos, algunos de los cuales son indistinguibles. Por ejemplo, supongamos que nos dan cinco discos del mismo tamaño y que tres son negros, uno es blanco y uno es rojo. Encontremos el número de maneras en que pueden colocarse en fila de modo que se obtengan diferentes arreglos de colores. Si los discos fueran todos diferentes, el número de arreglos

sería 5! o sea 120. Sin embargo, como algunos de los discos tienen la misma apariencia, no podemos obtener 120 arreglos diferentes. Para clarificar esto expresemos con

N N N B R

los arreglos con discos negros en las tres primeras posiciones de la fila, el blanco en la cuarta posición y el disco rojo en la quinta posición. Los tres primeros discos se pueden ordenar en 3! o sea 6 formas diferentes, pero esos arreglos no se pueden distinguir uno de otro porque los tres primeros discos se ven iguales. Decimos entonces que esas 3! permutaciones son **indistinguibles**. Del mismo modo, dado cualquier otro arreglo, digamos

N R N B N

hay 3! formas diferentes de ordenar los tres discos negros, pero nuevamente cada uno de esos arreglos es indistinguible de los otros. Llamaremos a dos arreglos de los cinco objetos **permutaciones distinguibles** si no se puede obtener un arreglo a partir de otro mediante una reordenación de los objetos iguales. Entonces N N N B R y N R N B N son permutaciones distinguibles. Sea n el número de permutaciones distinguibles. Como a cada uno de tales arreglos corresponden 3! permutaciones indistinguibles, debemos tener $3!n = 5!$, el número de permutaciones de cinco objetos *diferentes*. Por lo tanto $n = 5!/3! = 5 \cdot 4 = 20$. Por el mismo tipo de razonamiento podemos obtener la siguiente extensión del problema anterior:

TEOREMA

Si en un conjunto de n objetos r de ellos son iguales, y si el resto de los objetos son diferentes entre sí y también de los r objetos, entonces el número de permutaciones distinguibles de los n objetos es $n!/r!$.

Este teorema puede generalizarse al caso en que hay varios subconjuntos de objetos indistinguibles. Por ejemplo, si tenemos ocho discos, cuatro de ellos negros, tres blancos y uno rojo. En este caso, con cada arreglo como

N B N B N B N R,

hay 4! arreglos de los discos negros y 3! arreglos de los discos blancos que no afectan el arreglo de colores. Por lo tanto, hay 4!3! arreglos de discos posibles que no producen permutaciones distinguibles. Si n denota el número de permutaciones *distinguibles* de los objetos, entonces se concluye que $4!3!n = 8!$, ya que 8! es el número de permutaciones que obtendríamos si los objetos fueran todos diferentes. Esto nos da

$$n = \frac{8!}{4!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot \frac{4!}{4!} = 280.$$

Se puede demostrar el siguiente resultado general.

TEOREMA DE PERMUTACIONES DISTINGUIBLES

Si se tiene un conjunto de n objetos y n_1 de ellos son de un tipo, n_2 de otro tipo, ..., n_k de un tipo más, y

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k.$$

Entonces el número de permutaciones distinguibles de los n objetos es

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}.$$

EJEMPLO 1 Hallar el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra "MISSISSIPPI".

SOLUCIÓN En este ejemplo se da un conjunto de once objetos de los cuales cuatro son de un tipo (la letra S), cuatro de otro tipo (I), dos de un tercer tipo (P) y uno de un cuarto tipo (M). Por lo tanto, por el teorema anterior, el número de permutaciones distinguibles es

$$\frac{11!}{4!4!2!1!}$$

El lector debe demostrar que esto es igual a 34 650. ■

Cuando trabajamos con permutaciones, nuestra preocupación es con el ordenamiento o arreglo de los elementos. Ignoremos ahora el orden o arreglo de los elementos y considérese la siguiente pregunta: Dado un conjunto de n elementos distintos, ¿de cuántas maneras se puede escoger un subconjunto de r elementos, donde $r \leq n$? Antes de responder, enunciamos una definición.

DEFINICIÓN

Una **combinación** de r elementos de un conjunto S es un subconjunto de S que tiene r elementos distintos.

Usaremos el símbolo ${}_nC_r$ para denotar el número de combinaciones de r elementos que se pueden obtener de un conjunto de n elementos. La frase **una combinación de n elementos tomando r a la vez** se usa comúnmente para describir ${}_nC_r$.

Si S contiene n elementos, entonces para evaluar ${}_nC_r$ debemos encontrar el número total de subconjuntos de la forma

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$$

en donde las x_i son elementos diferentes de S. Como los elementos del subconjunto anterior se pueden arreglar en $r!$ formas diferentes, cada uno de los subconjuntos produce $r!$ r-adas diferentes. Por lo tanto, el número total de r-adas diferentes de $r!({}_nC_r)$. Sin embargo, en la sección anterior encontramos que el número de r-adas es

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Esto implica que

$$r!({}_nC_r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

y por lo tanto

$$\boxed{{}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}.}$$

Nótese que ${}_nC_r$ *es idéntica al coeficiente binomial* $\binom{n}{r}$ definido en la Sección 1.5.

EJEMPLO 2 En la lista de jugadores de un equipo de béisbol hay seis jardineros, siete jugadores de cuadro, cinco lanzadores y dos receptores. ¿De cuántas formas diferentes se puede escoger un equipo de nueve jugadores?

SOLUCIÓN El número de formas de seleccionar tres jardineros de los seis candidatos es

$${}_6C_3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)(3\cdot 2\cdot 1)} = 20.$$

El número de formas de seleccionar los cuatro jugadores de cuadro es

$${}_7C_4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{(7\cdot 6\cdot 5)4!}{4!3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35.$$

Hay cinco formas de escoger un lanzador y dos selecciones para receptor. Del Principio Fundamental del Conteo se concluye que el número total de formas de hacer un equipo es

$$20\cdot 35\cdot 5\cdot 2 = 7000.$$ ∎

Vale la pena notar que si $r = n$, el lado derecho de la fórmula de ${}_nC_r$ será

$${}_nC_n = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{n!}{0!n!} = 1.$$

Además, ${}_nC_n$ es el número de subconjuntos que contienen n elementos que se pueden obtener de un conjunto de n elementos. Esto es también igual a 1. Por lo tanto, la fórmula para ${}_nC_r$ es verdadera para $r = n$.

Es conveniente dar un sentido a ${}_nC_r$, cuando $r = 0$. Si la forma es verdadera en este caso, entonces

$${}_nC_0 = \frac{n!}{n!0!} = 1.$$

Por lo tanto, *definimos* ${}_nC_0 = 1$, que es igual a ${}_nC_n$. Finalmente, por consistencia, también *definimos* ${}_0C_0 = 1$. Entonces ${}_nC_r$ tiene sentido para todos los enteros no negativos n y r, con $r \leq n$.

EJEMPLO 3 Si un conjunto S contiene n elementos, hallar el número de subconjuntos diferentes de S.

SOLUCIÓN Sea r cualquier entero no negativo tal que $r \leq n$. De lo anterior sabemos que el número de subconjuntos de S que contienen r elementos es ${}_nC_r$, o sea, $\binom{n}{r}$. Por lo tanto, para encontrar el número total de subconjuntos hacemos la suma

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Esto es precisamente el desarrollo binomial de $(1 + 1)^n$. Entonces, existen 2^n subconjuntos de un conjunto de n elementos. En particular, un conjunto de 3 elementos tiene 2^3 o sea 8 subconjuntos diferentes. Un conjunto de 4 elementos tiene 2^4 o sea 16 subconjuntos. Un conjunto de 10 elementos tiene 2^{10}, o sea 1 024 subconjuntos. ■

Ejercicios 10.6

En los Ejercicios 1 a 8 encuentre el número que se pide.

1. ${}_7C_3$
2. ${}_8C_4$
3. ${}_9C_8$
4. ${}_6C_2$
5. ${}_nC_{n-1}$
6. ${}_nC_1$
7. ${}_7C_0$
8. ${}_5C_5$

9. Si se arreglan en fila cinco discos negros, tres rojos, dos blancos y dos verdes, encuentre el número de arreglos de discos de color posibles.

10. Resuelva el Ejercicio 9 si hay tres discos negros, tres rojos, tres blancos y tres verdes.

11. Realice la determinación del número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra "BOOKKEEPER".

12. Encuentre el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra "MOON". Liste todas las permutaciones.

13. Diez muchachos desean jugar un partido de baloncesto. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden hacer dos equipos de cinco jugadores cada uno?

14. A un estudiante se le da la opción de responder a sólo seis de las diez preguntas de un examen. ¿De cuántas maneras puede hacer una selección? ¿Cuántas posibilidades hay si debe contestar las dos primeras preguntas?

15. ¿Cuántas líneas rectas están determinadas por ocho puntos, si no hay tres de ellos que sean colineales? ¿Cuántos triángulos quedan determinados?

16. Un comité de cinco personas va a ser constituido en un grupo de doce hombres y ocho mujeres. Si el comité debe incluir tres hombres y dos mujeres, determine el número de maneras de seleccionar el comité.

17. Un estudiante tiene cinco libros de matemáticas, cuatro de historia y ocho de literatura. ¿De cuántas maneras puede arreglarlos en un estante si los de la misma materia deben estar juntos?

18. La lista de jugadores de un equipo de basquetbol contiene doce personas. Sin considerar posiciones, ¿de cuántas maneras puede escogerse un equipo de cinco? Si el centro del equipo sólo puede ser ocupado por dos jugadores específicos de la lista y los otros cuatro miembros del equipo pueden ser cualesquiera de los diez jugadores restantes, encuentre el número posible de equipos diferentes.

19. La lista de jugadores de un equipo de fútbol americano incluye tres centros, diez hombres de línea que pueden jugar como *guards* o *tackles*, tres *quarterbacks*, seis *half-backs*, cuatro extremos o alas y cuatro *fullbacks*. ¿De cuántas maneras pue-

de escogerse un equipo que incluya un centro, dos guardias, dos apoyadores, dos alas, dos medios, un mariscal de campo y un corredor?

20. ¿De cuántas formas diferentes pueden disponerse siete llaves en un llavero, si las llaves pueden deslizarse completamente alrededor del llavero?

10.7 Probabilidad

Si se tiran dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que salga 7? Si una persona recibe cinco cartas de una baraja de tipo francés de 52 naipes, ¿cuán factible es que reciba tres ases? Preguntas como éstas, acerca de juegos de azar, llevaron, en el siglo XVII, al estudio de lo que actualmente se conoce como *probabilidad*. A partir de esa época, la teoría de la probabilidad ha crecido y se ha ampliado mucho. Actualmente se usa para predecir lo que pasará en una gran variedad de situaciones que se presentan en las ciencias naturales y sociales.

Cualquier proceso de azar, como tirar al aire una moneda, tirar un dado, repartir cartas de una baraja, determinar si un objeto manufacturado está defectuoso o no, o determinar la presión sanguínea de una persona, se llamará un **experimento**. Al resultado de un experimento se le llama **resultado**. La presente discusión se centrará en los experimentos cuyos resultados son **igualmente** probables. Esto significa, por ejemplo, que cuando se lanza una moneda, se supone que la posibilidad de que salga cara es la misma que la de que salga cruz. De la misma manera, si se tira un dado se supone que el mismo es regular o *no cargado*, en el sentido de que se tiene la misma posibilidad de que salga un 1, 2, 3, 4, 5 o 6. El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento se conoce como el **espacio muestra** del experimento. Así, si el experimento consiste en lanzar una moneda y si H o T representan el resultado de obtener una cara (o anverso) o una cruz (o reverso), respectivamente, entonces el espacio muestra S se puede representar mediante

$$S = \{H, T\}.$$

Si se tira un dado regular, entonces el conjunto S de todos los posibles resultados (el espacio muestra) es

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

La siguiente definición expresa, en términos matemáticos, la noción de obtener resultados *particulares* de un experimento:

DEFINICIÓN

Sea S el espacio muestra de un experimento. Cualquier subconjunto E de S se conoce como un **evento** asociado al experimento.

Considérese el experimento de tirar un dado, de modo que el espacio muestra es $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si $E = \{4\}$, entonces el evento E asociado al experimento con-

siste en que resulte un 4 de la tirada. Al mismo experimento se le pueden asociar diferentes eventos. Por ejemplo, si se toma $E = \{1, 3, 5\}$, entonces este evento consiste en la obtención de un número impar en una tirada del dado.

A manera de otra ilustración, supóngase el experimento que consiste en lanzar dos monedas, una después de la otra. Si representamos por HH el resultado de dos caras, HT una cara en la primera moneda y una cruz en la segunda, y así sucesivamente, el espacio muestra S del experimento puede representarse por

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

Si se toma $E = \{HT, TH\}$

entonces el evento E consiste en una cara en una de las monedas y una cruz en la otra.

En seguida definiremos lo que quiere decir la *probabilidad* de un evento. En toda la discusión se supone que el espacio muestra S de un experimento contiene únicamente un número finito de elementos. Si e es un evento, los símbolos $n(E)$ y $n(S)$ denotarán al número de elementos en E y en S, respectivamente.

DEFINICIÓN

Sea S el espacio muestra de un experimento y E un evento. La **probabilidad** de E está dada por

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}.$$

Puesto que E es un subconjunto de S, se sigue que $0 \leq n(E) \leq n(S)$ y por lo tanto

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

Nótese que $P(E) = 1$ si $E = S$, mientras que $P(E) = 0$ si E no contiene elementos.

El siguiente ejemplo muestra varias aplicaciones de la definición anterior para el caso en el que E contiene exactamente un elemento.

EJEMPLO 1

(a) Si se lanza una moneda (se tira un volado), encontrar la probabilidad de que caiga cara.

(b) Si se tira un dado regular, encontrar la probabilidad de obtener un 4.

(c) Si se lanzan dos monedas, obtener la probabilidad de que salgan dos caras.

SOLUCIÓN Para cada experimento se indicarán los conjuntos S y E, y después se usará la definición para encontrar $P(E)$:

(a) $S = \{H, T\}$, $E = \{H\}$, $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{2}$

(b) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad E = \{4\}, \quad P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{6}$

(c) $S = \{HH, HT, TH, TT\}, \quad E = \{HH\}, \quad P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{4}$ ■

En la parte (a) del Ejemplo 1 se encontró que es $\frac{1}{2}$ la probabilidad de que caiga cara en el volado o tirada de una moneda. Esto significa que si se vuela una moneda muchas veces, el número de caras que aparecerán será aproximadamente la mitad del número total de volados. Así, para 100 tiradas debería caer cara aproximadamente 50 veces. Por supuesto, no es improbable que este número sea *exactamente* 50. Una probabilidad de $\frac{1}{2}$ implica que si se aumenta el número de tiradas, entonces el número de caras se *acercará a* $\frac{1}{2}$ del número total de volados. Los mismos comentarios se pueden hacer acerca de las partes (b) y (c) del Ejemplo 1.

En los dos ejemplos que siguen se consideran experimentos en los cuales un evento contiene más de un elemento.

EJEMPLO 2 Si se tiran dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que la tirada sume (a) 7, (b) 9?

SOLUCIÓN

(a) Podemos referirnos a un dado como "el primer dado", y al otro, como "el segundo dado". Se utilizarán parejas ordenadas para representar los resultados como sigue: (2, 4) denota el resultado en el que se obtiene 2 en el primer dado y 4 en el segundo; (5, 3) representa un 5 con el primer dado y un 3 con el segundo, y así sucesivamente. Puesto que hay seis diferentes posibilidades para el primer número de la pareja ordenada, y con cada una de éstas, seis posibilidades para el segundo número, el número total de parejas ordenadas es 36. Por lo tanto, si S es el espacio muestra, entonces $n(S) = 36$. El evento E correspondiente a que caiga una suma de 7 está dado por

$$E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

y en consecuencia

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

(b) Si E es el evento correspondiente a caer una suma de 9 entonces

$$E = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$$

y

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$ ■

En el siguiente ejemplo (y en los ejercicios), cuando se exprese que se sacan varias cartas de una baraja, querrá decir que cada naipe se saca del mazo y que *no* se repone o regresa antes de sacar la siguiente carta.

EJEMPLO 3 Suponga que se sacan cinco cartas de una baraja estándar de 52 cartas. Encuentre la probabilidad de que las cinco sean corazones.

SOLUCIÓN El espacio muestra S del experimento es el conjunto de todas las manos de cinco cartas que pueden formarse a partir de los 52 naipes de una baraja francesa. De la Sección 10.6 se sigue que $n(S) = {}_{52}C_5$.

Puesto que hay 13 cartas del palo de corazones, el número de maneras diferentes de obtener una mano que contenga cinco cartas de corazones es ${}_{13}C_5$. Por lo tanto, si E representa este evento, entonces

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{{}_{13}C_5}{{}_{52}C_5}$$

$$= \frac{13!}{5!8!} \div \frac{52!}{5!47!} = \frac{13!47!}{8!52!}.$$

Se deja al lector verificar que

$$P(E) = \frac{1287}{2{,}598{,}960} \approx 0.0005$$

o bien

$$P(E) \approx \frac{5}{10{,}000} \approx \frac{1}{2000}.$$

Esto implica que si el experimento se lleva a cabo muchas veces, entonces se obtendrá una mano de cinco naipes de corazones aproximadamente una de cada 2000 veces. ■

Supóngase que S es el espacio muestra de un experimento, y que E_1 y E_2 son dos eventos asociados al experimento. Considérese además que E_1 y E_2 no tienen elementos en común, es decir, que E_1 y E_2 son conjuntos *ajenos* o *disjuntos*. Si $E = E_1 \cup E_2$, entonces

$$n(E) = n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2)$$

y por lo tanto,

$$P(E) = \frac{n(E_1) + n(E_2)}{n(S)} = \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)},$$

es decir,

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2).$$

Entonces, la probabilidad de E es la suma de las probabilidades E_1 y E_2.

El siguiente teorema establece que este resultado se puede extender a cualquier número de eventos $E_1, E_2, \ldots, E_k$ que sean ***mutuamente excluyentes***, en el sentido de que si $i \neq j$, entonces E_i y E_j no tienen elementos en común.

TEOREMA

Sean $E_1, E_2, \ldots, E_k$ eventos mutuamente excluyentes asociados con el mismo experimento. Si

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k,$$

entonces $P(E) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_k)$.

El teorema se puede demostrar por inducción matemática.

EJEMPLO 4 Si se tiran dos dados, hallar la probabilidad de que una tirada sume 7 o 9.

SOLUCIÓN Sea E_1 el evento de tirar un 7, y E_2 el evento de tirar 9. Se desea encontrar la probabilidad del evento $E = E_1 \cup E_2$. Del Ejemplo 3, $P(E_1) = \frac{1}{6}$ y $P(E_2) = \frac{1}{9}$. Por lo tanto, por el teorema anterior,

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{3+2}{18} = \frac{5}{18}.$$

■

Los resultados de esta sección dan solamente una introducción a la teoría de la probabilidad. Existen muchos otros tipos de problemas que pueden ser considerados. Por ejemplo, dados dos eventos E_1 y E_2 no se ha discutido cómo encontrar $P(E_1 \cup E_2)$ si E_1 y E_2 tienen elementos en común, o cómo encontrar $P(E_2)$ *después de que* haya ocurrido E_1. Tales problemas se dejan para un estudio independiente o para cursos futuros.

Ejercicios 10.7

1. Se saca una sola carta de una baraja francesa de 52 naipes. Encuentre la probabilidad de que la carta sea (a) un rey, (b) un rey o una reina, (c) un rey, una reina o una sota (*jack*).
2. Se saca una carta de una baraja de 52 naipes. Encuentre la probabilidad de que la carta sea (a) una de corazones, (b) una de corazones o una de diamantes, (c) una de corazones, una de diamantes o una de tréboles.
3. Si se tira un solo dado, halle la probabilidad de obtener (a) un 4, (b) un 6, (c) un 4 o un 6.
4. Una urna contiene cinco bolas rojas, seis verdes y cuatro blancas. Si se saca solamente una bola, halle la probabilidad de que sea (a) roja, (b) verde, (c) roja o verde.
5. Si se tiran dos dados, determine la probabilidad de que el tiro sume (a) 11, (b) 8, (c) 11 u 8.
6. Si se tiran dos dados, determine la probabilidad de que la suma de los puntos sea mayor que 5.
7. Si se tiran tres dados, calcule la probabilidad de que la suma de los puntos sea 5.
8. Si se tiran tres dados, calcule la probabilidad de que salga un 6 exactamente en un dado.
9. Si se vuelan tres monedas, encuentre la probabilidad de que salgan exactamente dos caras.
10. Si se vuelan cuatro monedas, encuentre la probabilidad de obtener dos caras y dos cruces.

En los Ejercicios 11 a 16 supóngase que se sacan cinco cartas de una baraja de 52 naipes. Encuentre la probabilidad de obtener las cartas que se indican.

11. Cuatro de un mismo tipo (como cuatro ases o cuatro reyes).
12. Tres ases y dos reyes.
13. Cuatro de diamantes y una de espadas.
14. Cinco cartas de casa (rey, reina o sota).
15. Una "flor" (cinco cartas del mismo palo).
16. Una "flor imperial" (as, rey, reina, sota y el diez del mismo palo).
17. Una prueba en la que se debe responder verdadero o falso contiene ocho preguntas. Si un estudiante adivina la respuesta de cada pregunta, encuentre la probabilidad de que:
    (a) 8 respuestas sean correctas,
    (b) 7 respuestas sean correctas y 1 incorrecta,
    (c) 6 respuestas sean correctas y 2 incorrectas,
    (d) al menos 6 respuestas sean correctas.
18. Se elegirá un comité de seis miembros sacando de un sombrero papeletas con los nombres de las personas. Si el sombrero contiene los nombres

de ocho varones y catorce mujeres, encuentre la probabilidad de que el comité consista de tres varones y tres mujeres.

19. (a) Si S es el espacio muestra de un experimento y E es un evento, denótese por E' los elementos de S que no están en E. Demuestre que $P(E') = 1 - P(E)$.
    (b) Si se sacan cinco cartas de una baraja de 52 naipes, utilice (a) para hallar la probabilidad de obtener por lo menos un as.

20. Si se sacan cinco cartas de una baraja de 52 naipes, use la parte (a) del Ejercicio 19 para encontrar la probabilidad de obtener al menos una de corazones.

21. En el juego de dados llamado *craps*, el tirador echa dos dados y gana en la primera tirada si obtiene una suma de 7 o de 11. El tirador pierde automáticamente si el primer tiro resulta en una suma de 2, 3 o 12. Encuentre la probabilidad de (a) ganar en la primera tirada; (b) perder en el primer tiro.

22. Una máquina tragamonedas contiene tres carretes y cada uno de ellos tiene 20 símbolos. Si el primer carrete tiene cinco campanas, el de enmedio, cuatro campanas, y el último, dos campanas, encuentre la probabilidad de obtener tres campanas en fila.

23. Suponiendo que los nacimientos de niño o niña son equiprobables, encuentre la probabilidad de que una familia con cinco niños tenga (a) solamente niños, (b) al menos una niña. (Véase el Ejercicio 19(b).)

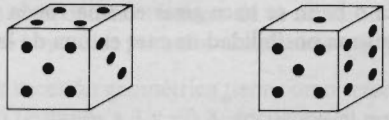
24. Se colocan tres cartas dentro de un sombrero. Una carta es roja por ambos lados, la segunda es negra en ambos lados y la última es roja en un lado y negra en el otro. Se saca una carta del sombrero y se coloca sobre una mesa. Si la carta muestra el lado rojo, ¿cuál es la probabilidad de que el otro lado sea también rojo?

25. En un experimento sencillo diseñado para una prueba de percepción extrasensorial (PES), se barajan cuatro cartas (sota, reina, rey y as) y se colocan boca abajo sobre una mesa. El sujeto intenta identificar cada una de las cuatro cartas, dando un nombre diferente a cada carta. Si el individuo está adivinando, encuentre la probabilidad de identificar correctamente (a) las cuatro cartas, (b) exactamente dos de las cuatro cartas.

26. Si se tiran tres dados, ¿cuál es la probabilidad de que
    (a) todos los dados muestren el mismo número?
    (b) los números en los dados sean todos diferentes?
    (c) Responda (a) y (b) para el caso de n dados.

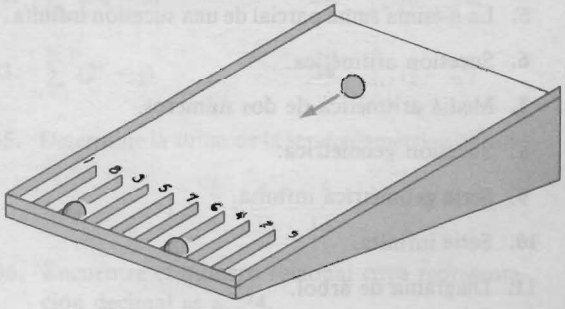
27. Cuando se mira un dado en un cierto ángulo, sólo tres de sus seis caras son visibles. Este hecho se ha utilizado para construir los dados de truco conocidos como "topes y fondos". En la figura se muestran dos de esos dados. En cada par de caras opuestas hay el mismo número de puntos. Encuentre la probabilidad de (a) tirar una suma de 7, (b) tirar una suma de 8.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 27



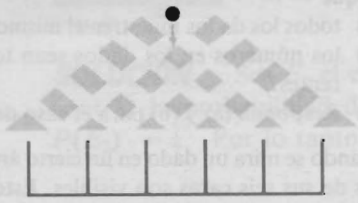
28. En un juego común de feria se hacen rodar tres bolas por un plano inclinado hacia casillas o ranuras numeradas del 1 al 9 (véase la figura 7). Los jugadores no tienen control sobre dónde caerán las bolas debido a que las ranuras son muy estrechas. Si la suma de los números resultantes es menor que 7, se obtiene el mayor premio. Encuentre la probabilidad de este evento.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 28



29. En la figura se indica una pequeña versión de un aparato de demostración de la probabilidad. Se deja caer una bolilla desde la parte superior del laberinto y se tambalea hacia el fondo. Cada vez que la bola pega a un obstáculo, hay un 50% de probabilidad de que la misma se mueva a la iz-

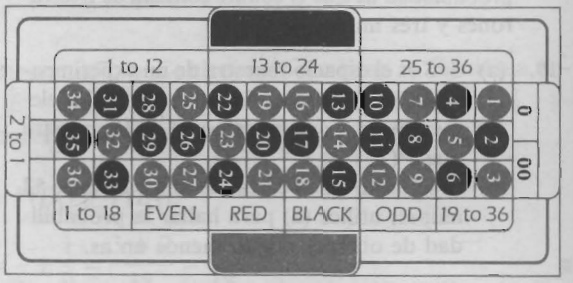
FIGURA PARA EL EJERCICIO 29



quierda. Encuentre la probabilidad de que la bola termine en la casilla (a) del extremo izquierdo, (b) en la del centro.

30. En la versión norteamericana de la ruleta, la bola o balín se hace girar en una rueda y tiene la misma posibilidad de caer en una de las 38 casillas numeradas 0, 00, 1, 2, . . . , 36. En la figura se muestra la disposición para las apuestas en la ruleta. Encuentre la probabilidad de que la bola quede (a) en una casilla negra, (b) dos veces sucesivamente en una casilla negra.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 30



10.8 Repaso

Defina o explique cada uno de los conceptos siguientes:

1. Axioma de la Inducción Matemática.
2. Principio de la Inducción Matemática.
3. Sucesión infinita.
4. Notación de sumatoria.
5. La n-ésima suma parcial de una sucesión infinita.
6. Sucesión aritmética.
7. Media aritmética de dos números.
8. Sucesión geométrica.
9. Serie geométrica infinita.
10. Serie infinita.
11. Diagrama de árbol.
12. Principio Fundamental del Conteo.
13. r-ada ordenada.
14. Permutación.
15. ${}_nP_r$.
16. Permutaciones indistinguibles.
17. Permutaciones distinguibles.
18. Combinación.
19. ${}_nC_r$.
20. Espacio muestra.
21. Evento.
22. Probabilidad de un evento.

Ejercicios 10.8

Demuestre que los enunciados de los Ejercicios 1 a 5 son verdaderos para todo entero positivo n.

1. $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1) = \dfrac{n(3n + 1)}{2}$

2. $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = \dfrac{2n(2n+1)(n+1)}{3}$

3. $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

4. $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

5. 3 es un factor de $n^3 + 2n$.

6. Demuestre que $2^n > n^2$ para todo entero positivo $n \geq 5$.

En los Ejercicios 7 a 10 encuentre los cuatro primeros términos y el séptimo término de la sucesión cuyo n-ésimo término se da.

7. $a_n = \dfrac{5n}{3 - 2n^2}$ **8.** $a_n = (-1)^{n+1} - (0.1)^n$

9. $a_n = 1 + (-\frac{1}{2})^{n-1}$

10. $a_n = \dfrac{2^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

Encuentre los cinco primeros términos de la sucesión infinita que se define en los Ejercicios 11 a 14 en forma recursiva.

11. $a_1 = 10,\ a_{k+1} = 1 + (1/a_k)$

12. $a_1 = 2,\ a_{k+1} = a_k!$

13. $a_1 = 9,\ a_{k+1} = \sqrt{a_k}$

14. $a_1 = 1,\ a_{k+1} = (1 + a_k)^{-1}$

Halle los números representados por las sumas en los Ejercicios 15 a 18.

15. $\sum_{k=1}^{5} (k^2 + 4)$ **16.** $\sum_{k=2}^{6} \dfrac{2k-8}{k-1}$

17. $\sum_{k=1}^{100} 10$ **18.** $\sum_{k=1}^{4} (2^k - 10)$

En los Ejercicios 19 a 22 use notación de sumatoria para representar las sumas.

19. $3 + 6 + 9 + 12 + 15$

20. $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$

21. $100 - 95 + 90 - 85 + 80$

22. $a_0 + a_4x^4 + a_8x^8 + \cdots + a_{100}x^{100}$

23. Halle el décimo término y la suma de los diez primeros términos de la sucesión aritmética cuyos dos primeros términos son $4 + \sqrt{3}$ y 3.

24. Encuentre la suma de los ocho primeros términos de una sucesión aritmética en la que el cuarto término es 9 y la diferencia común es -5.

25. Los términos quinto y el decimotercero de una sucesión aritmética son 5 y 77, respectivamente. Encuentre el primer término y el décimo término.

26. Inserte cuatro medias aritméticas entre 20 y -10.

27. Obtenga el décimo término de la sucesión geométrica cuyos dos primeros términos son $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{4}$.

28. Si una sucesión geométrica tiene como tercero y cuarto términos a 3 y -0.3, encuentre el octavo término.

29. Encuentre un número positivo c tal que 4, c, 8 son términos sucesivos de una sucesión geométrica.

30. En una sucesión geométrica el octavo término es 100 y la razón común es $-\frac{3}{2}$. Halle el primer término.

Calcule las sumas de los Ejercicios 31 a 34.

31. $\sum_{k=1}^{15} (5k - 2)$ **32.** $\sum_{k=1}^{10} (6 - \frac{1}{2}k)$

33. $\sum_{k=1}^{10} (2^k - \frac{1}{2})$ **34.** $\sum_{k=1}^{8} (\frac{1}{2} - 2^k)$

35. Determine la suma de la serie geométrica infinita

$$1 - \frac{2}{5} + \frac{4}{25} - \frac{8}{125} + \cdots$$

36. Encuentre el número racional cuya representación decimal es $0.\overline{774}$.

37. Unos maderos de 2 × 2 pulgadas de diez pies de longitud, se deben cortar en cinco trozos para hacer bloques de construcción para niños. Las longitudes de los cinco bloques deben formar una sucesión aritmética.

(a) Demuestre que la diferencia d de las longitudes debe ser menor que 1 pie.

(b) Si el bloque más pequeño debe tener 6 pulg de longitud, encuentre las longitudes de las otras cuatro piezas.

38. Cuando se deja caer una pelota desde una altura de h pies le toma $\sqrt{h}/4$ segundos llegar hasta el suelo. Después la pelota tarda $\sqrt{d}/4$ segundos en rebotar a una altura de d pies. Si se deja caer una pelota de goma desde una altura de 10 pie y rebota a tres cuartos de la altura después de cada caída, ¿cuántos segundos pasarán hasta que la pelota se detenga?

39. Cada uno de dos niños tira al aire una moneda. Encuentre la probabilidad de que caiga lo mismo en ambas monedas. Si cada uno de tres niños vuela una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que en todas las monedas salga lo mismo?

40. Si se toman cuatro cartas de una baraja de 52 naipes, halle la probabilidad de que (a) las cuatro cartas sean del mismo color; (b) las cartas se alternen en el orden rojo-negro-rojo-negro?

41. ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse trece cartas de una baraja de 52? ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse trece cartas si se desea obtener cinco de espadas, tres de corazones, tres de tréboles y dos de diamantes?

42. ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 si (a) no se permiten repeticiones?; (b) se permiten repeticiones?

43. Si un estudiante debe responder ocho de doce preguntas en un examen, ¿de cuántas maneras puede hacer su selección? ¿Cuántas selecciones son posibles si debe responder las tres primeras preguntas?

44. Si se ordenan en fila seis discos negros, cinco rojos, cuatro blancos y dos verdes, encuentre el número de arreglos de color posibles.

45. Si se venden 1000 boletos para una rifa, encuentre la probabilidad de ganar si un individuo compra (a) un boleto, (b) 10 boletos, (c) 50 boletos.

46. Si se lanzan al aire cuatro monedas, encuentre la probabilidad de obtener una cara y tres cruces.

47. Una prueba consta de seis preguntas que deben responderse falso o verdadero. Para pasar de grado se requieren al menos cuatro respuestas correctas. Si un estudiante adivina cada respuesta, ¿cuál es la probabilidad de que (a) sea aprobado, (b) sea reprobado?

48. Si se tira un solo dado y después se saca una carta de una baraja de 52 naipes, ¿cuál es la probabilidad de obtener

(a) un 6 en el dado y el rey de corazones?

(b) *uno u otro* de los siguientes dos resultados: un 6 en el dado o el rey de corazones?

CAPÍTULO 11

Temas de geometría analítica

La geometría plana incluye el estudio de figuras tales como rectas, círculos y triángulos que están en un plano. ■ Los teoremas son demostrados por medio de razonamientos deductivos a partir de ciertos postulados. ■ En la ***geometría analítica****, se estudian las figuras geométricas planas introduciendo un sistema coordenado y usando ecuaciones y fórmulas de varios tipos. ■ Si el estudio de la geometría analítica se pudiera resumir en una sola frase quizá la siguiente sería la apropiada: "Dada una ecuación, hallar su gráfica, y recíprocamente, dada una gráfica, hallar su ecuación". ■ En este capítulo aplicaremos métodos analíticos a varias figuras planas importantes.*

11.1 Rectas

Se presentarán en primer lugar algunos conceptos fundamentales en relación con las líneas rectas. Todas las rectas mencionadas se consideran en el plano coordenado.

DEFINICIÓN

Si l es una recta no paralela al eje y, y si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son puntos diferentes en l, entonces la **pendiente** (o **inclinación**) m de l está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Si l es paralela al eje y, entonces la pendiente no está definida.

Al numerador $y_2 - y_1$ en la fórmula para m, en ocasiones se le llama **desnivel** de P_1 a P_2. Mide el cambio vertical de dirección al avanzar de P_1 a P_2, y puede ser positivo, negativo o cero. El denominador $x_2 - x_1$ se llama **corrimiento** de P_1 a P_2. Mide el cambio de dirección horizontal al recorrer de P_1 a P_2. El corrimiento puede ser positivo o negativo, pero nunca cero, porque l no es paralela al eje y. Usando esta terminología,

$$\text{pendiente de } l = \frac{\text{desnivel de } P_1 \text{ a } P_2}{\text{corrimiento de } P_1 \text{ a } P_2}.$$

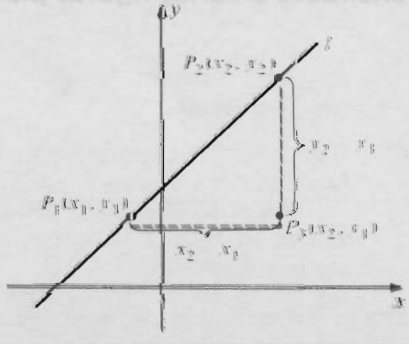
Cuando se determina la pendiente o inclinación de una recta l es irrelevante cual punto se denominará P_1, y cual, P_2, pues

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

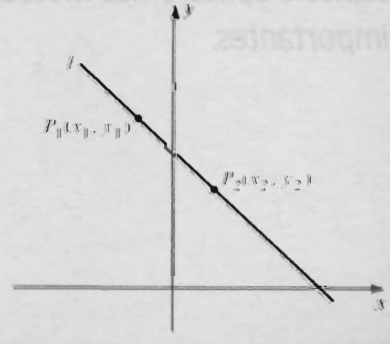
En consecuencia, puede suponerse que los puntos se denominan de modo que $x_1 < x_2$, como se ve en la Figura 11.1. En este caso, $x_2 - x_1 > 0$, y por consiguiente, la pen-

FIGURA 11.1

(i) Pendiente positiva



(ii) Pendiente negativa



diente es positiva, negativa o cero, dependiendo de si $y_2 > y_1$, $y_2 < y_1$ o bien $y_2 = y_1$. La pendiente de la recta mostrada en (i) de la Figura 11.1 es positiva, en tanto que es negativa la pendiente de la recta mostrada en (ii) de la citada figura.

Una **recta horizontal** es una recta paralela al eje x. Obsérvese que la recta es horizontal si y sólo si su inclinación vale 0. Una **recta vertical** es una recta paralela al eje y. La inclinación de una recta vertical es indefinida.

EJEMPLO 1 Trazar las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos y determinar sus pendientes.

(a) $A(-1, 4)$ y $B(3, 2)$ (b) $A(2, 5)$ y $B(-2, -1)$

(c) $A(4, 3)$ y $B(-2, 3)$ (d) $A(4, -1)$ y $B(4, 4)$

SOLUCIÓN Las rectas se presentan en la Figura 11.2. Usando la definición de pendiente tenemos

(a) $$m = \frac{2-4}{3-(-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

(b) $$m = \frac{5-(-1)}{2-(-2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

(c) $$m = \frac{3-3}{-2-4} = \frac{0}{-6} = 0$$

(d) La pendiente es indefinida porque la recta es vertical. Esto también se puede ver observando que si se usa la fórmula para m, el denominador es cero.

FIGURA 11.2

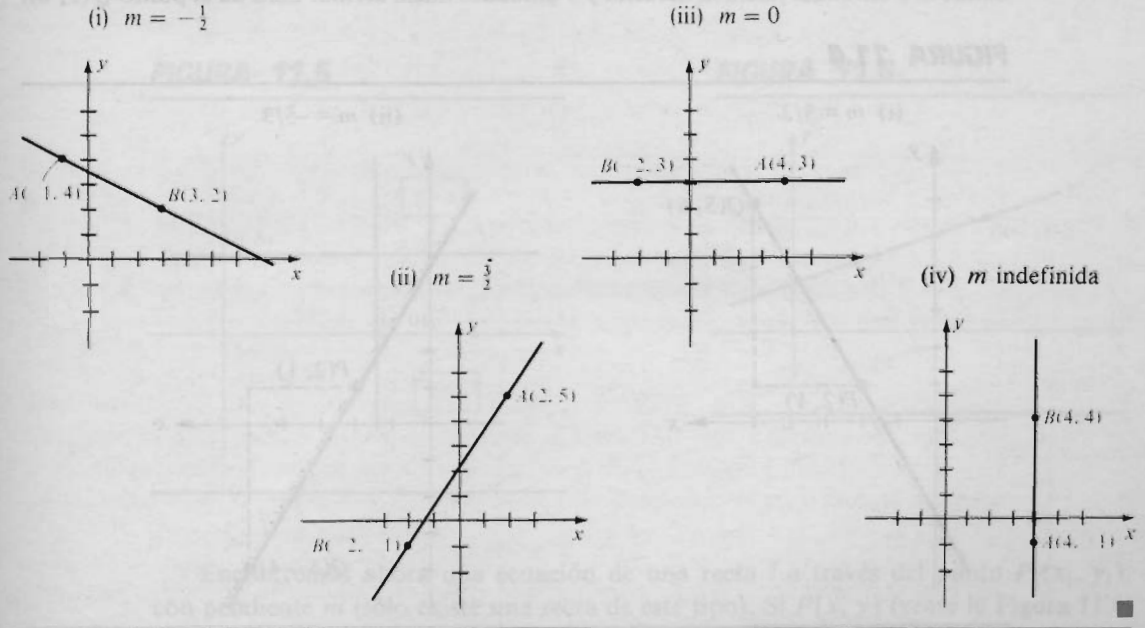
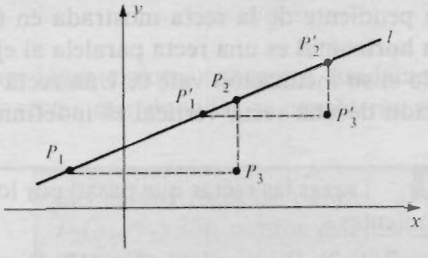


FIGURA 11.3



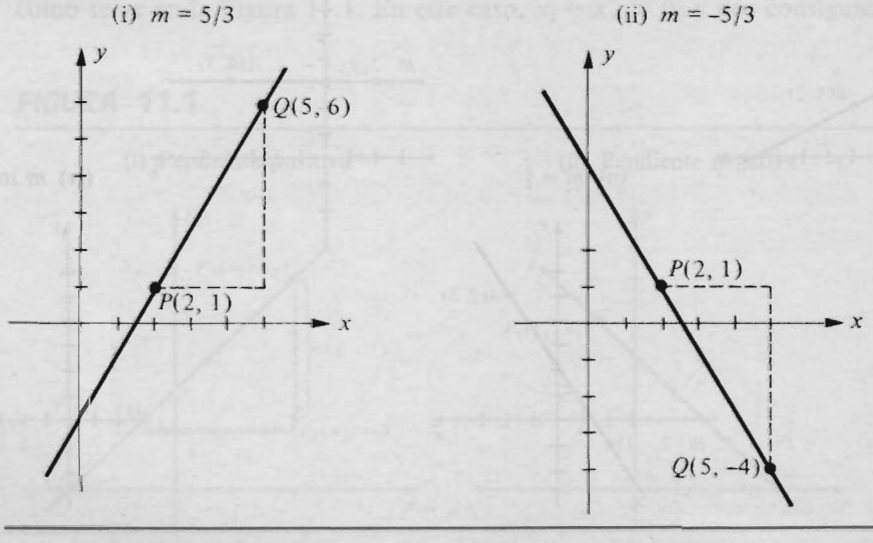
Es importante advertir que la definición de pendiente no depende de los dos puntos que se eligen en l, pues si se usan otros puntos $P_1'(x_1', y_1')$ y $P_2'(x_2', y_2')$, entonces, como se ve en la Figura 11.3, el triángulo con vértices P_1', P_2' y $P_3'(x_2', y_1')$ es semejante al triángulo cuyos vértices son P_1, P_2, $P_3(x_2, y_1)$. Como las razones de los lados correspondientes son iguales,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}.$$

EJEMPLO 2 Trazar una recta a traves de $P(2, 1)$ y cuya pendiente sea (a) $\frac{5}{3}$; (b) $-\frac{5}{3}$

SOLUCIÓN Si la pendiente de una recta es a/b, en donde b es positivo, para cualquier cambio de b unidades en la dirección horizontal, la recta sube o baja $|a|$ unidades, dependiendo de si a es positivo o negativo, respectivamente. Si $P(2, 1)$ está sobre la recta y $m = \frac{5}{3}$, podemos obtener otro punto en la recta partiendo de P y desplazándose 3 unidades hacia la derecha y 5 unidades hacia arriba. Esto da el punto $Q(5, 6)$,

FIGURA 11.4



y la recta está así determinada (véase (i) de la Figura 11.4). De manera similar, si $m = -\frac{5}{3}$, se desplaza 3 unidades hacia la derecha y 5 unidades hacia abajo, obteniendo entonces $Q = (5, -4)$, como se ve en (ii) de la misma Figura 11.4. ■

TEOREMA

(i) La gráfica de la ecuación $x = a$ es una recta vertical con intercepción x igual a a.

(ii) La gráfica de la ecuación $y = b$ es una recta horizontal con intercepción y igual a b.

DEMOSTRACIÓN La ecuación $x = a$, en donde a es un número real, puede ser considerada como una ecuación en dos variables x y y, ya que se puede escribir en la forma

$$x + (0)y = a.$$

Algunas soluciones típicas de la ecuación son $(a, -2)$, $(a, 1)$ y $(a, 3)$. Evidentemente, todas las ecuaciones consisten en pares de la forma (a, y), en donde y puede tener cualquier valor y a es fijo. Se deduce que la gráfica de $x = a$ es una recta paralela al eje y, con intercepción x (abscisa en el origen) igual a a, como se ilustra en la Figura 11.5. Esto demuestra (i). Se puede usar un razonamiento similar para demostrar que la gráfica de $y = b$ es una recta paralela al eje x, cuya intercepción y (ordenada en el origen) es igual a b, como se muestra en la Figura 11.5. ■

FIGURA 11.5

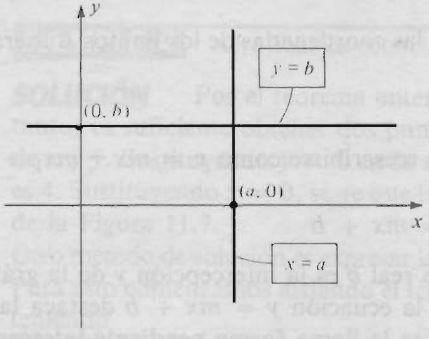
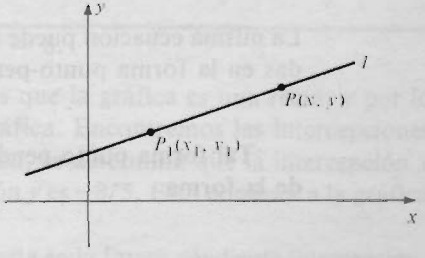


FIGURA 11.6



Encontremos ahora una ecuación de una recta l a través del punto $P_1(x_1, y_1)$, con pendiente m (sólo existe una recta de este tipo). Si $P(x, y)$ (véase la Figura 11.6)

es cualquier punto donde $x \neq x_1$, entonces P está sobre l si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P_2 es m; esto es, si y sólo si

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Esta ecuación puede ser escrita en la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Obsérvese que (x_1, y_1) es también una solución de la última ecuación; por consiguiente, los puntos sobre l son precisamente los puntos que corresponden a las soluciones. Esta ecuación para l se denomina la **forma punto-pendiente**. La discusión puede resumirse como sigue

FORMA PUNTO-PENDIENTE PARA LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Una ecuación para la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ con pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

EJEMPLO 3 Hallar una ecuación para la recta que pasa por los puntos $A(1, 7)$ y $B(-3, 2)$.

SOLUCIÓN La pendiente m de la recta es

$$m = \frac{7 - 2}{1 - (-3)} = \frac{5}{4}.$$

Usando las coordenadas de A en la forma punto-pendiente, obtenemos

$$y - 7 = \frac{5}{4}(x - 1)$$

lo cual es equivalente a

$$4y - 28 = 5x - 5 \quad \text{o bien} \quad 5x - 4y + 23 = 0.$$

La misma ecuación puede obtenerse si las coordenadas de los puntos B fueran sustituidas en la forma punto-pendiente. ■

Tal forma punto-pendiente puede reescribirse como $y = mx - mx_1 + y_1$, que es de la forma

$$y = mx + b$$

en donde $b = -mx_1 + y_1$. El número real b es la intercepción y de la gráfica, como se puede ver haciendo $x = 0$. Como la ecuación $y = mx + b$ destaca la pendiente m y la intercepción y, o sea, b, de l, se la llama **forma pendiente-intercepción** de la ecuación de una recta. Por lo contrario, si se parte de $y = mx + b$, podemos escribir

$$y - b = m(x - 0).$$

Comparando con la forma punto-pendiente es posible ver que la gráfica es una recta con pendiente m y pasa por el punto $(0, b)$. Esto da el siguiente resultado

FORMA PENDIENTE-INTERCEPCIÓN PARA LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

La gráfica de la ecuación $y = mx + b$ es una recta que tiene pendiente m e intercepción y igual a b.

El trabajo que hemos realizado demuestra que toda recta es la gráfica de una ecuación de la forma

$$ax + by + c = 0$$

en donde a, b y c son números reales, y a y b no son nulos ambos. A una ecuación de este tipo se la llama **ecuación lineal** en x y y. Demostremos, recíprocamente, que la gráfica de $ax + by + c = 0$, en donde a y b no son ambos cero, es siempre una recta. Por un lado, si $b \neq 0$, se despeja y obteniendo

$$y = (-a/b)x + (-c/b)$$

la cual, por la forma pendiente-intercepción, es la ecuación de una recta con pendiente $-a/b$ y con intercepción y igual a $-c/b$. Por otra parte, si $b = 0$ pero $a \neq 0$, entonces se despeja x, obteniendo $x = -c/a$, la cual es la ecuación de una recta vertical con intercepción x igual a $-c/a$. Esto establece el siguiente teorema importante.

TEOREMA

La gráfica de una ecuación lineal $ax + by + c = 0$ es una recta, y por lo contrario, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

Para simplificar, se usará con frecuencia la terminología *la recta* $ax + by + c = 0$, en vez de la frase más precisa *una recta con ecuación* $ax + by + c = 0$.

EJEMPLO 4 Graficar la ecuación $2x - 5y = 8$.

SOLUCIÓN Por el teorema anterior sabemos que la gráfica es una recta, y por lo tanto, es suficiente obtener dos puntos en la gráfica. Encontremos las intercepciones de x y y. Sustituyendo $y = 0$ en la ecuación dada, se determina que la intercepción x es 4. Sustituyendo $x = 0$, se ve que la intercepción y es $-8/5$. Esto conduce a la gráfica de la Figura 11.7.

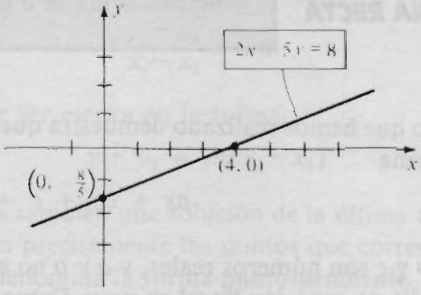
Otro método de solución es expresar la ecuación dada en la forma pendiente-intercepción. Para esto comenzamos aislando el término involucrado y a un lado del signo igual, obteniendo

$$5y = 2x - 8.$$

Luego, dividiendo ambos lados entre 5 obtenemos

$$y = \frac{2}{5}x + \left(\frac{-8}{5}\right)$$

FIGURA 11.7



que es de la forma $y = mx + b$. Así, la pendiente vale $m = \frac{2}{5}$ y la intercepción y es $b = -\frac{8}{5}$. Luego se puede trazar una recta a través del punto $(0, -\frac{8}{5})$ con pendiente $\frac{2}{5}$. ■

En la siguiente sección se demostrará que *dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente*. Usaremos este hecho en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Hallar la ecuación de una recta que pasa por los puntos $(5, -7)$, y que es paralela a la recta $6x + 3y - 4 = 0$.

SOLUCIÓN Expresemos la ecuación dada en la forma pendiente-intercepción. Se empieza escribiendo

$$3y = -6 + 4$$

y luego dividimos ambos miembros entre 3,

$$y = -2x + \frac{4}{3}.$$

La última ecuación está en la forma pendiente-intercepción con $m = -2$, y por lo tanto, la inclinación vale -2. Como las rectas paralelas tienen la misma pendiente, la recta requerida debe tener una inclinación de -2. Aplicando la forma punto-pendiente resulta

$$y + 7 = -2(x - 5)$$

o, de manera equivalente,

$$y + 7 = -2x + 10 \quad \text{o bien} \quad 2x + y - 3 = 0.$$ ■

Ejercicios 11.1

En cada uno de los Ejercicios 1 a 6, ubique los puntos A y B, y calcule la pendiente de la recta que pasa por A y B.

1. $A(-3, 8)$, $B(-2, 16)$.
2. $A(7, -1)$, $B(-4, 9)$.
3. $A(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $B(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.
4. $A(-5, -2)$, $B(6, 4)$
5. $A(5, 0)$, $B(-3, 2)$

6. $A(0, -4)$, $B(8, 3)$

7. Use las pendientes para demostrar que $A(-4, -1)$, $B(2, 3)$, $C(1, -3)$ y $D(7, 1)$ son los vértices de un paralelogramo.

8. Use las pendientes para demostrar que $A(-3, -9)$, $B(1, -1)$ y $C(4, 5)$ están sobre una recta.

En cada uno de los Ejercicios 9 a 22 obtenga la ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas:

9. A través de $A(5, -2)$; pendiente, $1/3$.

10. A través de $B(-3, 7)$; pendiente, -2.

11. A través de $A(-8, -3)$ y $B(2, -5)$.

12. A través de $P(4, -1)$ y $Q(-6, 3)$.

13. Pendiente, -4; intercepción y, 7.

14. Pendiente, $3/4$; intercepción x, 5.

15. Intercepción x, -3; intercepción y, 7.

16. A través de $A(-7, -8)$; intercepción y, 0.

17. A través de $A(7, -3)$; paralela (a) al eje x; (b) al eje y.

18. A través de $A(-8, 2)$; perpendicular (a) al eje y; (b) al eje x.

19. Biseca el segundo y cuarto cuadrantes.

20. Coincidente con el eje y.

21. A través de $A(-4, 10)$; paralela a la recta que pasa por $B(0, 5)$ y $C(-8, -8)$.

22. A través de $P(3/2, -1/4)$; paralela a la recta con ecuación $2x + 4y = 5$.

23. Encuentre las ecuaciones para las medianas del triángulo con vértices en $A(-4, -3)$, $B(2, 3)$ y $C(5, -1)$.

24. Si $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ y $D(x_4, y_4)$ son vértices de un cuadrilátero arbitrario, demuestre que los segmentos de recta que unen los puntos medios de los lados adyacentes forman un paralelogramo.

En cada uno de los Ejercicios 25 a 34, use la forma pendiente-intercepción para calcular la pendiente y la intercepción y de la recta que tiene la ecuación dada y trace la gráfica.

25. $2x - 5y + 10 = 0$
26. $2y - 3x = 4$
27. $3x + 5y = 0$
28. $6x = 1 - 2y$
29. $y + 2 = 0$
30. $3y = 8$
31. $5x = 20 - 6y$
32. $9x - 4y = 0$
33. $y = 0$
34. $x = (2/3)y + 4$

35. Si una recta l tiene intercepciones x y y (no nulas) a y b, respectivamente, demuestre que una ecuación de l es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

(Ésta se llama **forma de intercepciones** para la ecuación de una recta). Exprese la ecuación $4x - 2y = 6$ en la forma de intercepciones.

36. Demuestre que una ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1).$$

(A ésta se le llama **forma de dos puntos para la** ecuación de una recta.) Use la forma de dos puntos para encontrar la ecuación de una recta que pasa por los puntos $A(7, -1)$ y $B(4, 6)$.

11.2 Otras propiedades de las rectas

El concepto de *ángulo de inclinación* presentado en la siguiente definición, es fundamental en los estudios de la recta.

DEFINICIÓN Si l es una recta que no es paralela al eje x, y si P_1 es el punto de intersección de l y el eje x, entonces el **ángulo**

de inclinación de l es el ángulo mínimo α que debe girar el eje x en sentido opuesto al de las manecillas del reloj y hacia P_1, para coincidir con l. Si l es paralela al eje x, entonces $\alpha = 0$.

Si l no es horizontal entonces $0° < \alpha < 180°$. La recta mostrada en (i) de la Figura 11.8 ilustra el caso en que $0° < \alpha < 90°$, y en (ii) se ilustra el de $90° < \alpha < 180°$. Se desprende por geometría plana que dos rectas son paralelas si y sólo si tienen el mismo ángulo de inclinación.

TEOREMA Si una recta tiene pendiente m y un ángulo de inclinación α, entonces $m = \tan\alpha$.

DEMOSTRACIÓN Si la recta es horizontal, entonces $m = 0$, $\alpha = 0°$ y, como $0 = \tan 0°$, el teorema se verifica.

Si la recta no es horizontal, sea x_1 la intercepción x y considere cualquier punto $P_2(x_2, y_2)$ sobre la recta, en donde $y_2 > 0$. Si $x_1 < x_2$, entonces, refiriéndose al triángulo en (i) de la Figura 11.8,

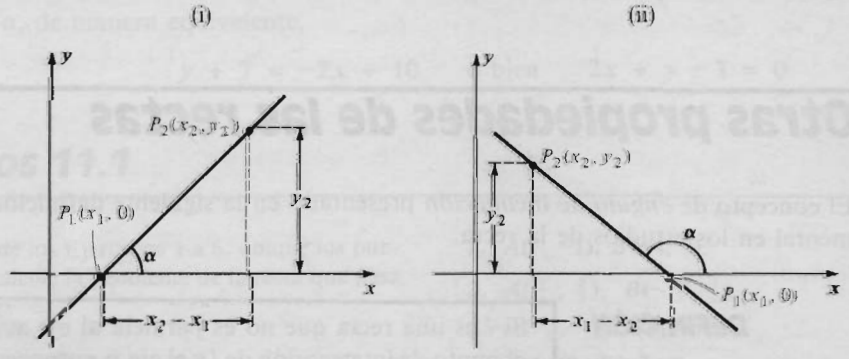
$$\tan\alpha = \frac{y_2}{x_2 - x_1} = m.$$

Si $x_2 < x_1$, entonces de (ii) de la citada Figura 11.8,

$$\tan(180° - \alpha) = \frac{y_2}{x_1 - x_2}.$$

Sin embargo, por el Ejercicio 35 de la Sección 3.6, $\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$, y por consiguiente, obtenemos nuevamente $\tan\alpha = m$. Esto completa la demostración. □

FIGURA 11.8



Aplicando la fórmula de sustracción para la función tangente

$$\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_1 \tan\alpha_2}$$

o bien

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

Por definición, las rectas son perpendiculares si y sólo si $\theta = 90°$, o, en forma equivalente, $\tan\theta$ es indefinida. No obstante, por la fórmula anterior $\tan\theta$ es indefinida si y sólo si $1 + m_1 m_2 = 0$, o bien $m_1 m_2 = -1$, que es lo que queríamos comprobar. Si bien nos hemos referido a la Figura 11.9, se puede usar un razonamiento similar sin considerar las magnitudes de α_1 y α_2, o donde se cortan las rectas. □

Otra forma de establecer este teorema es decir que l_1 y l_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1 = 1/m_2$; esto es, m_1 y m_2 son recíprocos negativos uno del otro.

EJEMPLO 2 Demostrar que un triángulo con vértices $A(-1, -3)$, $B(6, 1)$ y $C(2, -5)$ es un triángulo rectángulo.

SOLUCIÓN Si m_1 designa la pendiente de una recta que pasa por B y C, y si m_2 señala la pendiente de una recta a través de A y C, entonces

$$m_1 = \frac{1 - (-5)}{6 - 2} = \frac{3}{2}, \qquad m_2 = \frac{-3 - (-5)}{-1 - 2} = -\frac{2}{3}.$$

Como $m_1 m_2 = -1$, el ángulo en C es un ángulo recto. ■

EJEMPLO 3 Obtener una ecuación para la perpendicular bisectriz l del segmento de recta que va de $A(1, 7)$ a $B(-3, 2)$.

SOLUCIÓN Los puntos dados y la perpendicular bisectriz se muestran en la Figura 11.10. La pendiente de la recta a través de A y B es

$$m = \frac{7 - 2}{1 - (-3)} = \frac{5}{4}$$

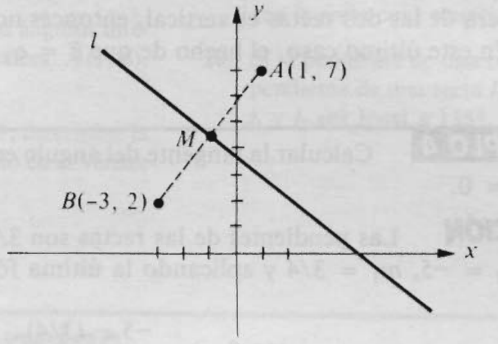
y por lo tanto, por el último teorema, la pendiente de l es $-4/5$. Aplicando la fórmula del punto medio, vemos que el punto medio de AB es $(-1, 9/2)$. Con la forma de punto-pendiente, la ecuación para l es

$$y - \frac{9}{2} = -\frac{4}{5}(x + 1).$$

Multiplicando ambos lados por 10 y simplificando, obtenemos

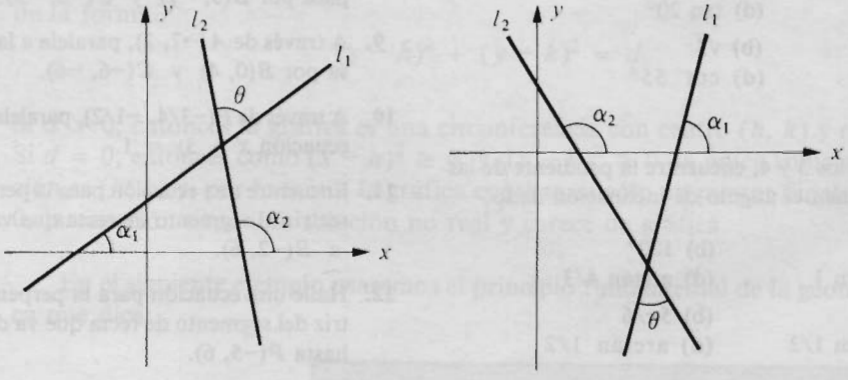
$$8x + 10y - 37 = 0.$$

FIGURA 11.10



Concluiremos esta sección deduciendo una fórmula que sirve para encontrar el ángulo entre dos rectas en un plano coordenado. Si las rectas son paralelas, entonces por definición el ángulo entre ellas es 0°. Si las rectas se cortan, desígnese la recta con mayor inclinación como l_2, y la recta con menor inclinación como l_1. Representando los ángulos de inclinación de l_1 y l_2 por α_1 y α_2, respectivamente, se desprende que $\alpha_2 > \alpha_1$. El ángulo θ entre l_1 y l_2 se define por $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$, como se ilustra en la Figura 11.11.

FIGURA 11.11



Suponiendo que ninguno de los ángulos es recto,

$$\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \tan\alpha_1}$$

o bien

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

en donde m_1 y m_2 son las pendientes de l_1 y l_2, respectivamente. Si $\theta = 90°$, las rectas son perpendiculares, lo cual, para rectas no verticales, es equivalente a $m_1m_2 = -1$. Si cualquiera de las dos rectas es vertical, entonces no se puede emplear la fórmula para $\tan\theta$. En este último caso, el hecho de que $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$, puede usarse para evaluar θ.

EJEMPLO 4 Calcular la tangente del ángulo entre las rectas $3x - 4y = 8$ y $5x + y - 7 = 0$.

SOLUCIÓN Las pendientes de las rectas son $3/4$ y -5. (¿Por qué?) Estableciendo que $m_2 = -5$, $m_1 = 3/4$ y aplicando la última fórmula, obtenemos

$$\tan\theta = \frac{-5 - (3/4)}{1 + (-5)(3/4)} = \frac{23}{11}.$$

Se puede encontrar una aproximación a θ por medio de la Tabla 2. Redondeando a grados, $\theta \approx 64°$. ■

Ejercicios 11.2

En los Ejercicios 1 y 2 determine el ángulo de inclinación de las rectas que tienen las pendientes dadas:

1. (a) -1 (b) $\sqrt{3}/3$
(c) 2 (d) $\tan 20°$

2. (a) 1 (b) $\sqrt{3}$
(c) -4 (d) $\cot 55°$

En los Ejercicios 3 y 4, encuentre la pendiente de las rectas que tienen el ángulo de inclinación dado.

3. (a) $0°$ (b) $120°$
(c) arctan 1 (d) arctan 4/3

4. (a) $135°$ (b) $5\pi/6$
(c) arcsen 1/2 (d) arctan 1/2

5. Demuestre que los puntos siguientes son vértices de un rectángulo: $A(6, 15)$, $B(11, 12)$, $C(-1, -8)$, $D(-6, -5)$.

6. Demuestre que los puntos $A(1, 4)$, $B(6, -4)$, $C(-15, -6)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

En cada uno de los Ejercicios 7 a 10 obtenga una ecuación para las rectas que satisfaga las condiciones dadas.

7. A través de $A(7, -3)$, perpendicular a la recta con ecuación $2x - 5y = 8$.

8. A través de $A(-4, 8)$, perpendicular a la recta que pasa por $B(5, -1)$ y $C(-2, -3)$.

9. A través de $A(-7, 2)$, paralela a la recta que pasa por $B(0, 4)$ y $C(-6, -6)$.

10. A través de $P(-3/4, -1/2)$, paralela a la recta con ecuación $x + 3y = 1$.

11. Encuentre una ecuación para la perpendicular bisectriz al segmento de recta que va de $A(3, -1)$ a $B(-2, 6)$.

12. Halle una ecuación para la perpendicular bisectriz del segmento de recta que va desde el origen hasta $P(-5, 6)$.

13. Obtenga las ecuaciones de las alturas del triángulo con vértices $A(-3, 2)$, $B(5, 4)$ y $C(3, -8)$. Determine el punto de intersección de dichas alturas.

14. Halle las ecuaciones de las medianas del triángulo del Ejercicio 13 y encuentre su punto de intersección.

15. Encuentre la tangente del ángulo entre las rectas cuyas pendientes son (a) 4 y 2/3, (b) -3 y -5.

16. Calcule, redondeando a grados, el ángulo entre

las rectas con ecuaciones $6x - 2y - 3 = 0$ y $3x + 8y + 1 = 0$.

17. Calcule, al grado más cercano, los ángulos interiores de un triángulo con vértices $A(1, 6)$, $B(-3, -2)$ y $C(4, 4)$.

18. Dado el triángulo del Ejercicio 17, determine la pendiente de la bisectriz del ángulo en el vértice A.

19. Encuentre la pendiente de una recta que pasa por el punto $P(4, -5)$, y que forma un ángulo de 30° con la recta cuya ecuación es $3x + y - 18 = 0$.

20. Si la pendiente de una recta l_1 es $1/2$, calcule la pendiente de una recta l_2 tal que el ángulo entre l_1 y l_2 sea igual a 135°.

11.3 Circunferencias

En la Sección 3.2, comprobamos que la circunferencia en un plano coordenado con centro $C(h, k)$ y radio r es la gráfica de la ecuación

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

Elevando al cuadrado y simplificando, obtenemos una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

donde a, b y c son números reales. Recíprocamente, si comenzamos con tal ecuación, casi siempre es posible completar los cuadrados en x y y y obtener así una ecuación de la forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = d.$$

Si $d > 0$, entonces la gráfica es una circunferencia con centro (h, k) y radio $r = \sqrt{d}$. Si $d = 0$, entonces como $(x - h)^2 \geq 0$ y $(y - k)^2 \geq 0$, la única solución de la ecuación es (h, k) y, por lo tanto, la gráfica consiste en sólo un punto. Finalmente, si $d < 0$, la ecuación tiene una solución no real y carece de gráfica.

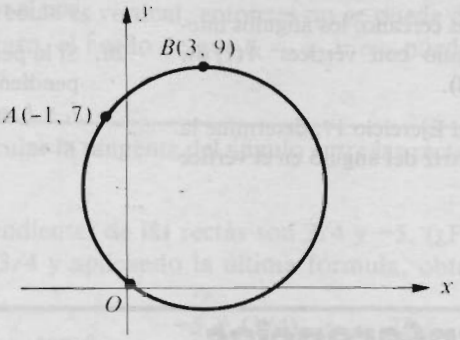
En el siguiente ejemplo usaremos el principio fundamental de la geometría analítica que dice:

> Un punto $P(x_1, y_1)$ está en la gráfica de una ecuación en x y y si y sólo si el par (x_1, y_1) es una solución de la ecuación.

EJEMPLO 1 Obtener una ecuación de la circunferencia que contenga los puntos $A(-1, 7)$, $B(3, 9)$ y el origen $O(0, 0)$. ¿Cuáles son el centro y el radio de tal circunferencia?

SOLUCIÓN La curva se ilustra en la Figura 11.12. Si elegimos a, b y c apropiada-

FIGURA 11.12



mente, la ecuación tiene la forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Más aún, como la circunferencia pasa por el origen, (0, 0) es una solución. Esto es,

$$0^2 + 0^2 + a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0$$

y en consecuencia $c = 0$. Por lo tanto, una ecuación para la circunferencia tiene la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by = 0.$$

Como A y B están en la circunferencia, $(-1, 7)$ y $(3, 9)$ son soluciones para esta ecuación; esto es,

$$1 + 49 - a + 7b = 0 \quad \text{y} \quad 9 + 81 + 3a + 9b = 0.$$

Simplificando, vemos que el par (a, b) debe ser la solución de las *dos* ecuaciones siguientes:

$$a - 7b = 50 \quad \text{y} \quad a + 3b = -30.$$

Resolviendo la primera ecuación para evaluar a y sustituyendo en la segunda, obtenemos $(7b + 50) + 3b = -30$, o bien $10b = -80$. En consecuencia, $b = -8$. Como $a = 7b + 50$, entonces $a = 7(-8) + 50 = -6$. La sustitución de estos números en vez de a y b en $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ da

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0.$$

Completando los cuadrados obtenemos

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) = 9 + 16$$
$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

Por lo tanto, el centro es $C(3, 4)$ y el radio vale 5. ■

Ejercicios 11.3

En cada uno de los Ejercicios 1 a 6, encuentre la ecuación de la circunferencia que satisface las condiciones enunciadas.

1. Centro $C(3, -4)$, radio 2.
2. Centro $C(5, 0)$, radio 5.
3. Centro $C(6, -2)$, tangente a la recta $x = 3$.
4. Extremos de su diámetro: $A(-1, 1)$, $B(4, -6)$.

5. Circunscrita alrededor del triángulo rectángulo con vértices $A(-1, 2)$, $B(2, -3)$ y $C(7, 0)$. (*Sugerencia:* el centro de la curva es el punto medio de la hipotenusa.)

6. Pasa por los tres puntos $A(-2, 1)$, $B(5, 1)$ y $C(5, -3)$.

En cada uno de los Ejercicios 7 a 16 determine el centro y el radio de la circunferencia que tiene la ecuación dada.

7. $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 10 = 0$

8. $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 15 = 0$

9. $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$

10. $x^2 + y^2 + 14x + 46 = 0$

11. $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$

12. $x^2 + y^2 + 2y = 0$

13. $4x^2 + 4y^2 + 8x - 8y + 7 = 0$

14. $2x^2 + 2y^2 + 8x + 7 = 0$

15. $3x^2 + 3y^2 - 3x + 2y + 1 = 0$

16. $9x^2 + 9y^2 + 12x - 6y + 4 = 0$

En los Ejercicios 17 y 18, utilice el método del Ejemplo 1 para encontrar una ecuación de la circunferencia que circunscribe el triángulo con los vértices dados:

17. $A(-2, 1)$, $B(-4, -1)$, $C(1, 2)$

18. $A(-3, 1)$, $B(5, 5)$, $C(-3, 9)$

19. Demuestre que el centro de una circunferencia dada por $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ están sobre la recta $y = x$ si y sólo si $a = b$.

20. Demuestre que la gráfica de $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ contiene el origen si y sólo si $c = 0$.

11.4 Secciones cónicas

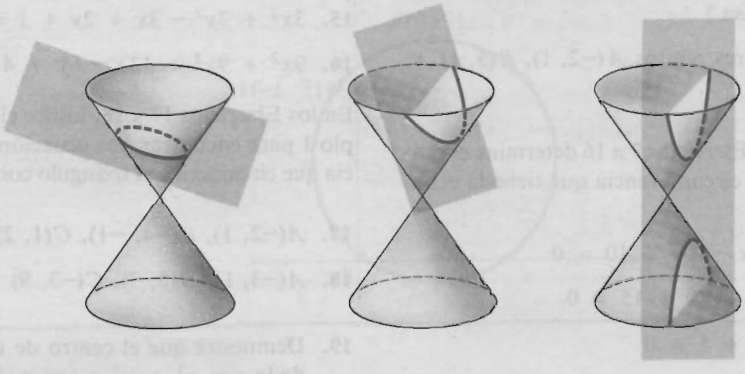
Las figuras geométricas consideradas en las cuatro secciones siguientes, 11.5 a 11.8, se pueden obtener por el corte con un plano de un cono circular recto doble. Por esta razón se llaman **secciones cónicas**, o simplemente **cónicas**. Si, como en la Figura 11.13(i) un plano, no perpendicular al eje del cono, atraviesa completamente una porción de éste, se obtiene una curva de intersección llamada **elipse**. Si el plano es perpendicular al eje del cono, se tiene una **circunferencia**. Si el plano no pasa a través completamente de uno de los mantos del cono y no secciona a ambos, como se ilustra en la Figura 11.13(ii), la curva de intersección es una **parábola**. Si el plano secciona a ambos mantos del cono, como en (iii), la figura resultante es una **hipérbola**.

Las cónicas pueden variar considerablemente, cambiando la posición del plano de sección y la forma del cono. Para algunas posiciones del plano, resultan las llamadas **cónicas degradadas** (o **degeneradas**). Por ejemplo, si el plano corta al cono sólo en el vértice, la cónica consta de un solo punto. Si el eje del cono coincide con el plano, se obtiene un par de rectas que se cortan. Finalmente, si comenzamos con el caso parabólico, como en la Figura 11.13(ii), y movemos el plano paralelamente a su posición inicial hasta que coincida con una de las generatrices del cono, obtenemos una línea recta.

Las secciones cónicas fueron estudiadas extensamente por los antiguos matemáticos griegos, quienes descubrieron las propiedades que permiten definir a las cónicas en términos de puntos (focos) y rectas (directrices) en el plano de la cónica. Un hecho notable acerca de las secciones cónicas es que aunque se estudiaron hace miles de años, están muy lejos de ser obsoletas; son herramientas importantes para las investigaciones espaciales de hoy en día y para el estudio del comportamiento de las partículas atómicas. En física se demuestra que si una partícula se mueve bajo la influencia de lo que se llama un *campo de fuerza que varía con el inverso del cuadrado de la distancia*, en-

FIGURA 11.13

(i) Elipse (ii) Parábola (iii) Hipérbola



tonces la trayectoria se puede describir por medio de una sección cónica, por ejemplo los campos gravitacionales y electromagnéticos. Las órbitas de los planetas son elípticas. Si la elipse es muy "aplanada", la curva se parece a la trayectoria de un cometa. La hipérbola se utiliza para describir la trayectoria de una partícula alfa en el campo eléctrico producido por el núcleo de un átomo. Para captar la energía solar se usan a veces espejos parabólicos. La persona interesada puede encontrar muchas más aplicaciones de las secciones cónicas.

11.5 Parábolas

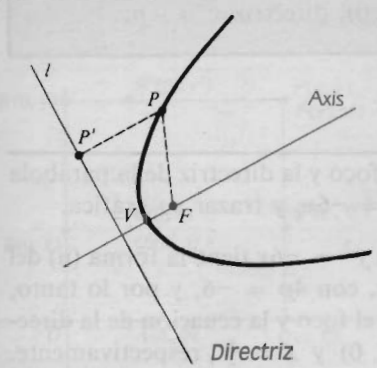
En la Sección 4.1 se discutieron las parábolas; sin embargo, no se dio en ese momento la definición. Aún más, se concentró la atención en las curvas parabólicas de eje vertical. Ahora se definirá a la *parábola* y se deducirán las ecuaciones para las parábolas que tienen eje vertical u horizontal.

DEFINICIÓN

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos de un plano que son equidistantes de un punto fijo F (llamado **foco**) y de una recta fija l (denominada **directriz**) situados en el plano.

Supondremos que F no está en l, pues entonces, la parábola quedaría reducida a una recta. Si P es cualquier punto del plano y P' es el punto de l que determina la recta que pasa por P y es perpendicular a l, entonces por definición, P está sobre la parábola si y sólo si $d(P, F) = d(P, P')$. En la Figura 11.14 se ilustra un caso típico, en donde la línea curva indica las posibles posiciones de P. La recta que pasa por F y es per-

FIGURA 11.14

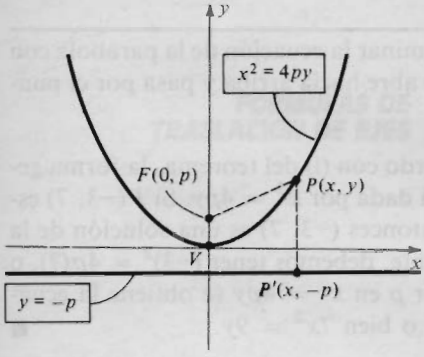


pendicular a la directriz, es el **eje** de la parábola. El punto V sobre el eje y que está a la mitad de F y l, es el **vértice** de la parábola.

Con el objeto de determinar una ecuación sencilla para la parábola, consideramos el caso donde el eje y coincide con el eje de la parábola y el origen con el vértice, como se ilustra en la Figura 11.15. Dadas estas condiciones, las coordenadas del foco son $(0, p)$ para un número real $p \neq 0$, y la ecuación de la directriz está dada por $y = -p$. Por la fórmula de la distancia, un punto $P(x, y)$ está sobre la parábola si y sólo si

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}.$$

FIGURA 11.15



Elevando al cuadrado ambos lados,

$$(x-0)^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2,$$

o bien

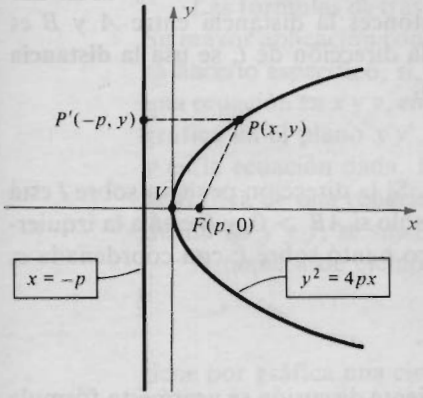
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2.$$

y después de simplificar,

$$x^2 = 4py.$$

Se ha demostrado que las coordenadas de todo punto (x, y) sobre la parábola satisfacen $x^2 = 4py$. Recíprocamente, si (x, y) es una solución de esta ecuación, entonces, invirtiendo los pasos anteriores se ve que el punto (x, y) está sobre la parábola. Si $p > 0$ la parábola *abre hacia arriba*, como en la Figura 11.15, mientras que si $p < 0$, la parábola *abre hacia abajo*. Nótese que la gráfica es simétrica con respecto al eje y, puesto que las soluciones de la ecuación $x^2 = 4py$ no cambian si se reemplaza x por $-x$.

FIGURA 11.16



Existe una situación análoga cuando el eje de la parábola coincide con el eje x. Si el vértice es $V(0, 0)$, el foco $F(p, 0)$ y la ecuación de la directriz $x = -p$ (véase la Figura 11.16) entonces, con el mismo tipo de razonamiento obtenemos la **forma canónica** de la ecuación, $y^2 = 4px$. Si $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha, como en la Figura 11.16; si $p < 0$, abre hacia la izquierda. En este caso, la gráfica es simétrica con respecto al eje x.

El siguiente teorema resume esta discusión.

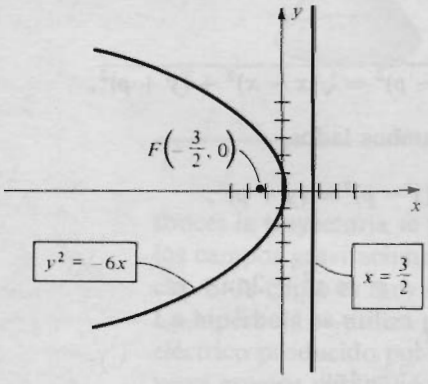
TEOREMA

La gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una parábola cuyo vértice está en el origen y que tiene el foco y la directriz indicadas.

(i) $x^2 = 4py$: foco $F(0, p)$, directriz $y = -p$.
(ii) $y^2 = 4px$: foco $F(p, 0)$, directriz $x = -p$.

EJEMPLO 1 Hallar el foco y la directriz de la parábola que tiene por ecuación $y^2 = -6x$, y trazar su gráfica.

FIGURA 11.17



SOLUCIÓN La ecuación $y^2 = -6x$ tiene la forma (ii) del teorema anterior $y^2 = 4px$, con $4p = -6$, y por lo tanto, $p = -\frac{3}{2}$. En consecuencia, el foco y la ecuación de la directriz están dados por $F(-\frac{3}{2}, 0)$ y $x = \frac{3}{2}$, respectivamente. En la Figura 11.17 se tiene la gráfica de la parábola. ■

EJEMPLO 2 Determinar la ecuación de la parábola con vértice en el origen, que abre hacia arriba y pasa por el punto $P(-3, 7)$.

SOLUCIÓN De acuerdo con (i) del teorema, la forma general de la ecuación está dada por $x^2 = 4py$. Si $P(-3, 7)$ está sobre la parábola, entonces $(-3, 7)$ es una solución de la ecuación. Por consiguiente, debemos tener $(-3)^2 = 4p(7)$, o sea $p = \frac{9}{28}$. Al sustituir p en $x^2 = 4py$ se obtiene la ecuación deseada $x^2 = \frac{9}{7}y$, o bien $7x^2 = 9y$. ■

Para manejar el caso en que el vértice no está en el origen se puede usar una técnica conocida como **traslación de ejes**. Recuérdese que si a y b son las coordenadas de dos puntos A y B sobre una recta coordenada l, entonces la distancia entre A y B es $d(A, B) = |b - a|$. Si se desea tener en cuenta la dirección de l, se usa la **distancia dirigida** $\overline{AB}$ de A hacia B, que es, por definición,

$$\overline{AB} = b - a.$$

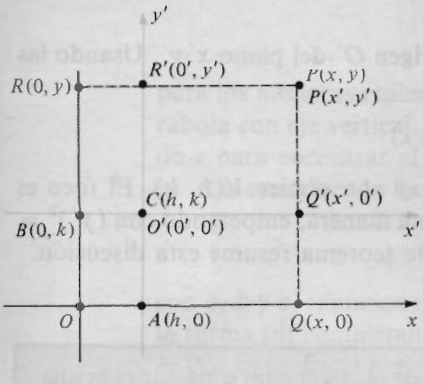
Puesto que $\overline{BA} = a - b$, se tiene que $\overline{AB} = -\overline{BA}$. Si la dirección positiva sobre l está a la derecha, entonces B está a la derecha de A si y sólo si $\overline{AB} > 0$, y B está a la izquierda de A si y sólo si $\overline{AB} < 0$. Si C es cualquier otro punto sobre l; con coordenada c, se deduce que

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC},$$

puesto que $c - a = (b - a) + (c - b)$. En la siguiente discusión se usará esta fórmula para determinar las expresiones para la traslación de ejes.

Supóngase que $C(h, k)$ es un punto arbitrario en un plano coordenado xy. Introduzcamos ahora un nuevo sistema coordenado $x'y'$, cuyo origen O' está en C, de tal modo que los ejes x' y y' sean paralelos y tengan las mismas unidades de longitud y la misma dirección positiva que los ejes x y y, respectivamente. En la Figura 11.18 se

FIGURA 11.18



ilustra una situación típica, en la que, por simplicidad se ha colocado C en el primer cuadrante. Para representar las coordenadas de los puntos en el sistema de coordenadas $x'y'$, se usarán letras con primas para distinguirlas de las coordenadas con respecto al sistema coordenado xy. Así, el punto $P(x, y)$ en el sistema xy se representará mediante $P(x', y')$ en el sistema $x'y'$. Si se marcan las proyecciones de P sobre los distintos ejes, como en la Figura 11.18, y se denota por A y B las proyecciones de C sobre los ejes x y y, respectivamente, entonces, usando distancias dirigidas se obtiene

$$x = \overline{OQ} = \overline{OA} + \overline{AQ} = \overline{OA} + \overline{O'Q'} = h + x'$$
$$y = \overline{OR} = \overline{OB} + \overline{BR} = \overline{OB} + \overline{O'R'} = k + y'.$$

Esto demuestra el siguiente resultado.

FÓRMULAS DE TRASLACIÓN DE EJES

Si (x, y) son las coordenadas de un punto P con respecto a un sistema coordenado xy y si (x', y') son las coordenadas de P respecto a un sistema coordenado $(x'y')$ con origen en el punto $C(h, k)$ del sistema $x\ y$, entonces

$$\text{(i)}\ x = x' + h, \quad y = y' + k$$
$$\text{(ii)}\ x' = x - h, \quad y' = y - k.$$

Las fórmulas de traslación de ejes permiten pasar de un sistema coordenado a otro. Su mayor aplicación consiste en cambiar la forma de las ecuaciones de las gráficas. Para hacerlo específico, si, en el plano xy, una colección dada de puntos es la gráfica de una ecuación en x y y, entonces para obtener una ecuación en x' y y' que tenga la misma gráfica en el plano $x'y'$, se debe sustituir $x' + h$ en lugar de x y $y' + k$ en lugar de y en la ecuación dada. Recíprocamente, si un conjunto de puntos en el plano $x'y'$ es la gráfica de una ecuación en x' y y', entonces, para encontrar la ecuación correspondiente en x y y, se sustituye $x - h$ en vez de x', y $y - k$ en vez de y'.

A manera de ejemplo sencillo, la ecuación

$$(x')^2 + (y')^2 = r^2$$

tiene por gráfica una circunferencia en el plano $x'y'$, con radio r y centro en el origen O'. Usando las fórmulas de traslación de ejes, la ecuación para esta circunferencia en el plano xy es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2,$$

que está de acuerdo con la fórmula para una circunferencia de radio r y centro en $C(h, k)$ en el plano xy.

Como otra ilustración se sabe que

$$(x')^2 = 4py'$$

es la ecuación de una parábola con vértice en el origen O' del plano $x'y'$. Usando las fórmulas de traslación de ejes se ve que

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

es la ecuación de la misma parábola en el plano xy con vértice $V(h, k)$. El foco es $F(h, k + p)$ y la directriz es $y = k - p$. De la misma manera, empezando con $(y')^2 = 4px'$ se obtiene $(y - k)^2 = 4p(x - h)$. El siguiente teorema resume esta discusión.

TEOREMA

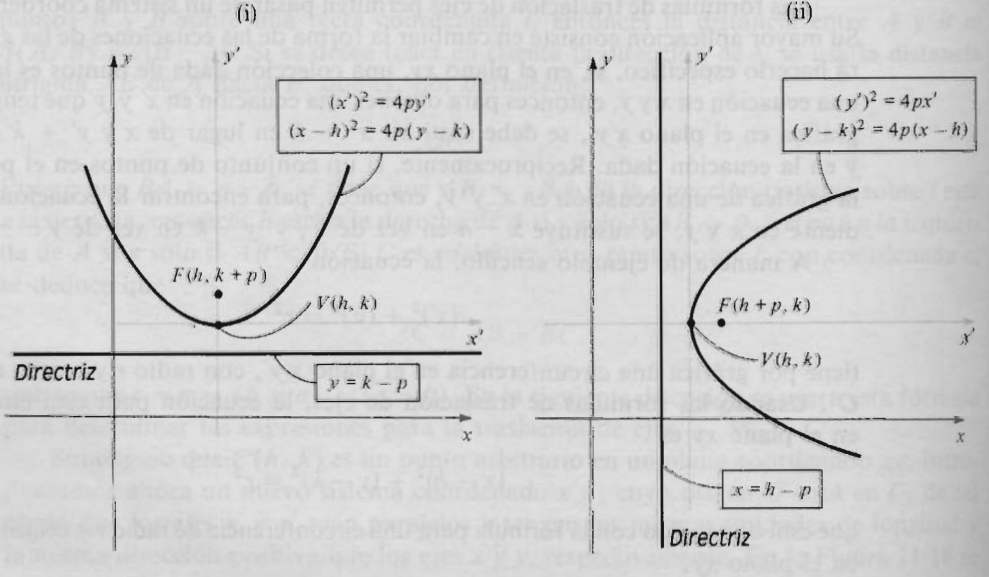
La gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una parábola con vértice en $V(h, k)$, y que tiene el foco y la directriz indicados.

(i) $(x - h)^2 = 4p(y - k)$: foco $F(h, k + p)$, directriz $y = k - p$.

(ii) $(y - k)^2 = 4p(x - h)$: foco $F(h + p, k)$, directriz $x = h - p$.

En cada caso el eje de la parábola es paralelo a un eje coordenado. La parábola que tiene la ecuación (i) abre hacia arriba o hacia abajo, mientras que la parábola en (ii) abre hacia la derecha o hacia la izquierda. En la Figura 11.19 se muestran algunas gráficas típicas.

FIGURA 11.19



Elevando al cuadrado el lado izquierdo de la ecuación en la parte (i) del teorema y simplificando, se llega a una ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

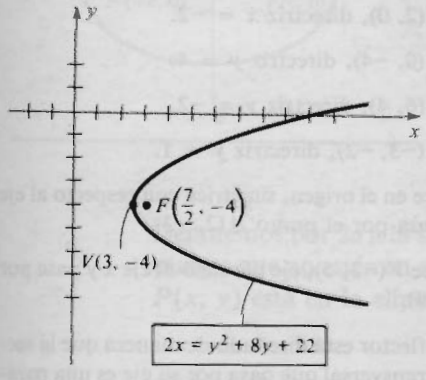
para los números reales a, b y c. Recíprocamente, la gráfica de tal ecuación es una parábola con eje vertical. Al igual que en la Sección 4.1, se puede completar el cuadrado de x para encontrar el vértice (véanse los Ejemplos 3 y 4 de la Sección 4.1.).

La ecuación de la parte (ii) del teorema se puede escribir

$$x = ay^2 + by + c$$

con a, b y c, números reales. Recíprocamente, la última ecuación puede expresarse en la forma (ii) completando el cuadrado en y, como se ilustra en seguida, en el Ejemplo 3. Por lo tanto, si $a \neq 0$, la gráfica de $x = ay^2 + by + c$ es una parábola con eje horizontal.

FIGURA 11.20



EJEMPLO 3 Analizar la ecuación siguiente y representarla gráficamente

$$2x = y^2 + 8y + 22.$$

SOLUCIÓN Por las observaciones anteriores sabemos que la gráfica de la ecuación es una parábola con eje horizontal. A partir de

$$y^2 + 8y = 2x - 22$$

completamos el cuadrado en el miembro de la izquierda sumando 16 a ambos lados. Esto da

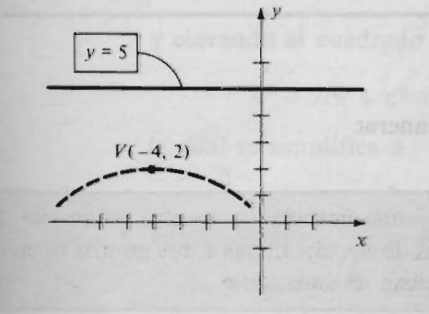
$$y^2 + 8y + 16 = 2y - 6.$$

Esta ecuación se puede escribir

$$(y + 4)^2 = 2(x - 3)$$

que es la forma (ii) del teorema con $h = 3$, $k = -4$ y $4p = 2$, o sea $p = \frac{1}{2}$. Por consiguiente, el vértice es $V(3, -4)$. Como $p = \frac{1}{2} > 0$, la parábola abre hacia la derecha con foco en $F(h + p, k)$, esto es, $F(\frac{7}{2}, -4)$. La ecuación de la directriz está dada por $x = h - p$, o sea, $x = \frac{5}{2}$. La Figura 11.20 representa la parábola. ■

FIGURA 11.21



EJEMPLO 4 Hallar la ecuación de la parábola con vértice $V(-4, 2)$ y directriz $y = 5$.

SOLUCIÓN En la Figura 11.21 se muestran el vértice y

la directriz. La línea punteada indica una posible posición para la curva. Por consiguiente, una ecuación para la parábola es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

en la que $h = -4$, $k = 2$ y $p = -3$. Esto da

$$(x + 4)^2 = -12(y - 2).$$

La última ecuación puede expresarse en la forma $y = ax^2 + bx + c$ como sigue:

$$x^2 + 8x + 16 = -12y + 24$$

$$12y = -x^2 - 8x + 8$$

$$y = -\tfrac{1}{12}x^2 - \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3}$$ ■

Ejercicios 11.5

En los Ejercicios 1 a 16, encuentre el vértice, el foco y la directriz de la parábola dada y trace su gráfica.

1. $x^2 = -12y$
2. $y^2 = \frac{1}{2}x$
3. $2y^2 = -3x$
4. $x^2 = -3y$
5. $8x^2 = y$
6. $y^2 = -100x$
7. $y^2 - 12 = 12x$
8. $y = 40x - 97 - 4x^2$
9. $y = x^2 - 4x + 2$
10. $y = 8x^2 + 16x + 10$
11. $y^2 - 4y - 2x - 4 = 0$
12. $y^2 + 14y + 4x + 45 = 0$
13. $4x^2 + 40x + y + 106 = 0$
14. $y^2 - 20y + 100 = 6x$
15. $x^2 + 20y = 10$
16. $4x^2 + 4x + 4y + 1 = 0$

En los Ejercicios 17 a 22, encuentre la ecuación de la parábola que satisface las condiciones dadas.

17. Foco (2, 0), directriz $x = -2$.
18. Foco (0, −4), directriz $y = 4$.
19. Foco (6, 4), directriz $y = -2$.
20. Foco (−3, −2), directriz $y = 1$.
21. Vértice en el origen, simétrica con respecto al eje y y pasa por el punto $A(2, -3)$.
22. Vértice $V(-3, 5)$, eje paralelo al eje x y pasa por $A(5, 9)$.
23. Un reflector está diseñado de manera que la sección transversal que pasa por su eje es una parábola con foco en la fuente de luz. Si el reflector mide 3 pie de ancho en la abertura y 1 pie de profundidad, localice el foco.
24. Encuentre la ecuación de una parábola que tenga eje horizontal y que pase por los puntos $A(2, 1)$, $B(6, 2)$ y $C(12, -1)$.

11.6 Elipses

Podemos definir a una elipse de la siguiente manera:

DEFINICIÓN

Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos en un plano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos en el plano (los **focos**), es constante.

FIGURA 11.22

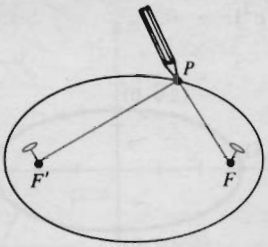
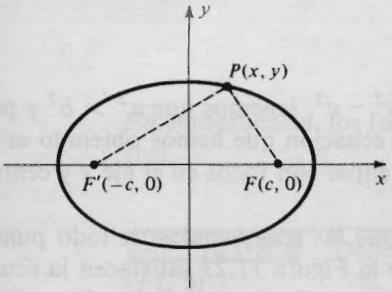


FIGURA 11.23



Se sabe que las órbitas de los planetas del sistema solar son elípticas, con el Sol en uno de sus focos. Esta es sólo una de las muchas aplicaciones importantes de las elipses.

Existe una forma sencilla para dibujar una elipse en un papel: Se empieza por clavar dos tachuelas en los puntos F y F' del papel y se atan los extremos de un hilo a las tachuelas. Si se estira el hilo con la punta de una lápiz hasta el punto P, como en la Figura 11.22, al mover el lápiz manteniendo tenso el hilo, la suma de las distancias $d(F, P)$ y $d(F', P)$ es constante, puesto que corresponde a la longitud del hilo. Por consiguiente, el lápiz trazará una figura semejante a la de una elipse con focos en F y F'. La forma de la elipse puede cambiar considerablemente al variar las posiciones de F y F' aunque se mantenga fija la longitud del hilo. Si F y F' están separados de tal forma que $d(F, F')$ es casi igual a la longitud del hilo, entonces la elipse será muy aplanada. Por otro lado, si $d(F, F')$ es cercana a cero, la elipse será una curva casi circular. En realidad, si $F = F'$, se obtendrá una circunferencia.

Tomando sistemas coordenados apropiados se obtienen ecuaciones simples para las elipses. Tomemos la recta que pasa por los dos focos F y F' como eje x y el punto medio del segmento $F'F$ como origen; este punto es el **centro** de la elipse. Si las coordenadas de F son $(c, 0)$, donde $c > 0$, entonces, como se muestra en la Figura 11.23, F tiene coordenadas $(-c, 0)$, y por consiguiente, la distancia entre F y F' es $2c$. Denotemos por $2a$ a la suma constante de las distancias de F y F' a P, donde para tener puntos que no estén en el eje x, debemos tener $2a > 2c$, es decir, $a > c$. Por definición, $P(x, y)$ está en la elipse si y sólo si

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a$$

o, por la fórmula de distancia,

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

Esta ecuación se puede escribir

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

y elevando al cuadrado ambos lados, obtenemos

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2,$$

la cual se simplifica a

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Elevando al cuadrado ambos lados, tenemos

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$$

que podemos escribir

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Dividiendo ambos lados entre $a^2(a^2 - c^2)$, obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Por conveniencia, hacemos

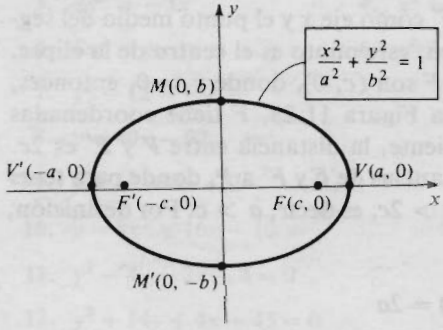
$$b^2 = a^2 - c^2 \qquad \text{en donde } b > 0$$

para obtener la siguiente ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Como $c > 0$ y $b^2 = a^2 - c^2$, tenemos que $a^2 > b^2$ y por consiguiente $a > b$. La ecuación que hemos obtenido es la **forma canónica** de una elipse con focos en el eje x y centro en el origen.

FIGURA 11.24



Se ha demostrado que las coordenadas de todo punto (x, y) sobre la elipse de la Figura 11.23 satisfacen la ecuación $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$. Recíprocamente, si (x, y) es una solución de la ecuación, entonces, invirtiendo los pasos anteriores se puede ver que el punto (x, y) está sobre la elipse.

Las intersecciones de la gráfica con el eje x se pueden determinar haciendo $y = 0$, obteniendo así $x^2/a^2 = 1$ o sea $x^2 = a^2$; por consiguiente, las intercepciones x son a y $-a$. Los puntos $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ sobre la gráfica son los **vértices** de la elipse. (Véase la Figura 11.24.) El segmento $V'V$ es el **eje mayor**. De la misma manera, haciendo $x = 0$ en la ecuación de la elipse, obtenemos $y^2/b^2 = 1$ o sea $y^2 = b^2$. Así, las intercepciones y son b y $-b$. El segmento de $M'(0, -b)$ a $M(0, b)$ es el **eje menor** de la elipse. Nótese que el eje mayor es más grande que el eje menor, puesto que $a > b$.

Las pruebas de simetría muestran que la elipse es simétrica con respecto al eje x y al eje y. Es también simétrica con respecto al origen, puesto que la ecuación no cambia si sustituimos x por $-x$ y y por $-y$.

La discusión anterior se puede resumir de la siguiente manera:

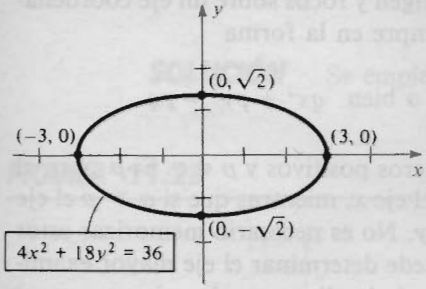
TEOREMA

La gráfica de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

para $a^2 > b^2$ es una elipse con vértices en $(\pm a, 0)$. Los extremos del eje menor son $(0, \pm b)$. Los focos son $(\pm c, 0)$, en donde $c^2 = a^2 - b^2$.

FIGURA 11.25



EJEMPLO 1 Estudiar la ecuación siguiente y representarla gráficamente

$$4x^2 + 18y^2 = 36.$$

SOLUCIÓN Para obtener la forma canónica del teorema tenemos que dividir ambos lados de la ecuación dada entre 36 y simplificar. Se obtiene así

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1,$$

la cual está en la forma citada con $a^2 = 9$ y $b^2 = 2$. Así, $a = 3$, $b = \sqrt{2}$; por consiguiente, los extremos del eje mayor son $(\pm 3, 0)$ y los del eje menor $(0, \pm\sqrt{2})$. Como

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 2 = 7 \quad \text{o bien} \quad c = \sqrt{7}.$$

En consecuencia, los focos están en $(\pm\sqrt{7}, 0)$. En la Figura 11.25 hemos trazado la gráfica. ■

EJEMPLO 2 Determinar la ecuación de la elipse con vértices en $(\pm 4, 0)$ y focos en $(\pm 2, 0)$.

SOLUCIÓN Usando la notación del teorema, $a = 4$ y $c = 2$. Como $c^2 = a^2 - b^2$, se tiene que $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$. Al sustituir estos valores se obtiene

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

Multiplicando ambos lados por 48 queda la ecuación $3x^2 + 4y^2 = 48$. ■

Algunas veces es conveniente tomar el eje mayor de la elipse sobre el eje y. Si los focos están en $(0, \pm c)$ con un razonamiento similar al anterior obtenemos el siguiente.

TEOREMA

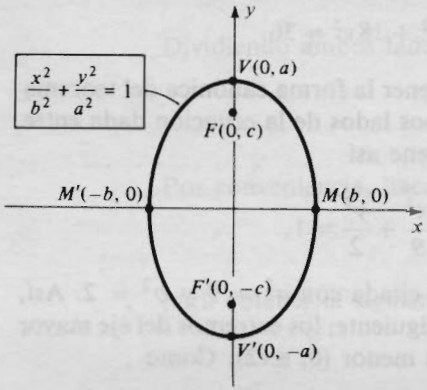
La gráfica de la ecuación

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

para $a^2 > b^2$, es una elipse con vértices $(0, \pm a)$. Los extremos del eje menor son $(\pm b, 0)$. Los focos son $(0, \pm c)$, en donde $c^2 = a^2 - b^2$.

En la Figura 11.25 hemos trazado una gráfica de este tipo.

FIGURA 11.26



El razonamiento anterior muestra que la ecuación de una elipse con centro en el origen y focos sobre un eje coordenado se puede escribir siempre en la forma

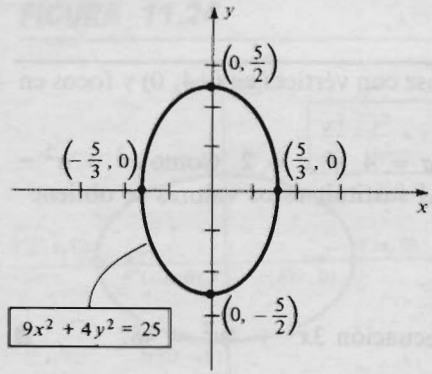
$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1 \quad \text{o bien} \quad qx^2 + py^2 = pq$$

en donde p y q son números positivos y $p \neq q$. Si $p > q$, el eje mayor coincide con el eje x, mientras que si $q > p$ el eje mayor está sobre el eje y. No es necesario memorizar estos hechos puesto que se puede determinar el eje mayor examinando las intersecciones de la elipse con los ejes x y y.

EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de la ecuación $9x^2 + 4y^2 = 25$.

SOLUCIÓN La gráfica es una elipse con centro en el origen y focos sobre uno de los ejes coordenados. Para encontrar las intersecciones con el eje x, hacemos $y = 0$ y obtenemos $9x^2 = 25$, o bien $x = \pm \frac{5}{3}$. Análogamente, para determinar las intersecciones con el eje y se hace $x = 0$ en la ecuación de la elipse y obtenemos $4y^2 = 25$, o sea $y = \pm \frac{5}{2}$. Estos resultados permiten trazar la elipse (véase la Figura 11.27). Como $\frac{5}{3} < \frac{5}{2}$, el eje mayor coincide con el eje y. ■

FIGURA 11.27



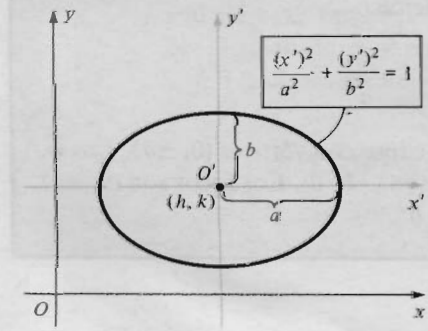
Utilizando las fórmulas de traslación de ejes se puede extender el estudio a la elipse con centro en un punto $C(h, k)$ en el plano xy. Por ejemplo, puesto que la gráfica de

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

es una elipse con centro en O' en un plano $x'y'$ (véase la Figura 11.28), su ecuación respecto al sistema coordenado xy es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

FIGURA 11.28



Elevando al cuadrado los términos indicados en la última ecuación y simplificando se obtiene una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en la que los coeficientes son números reales y A y C son ambos positivos. De manera recíproca, si se empieza con una ecuación de este tipo, completando cuadrados se puede obtener una forma que muestre el centro de la elipse y las longitudes de los ejes mayor y menor. Esta técnica se ilustra en el ejemplo siguiente.

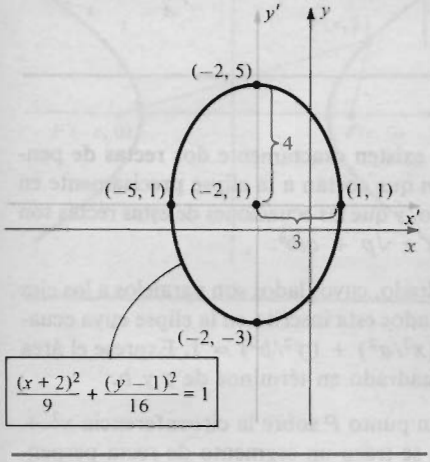
EJEMPLO 4 Analizar y trazar la gráfica de la ecuación

$$16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0.$$

SOLUCIÓN Se empieza escribiendo la ecuación en la forma

$$16(x^2 + 4x) + 9(y^2 - 2y) = 71.$$

FIGURA 11.29



En seguida, se completan los cuadrados de las expresiones entre paréntesis obteniéndose

$$16(x^2 + 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = 71 + 64 + 9.$$

Nótese que sumando 4 a la expresión que está dentro del primer paréntesis se ha sumado 64 al lado izquierdo de la ecuación, y por ello hay que compensar sumando 64 al lado derecho. De la misma manera, aumentando en 1 la expresión dentro del segundo paréntesis, se agrega 9 al lado izquierdo y, por consiguiente, se debe sumar también 9 al lado derecho. La última ecuación se puede escribir como

$$16(x + 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 144.$$

Dividiendo entre 144, se obtiene

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1,$$

que es de la forma $\dfrac{(x')^2}{9} + \dfrac{(y')^2}{16} = 1$

con $x' = x + 2$ y $y' = y - 1$. Esto corresponde a hacer $h = -2$ y $k = 1$ en las fórmulas de traslación de ejes. Puesto que la gráfica de la ecuación $(x')^2/9 + (y')^2/16 = 1$ es una elipse con centro en el origen O' en el plano $x'y'$, se deduce que la gráfica de la ecuación dada es una elipse con centro $C(-2, 1)$ en el plano xy y con ejes paralelos a los ejes coordenados. La gráfica se muestra en la Figura 11.29. ■

Ejercicios 11.6

En los Ejercicios 1 a 14, trace la gráfica de la ecuación y determine las coordenadas de los vértices y los focos.

1. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$
2. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$
3. $4x^2 + y^2 = 16$
4. $y^2 + 9x^2 = 9$
5. $5x^2 + 2y^2 = 10$
6. $\frac{1}{2}x^2 + 2y^2 = 8$
7. $4x^2 + 25y^2 = 1$
8. $10y^2 + x^2 = 5$
9. $4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y + 64 = 0$
10. $x^2 + 2y^2 + 2x - 20y + 43 = 0$
11. $9x^2 + 16y^2 + 54x - 32y - 47 = 0$
12. $4x^2 + 9y^2 + 24x + 18y + 9 = 0$
13. $25x^2 + 4y^2 - 250x - 16y + 541 = 0$
14. $4x^2 + y^2 = 2y$

En los Ejercicios 15 a 20 encuentre la ecuación de la elipse que satisface las condiciones dadas.

15. Vértices $V(\pm 8, 0)$, focos $F(\pm 5, 0)$.
16. Vértices $V(0, \pm 7)$, focos $F(0, \pm 2)$.
17. Vértices $V(0, \pm 5)$, longitud del eje menor 3.

18. Focos $F(\pm 3, 0)$, longitud del eje menor 2.

19. Vértices $V(0, \pm 6)$, pasa por $(3, 2)$.

20. Centro en el origen, simétrica con respecto a ambos ejes y pasa por $A(2, 3)$ y $B(6, 1)$.

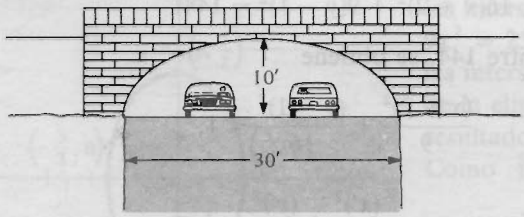
En los Ejercicios 21 y 22 encuentre los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones dadas. Trace ambas gráficas tomando los mismos ejes coordenados y muestre los puntos de intersección.

21. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 20 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 36 \\ x^2 + y^2 = 12 \end{cases}$

23. El arco de un puente es semielíptico, con eje mayor horizontal. La base del arco tiene 30 pie de longitud y su parte más alta con respecto al suelo mide 10 pie (véase la figura). Determine la altura del arco a 6 pie del centro de la base.

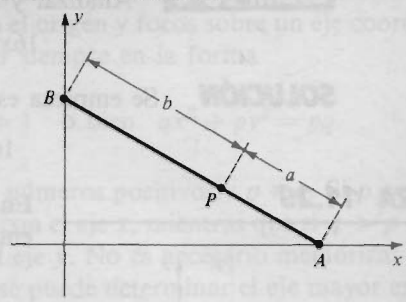
FIGURA PARA EL EJERCICIO 23



24. La **excentricidad** de una elipse se define como la razón $(\sqrt{a^2 - b^2})/a$. Si el valor de a es fijo y el de b varía, describa la forma general de la elipse cuando la excentricidad es cercana a 1 y cuando su valor es próximo a cero.

25. Un segmento de recta de longitud $a + b$ se mueve con sus extremos A y B fijos a los ejes coordenados, como se ilustra en la figura. Muestre que si $a \neq b$, entonces el punto P describe una elipse.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 25

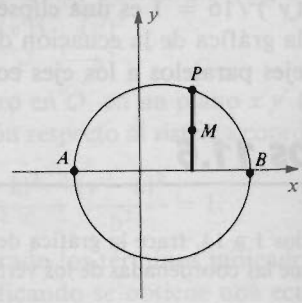


26. Considere la elipse $px^2 + qy^2 = pq$, en la que $p > 0$ y $q > 0$. Demuestre que si m es un número real, existen exactamente dos rectas de pendiente m que cortan a la elipse precisamente en un punto, y que las ecuaciones de estas rectas son $y = mx \pm \sqrt{p + qm^2}$.

27. Un cuadrado, cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados está inscrito en la elipse cuya ecuación es $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$. Exprese el área A del cuadrado en términos de a y b.

28. Desde un punto P sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, se traza un segmento de recta perpendicular al diámetro AB y se determina el punto medio M (véase la figura). Obtenga la ecuación de todos esos puntos medios M y trace la gráfica.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 28



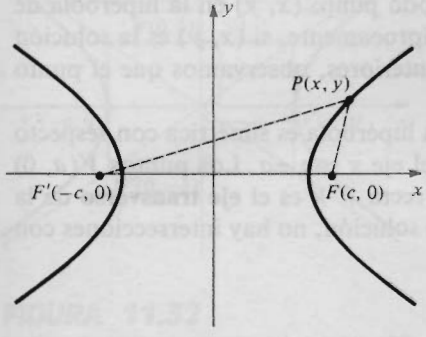
11.7 Hipérbolas

La definición de la hipérbola es similar a la de la elipse. La única diferencia es que en lugar de considerar la *suma* de las distancias a dos puntos fijos, se toma la *diferencia*.

DEFINICIÓN

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos en un plano, tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano (llamados **focos**) es una constante positiva.

FIGURA 11.30



Para obtener una ecuación simple para la hipérbola, elijamos un sistema coordenado con focos en $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ y denotemos a la distancia (constante) por $2a$. Si hacemos referencia a la Figura 11.30, vemos que el punto $P(x, y)$ está sobre la hipérbola si y sólo si se cumple cualquiera de las siguientes igualdades:

$$d(P, F') - d(P, F) = 2a$$

$$d(P, F) - d(P, F') = 2a.$$

En el caso de las hipérbolas (a diferencia de las elipses) debe verificarse que $a < c$ para obtener puntos de la hipérbola que no estén sobre el eje x, pues si P es uno de esos puntos, en la Figura 11.30 vemos que

$$d(P, F) < d(F', F) + d(P, F'),$$

ya que la longitud de un lado del triángulo es siempre menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados. De la misma manera,

$$d(P, F') < d(F', F) + d(P, F).$$

Desigualdades equivalentes a las dos anteriores son

$$d(P, F) - d(P, F') < d(F', F)$$

$$d(P, F') - d(P, F) < d(F', F).$$

Puesto que las diferencias de la izquierda son ambas iguales a $2a$ y el hecho de que $d(F', F) = 2c$, implican que en las últimas desigualdades se cumpla $2a < 2c$, o bien $a < c$.

Las ecuaciones $d(P, F') - d(P, F) = 2a$ y $d(P, F) - d(P, F') = 2a$ se pueden reemplazar por

$$|d(P, F) - d(P, F')| = 2a.$$

por la fórmula de distancia se obtiene ahora la ecuación de la hipérbola:

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a.$$

Empleando el mismo procedimiento de simplificación que para la ecuación de una elipse, llegamos a la ecuación equivalente

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Por simplicidad, consideremos

$$b^2 = c^2 - a^2 \text{ en donde } b > 0$$

en la ecuación anterior, obteniendo así

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hemos demostrado que las coordenadas de todo punto (x, y) en la hipérbola de la Figura 11.30 satisfacen la última ecuación. Recíprocamente, si (x, y) es la solución de tal ecuación, entonces, invirtiendo los pasos anteriores, observamos que el punto (x, y) está sobre la hipérbola.

Mediante las pruebas de simetría vemos que la hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes y al origen. Las intersecciones con el eje x son $\pm a$. Los puntos $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ se llaman **vértices** y el segmento de recta $V'V$ es el **eje transverso** de la hipérbola. Como la ecuación $-y^2/b^2 = 1$ no tiene solución, no hay intersecciones con el eje y.

Lo anterior se resume como sigue:

TEOREMA

La gráfica de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es una hipérbola con vértices $(\pm a, 0)$. Los focos son $(\pm c, 0)$, en donde $c^2 = a^2 + b^2$.

Si en la ecuación $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ despejamos y, obtenemos

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

De aquí que no existan puntos (x, y) sobre la gráfica cuando $x^2 - a^2 < 0$, es decir, cuando $-a < x < a$. Sin embargo, *hay* puntos $P(x, y)$ sobre la gráfica si $x \geq a$ o bien $x \leq -a$. Si $x \geq a$, podemos escribir la última ecuación en la forma

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)} = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

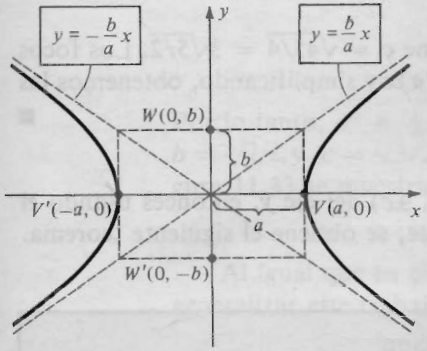
De donde se deduce que si x toma un valor grande (en comparación con a), el radicando es cercano a 1, y entonces la ordenada y del punto $P(x, y)$ sobre la hipérbola está próxima a $(b/a)x$ o bien a $-(b/a)x$. Esto significa que el punto $P(x, y)$ está cerca de la recta cuya ecuación es $y = (b/a)x$ cuando y es positiva, o cerca de la recta $y = -(b/a)x$ cuando y es negativa. A medida que x crece, decimos que el punto $P(x, y)$ se *aproxima* a una de estas rectas. Existe una situación similar cuando $x \leq -a$. Las rectas con ecuaciones

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

se llaman **asíntotas** de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$.

FIGURA 11.31

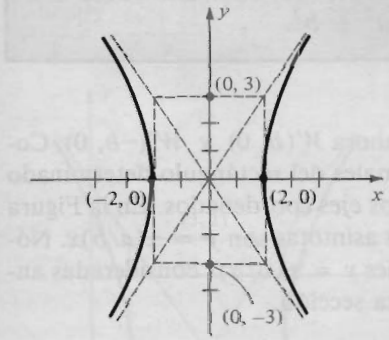
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Las asíntotas son una excelente guía para trazar la gráfica. Una forma sencilla de trazar las asíntotas consiste en representar primero los vértices $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ y los puntos $W(0, b)$ y $W'(0, -b)$ (véase la Figura 11.31). El segmento $W'W$ de longitud $2b$ se llama **eje conjugado** de la hipérbola. Si se trazan líneas horizontales y verticales por los puntos extremos de los ejes conjugado y transverso, respectivamente, entonces las diagonales del rectángulo resultante tienen pendientes b/a y $-b/a$. En consecuencia, al prolongar estas diagonales obtenemos las asíntotas $y = (\pm b/a)x$. Usando tales rectas como guía se traza la gráfica como se muestra en la Figura 11.31. Las dos curvas que constituyen la hipérbola se llaman **ramas** de esta curva.

FIGURA 11.32

$9x^2 - 4y^2 = 36$



EJEMPLO 1 Analizar y trazar la gráfica de la ecuación

$$9x^2 - 4y^2 = 36.$$

SOLUCIÓN Dividiendo ambos lados entre 36, tenemos

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

que está en la forma canónica establecida en el teorema con $a^2 = 4$ y $b^2 = 9$; es decir, $a = 2$ y $b = 3$. Los vértices $(\pm 2, 0)$ y los puntos extremos $(0, \pm 3)$ del eje conjugado determinan un rectángulo, cuyas diagonales (prolongadas) dan las asíntotas. En la Figura 11.32 se tiene la gráfica de la ecuación. La gráfica, o las ecuaciones $y = \pm(b/a)x$ permiten encontrar las ecuaciones de las asíntotas: $y = \pm \frac{3}{2}x$. Como $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$, los focos son $(\pm\sqrt{13}, 0)$.

El ejemplo anterior muestra que para las hipérbolas no siempre se cumple que $a < b$, como en el caso de las elipses se puede tener $a < b$, $a > b$ o bien $a = b$.

EJEMPLO 2 Determinar la ecuación, los focos y las asíntotas de la hipérbola con vértices $(\pm 3, 0)$ que pasa por el punto $P(5, 2)$.

SOLUCIÓN Sustituyendo $a = 3$ en $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$, obtenemos

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si el punto $(5, 2)$ satisface esta ecuación, entonces

$$\frac{25}{9} - \frac{4}{b^2} = 1.$$

Despejando obtenemos $b^2 = \frac{9}{4}$, y por lo tanto la ecuación que deseamos encontrar es

$$\frac{x^2}{9} - \frac{4y^2}{9} = 1,$$

que equivale a $x^2 - 4y^2 = 9$

Siendo $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4}$, se tiene $c = \sqrt{45/4} = 3\sqrt{5/2}$. Los focos son $(\pm \frac{3}{2}\sqrt{5}, 0)$. Reemplazando b y a en $y = \pm(b/a)x$ y simplificando, obtenemos las ecuaciones de las asíntotas $y = \pm \frac{1}{2}x$. ■

Si los focos de la hipérbola son los puntos $(0, \pm c)$ del eje y, entonces usando el mismo tipo de argumento que se usó anteriormente, se obtiene el siguiente teorema.

TEOREMA

La gráfica de la ecuación

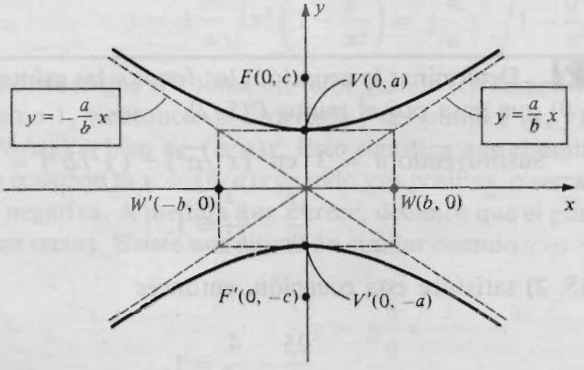
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

es una hipérbola con vértices $(0, \pm a)$. Los focos son $(0, \pm c)$ en donde $c^2 = a^2 + b^2$.

Los puntos extremos de los ejes conjugados son ahora $W(b, 0)$ y $W'(-b, 0)$. Como antes, las asíntotas se obtienen usando las diagonales del rectángulo determinado por estos puntos, los vértices y las rectas paralelas a los ejes coordenados. En la Figura 11.33 hemos trazado la gráfica. Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm(a/b)x$. Nótese la diferencia entre estas ecuaciones y las ecuaciones $y = \pm(b/a)x$ consideradas anteriormente para las asíntotas de la hipérbola en esta sección.

FIGURA 11.33

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$



EJEMPLO 3 Analizar y trazar la gráfica de la ecuación

$$4y^2 - 2x^2 = 1.$$

SOLUCIÓN La forma en el último teorema se obtuvo escribiendo la ecuación

$$\frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Por lo tanto, $a^2 = \frac{1}{4}$, $b^2 = \frac{1}{2}$ y $c^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. En consecuencia, $a = \frac{1}{2}$, $b = \sqrt{2}/2$, y $c = \sqrt{3}/2$. Los vértices son $(0, \pm\frac{1}{2})$ y los focos son $(0, \pm\sqrt{3}/2)$. En la Figura 11.33 se muestra la gráfica. ■

Al igual que en el caso de las elipses, pueden usarse las traslaciones de ejes para generalizar este trabajo. En el siguiente ejemplo se ilustra esta técnica.

EJEMPLO 4 Discutir y trazar la gráfica de la ecuación

$$9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 29 = 0.$$

SOLUCIÓN Se ordena el trabajo de la siguiente manera:

$$9(x^2 - 6x) - 4(y^2 + 4y) = -29$$

$$9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 + 4y + 4) = -29 + 81 - 16$$

$$9(x - 3)^2 - 4(y + 2)^2 = 36$$

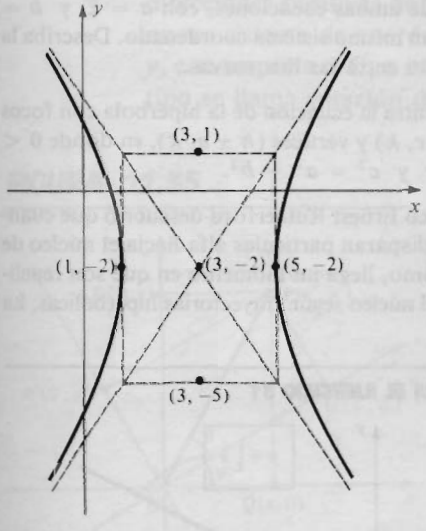
$$\frac{(x - 3)^2}{4} - \frac{(y + 2)^2}{9} = 1,$$

que es de la forma $\dfrac{(x')^2}{4} - \dfrac{(y')^2}{9} = 1$

con $x' = x - 3$ y $y' = y + 2$. Trasladando los ejes x y y al nuevo origen $C(3, -2)$, se obtiene el trazo que se muestra en la Figura 11.34. ■

FIGURA 11.34

$\dfrac{(x - 3)^2}{4} - \dfrac{(y + 2)^2}{9} = 1$



Los resultados de las últimas tres secciones indican que la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una cónica, excepto en algunos casos degradados (o degenerados) en los que se obtienen puntos, rectas o ninguna gráfica. Aunque se han considerado ejemplos especiales, los métodos son perfectamente generales. Si A y C son iguales y diferentes de cero, entonces la gráfica, cuando existe, es una circunferencia o, en casos excepcionales, un punto. Si A y C no son iguales, pero tienen el mismo signo, entonces, completando cuadrados y trasladando los ejes apropiadamente se obtiene una ecuación cuya gráfica, cuando existe, es una elipse (o un punto). Si A y C son de signo contrario, se obtiene una ecuación de una hipérbola,

o posiblemente, en el caso de degradación, dos rectas que se cortan. Por último, si A o C (pero no ambas) es cero, la gráfica es una parábola, o bien, en ciertos casos, un par de rectas paralelas.

Ejercicios 11.7

En los Ejercicios 1 a 18, trace la gráfica de la ecuación, encuentre las coordenadas de los vértices y de los focos y las ecuaciones de las asíntotas.

1. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$
2. $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{16} = 1$
3. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$
4. $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$
5. $y^2 - 4x^2 = 16$
6. $x^2 - 2y^2 = 8$
7. $x^2 - y^2 = 1$
8. $y^2 - 16x^2 = 1$
9. $x^2 - 5y^2 = 25$
10. $4y^2 - 4x^2 = 1$
11. $3x^2 - y^2 = -3$
12. $16x^2 - 36y^2 = 1$
13. $25x^2 - 16y^2 + 250x + 32y + 109 = 0$
14. $y^2 - 4x^2 - 12y - 16x + 16 = 0$
15. $4y^2 - x^2 + 40y - 4x + 60 = 0$
16. $25x^2 - 9y^2 - 100x - 54y + 10 = 0$
17. $9y^2 - x^2 - 36y + 12x - 36 = 0$
18. $4x^2 - y^2 + 32x - 8y + 49 = 0$

En los Ejercicios 19 a 26, encuentre la ecuación de la hipérbola que satisface las condiciones dadas.

19. Focos $F(0, \pm 4)$, vértices $V(0, \pm 1)$.
20. Focos $F(\pm 8, 0)$, vértices $V(\pm 5, 0)$.
21. Focos $F(\pm 5, 0)$, vértices $V(\pm 3, 0)$.
22. Focos $F(0, \pm 3)$, vértices $V(0, \pm 2)$.
23. Focos $F(0, \pm 5)$, longitud del eje conjugado 4.
24. Vértices $V(\pm 4, 0)$, pasa por $P(8, 2)$.
25. Vértices $V(\pm 3, 0)$, ecuaciones de las asíntotas: $y = \pm 2x$.
26. Focos $F(0, \pm 10)$, ecuaciones de las asíntotas $y = \pm \frac{1}{3}x$.

En los Ejercicios 27 y 28 encuentre los puntos de intersección de las curvas de las ecuaciones dadas y trace sus gráficas en un mismo plano coordenado, mostrando los puntos de intersección.

27. $\begin{cases} y^2 - 4x^2 = 16 \\ y - x = 4 \end{cases}$
28. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y^2 - 3x = 0 \end{cases}$

29. Las representaciones geométricas de las ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

se llaman **hipérbolas conjugadas**. Trace las gráficas de ambas ecuaciones, con $a = 2$ y $b = 5$, en un mismo sistema coordenado. Describa la relación entre las dos curvas.

30. Encuentre la ecuación de la hipérbola con focos $(h \pm c, k)$ y vértices $(h \pm a, k)$, en donde $0 < a < c$ y $c^2 = a^2 + b^2$.

31. El físico Ernest Rutherford descubrió que cuando se disparan partículas alfa hacia el núcleo de un átomo, llega un momento en que son repelidas del núcleo según trayectorias hiperbólicas. La

FIGURA PARA EL EJERCICIO 31

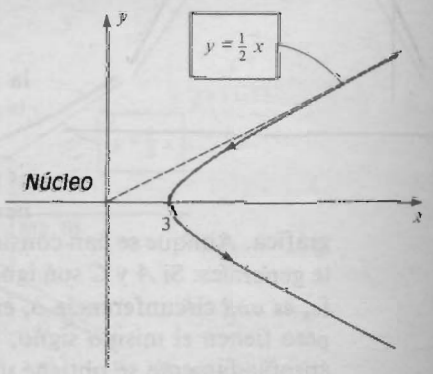
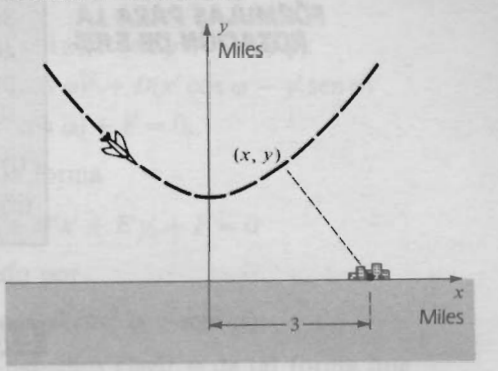


figura muestra la trayectoria de una partícula que se dirige hacia el origen sobre la recta $y = \frac{1}{2}x$ y llega a 3 unidades de distancia respecto del núcleo. Encuentre la ecuación de la trayectoria.

32. Un avión jet de la Fuerza Aérea ejecuta una maniobra a alta velocidad sobre la trayectoria $2y^2 - x^2 = 8$. ¿Qué tanto se aproxima el avión a una ciudad situada en (3, 0)? (*Sugerencia:* Represéntese por S el cuadrado de la distancia de un punto (x, y) sobre la trayectoria al punto (3, 0) y obtenga el valor mínimo de S. ¿Qué es $\sqrt{S}$?

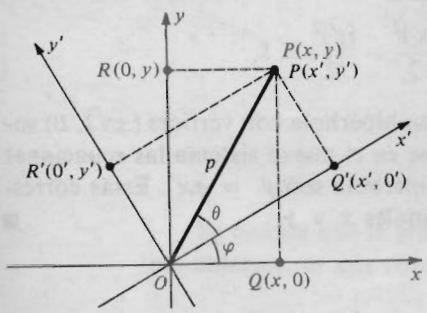
FIGURA PARA EL EJERCICIO 32



11.8 Rotación de ejes

Puede pensarse que el sistema coordenado $x'y'$ usado en una traslación de ejes se obtiene moviendo el origen O del sistema xy a una nueva posición $C(h, k)$, sin cambiar las direcciones positivas de los ejes ni las unidades de longitud. Introduciremos ahora un nuevo sistema de coordenadas manteniendo fijo al origen O y girando los ejes x y y, con respecto a O, a otra posición denotada por x' y y'. Una transformación de este tipo se llama **rotación de ejes.**

FIGURA 11.35



Consideremos una rotación de ejes; como se muestra en la Figura 11.35, denotemos por φ al ángulo de giro que hará coincidir la parte positiva del eje x con el lado positivo del eje x'. Si (x, y) son las coordenadas de un punto P con respecto al plano xy, entonces, como antes, (x', y') serán sus coordenadas en el nuevo sistema coordenado $x'y'$. Denotemos las proyecciones de P sobre los diversos ejes como se indica en la Figura 11.35 y sea, además, θ el ángulo POQ'. Si $p = d(O, P)$, se tiene:

$$x' = p\cos\theta, \qquad y' = p\,\text{sen}\,\theta,$$

$$x = p\cos(\theta + \varphi), \qquad y = p\,\text{sen}(\theta + \varphi).$$

Aplicando las fórmulas del seno y coseno de una suma, obtenemos

$$x = p\cos\theta\cos\varphi - p\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi$$

$$y = p\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi + p\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi.$$

Usando el hecho de que $x' = p\cos\theta$ y $y' = p\,\text{sen}\,\theta$ se obtiene la parte (i) del siguiente teorema. Las fórmulas de la parte (ii) se pueden obtener a partir de (i) despejando x' y y'.

FÓRMULAS PARA LA ROTACIÓN DE EJES

Si se giran los ejes x y y un ángulo φ alrededor del origen O, entonces las coordenadas (x, y) y (x', y') de un punto P en los dos sistemas están relacionadas como sigue:

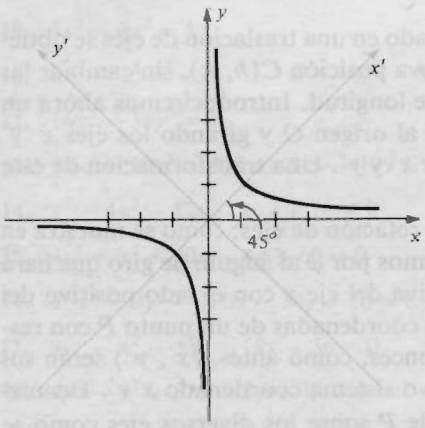
(i) $x = x' \cos\varphi - y' \operatorname{sen}\varphi, \quad y = x' \operatorname{sen}\varphi + y' \cos\varphi$

(ii) $x' = x \cos\varphi + y \operatorname{sen}\varphi, \quad y' = -x \operatorname{sen}\varphi + y \cos\varphi.$

EJEMPLO 1 En la Figura 11.36 se tiene la gráfica de la ecuación $xy = 1$, o equivalentemente, $y = 1/x$. Si se giran 45° los ejes coordenados, encuentre la ecuación de la gráfica en el nuevo sistema coordenado $x'y'$.

FIGURA 11.36

$y = 1/x$



SOLUCIÓN Si hacemos $\varphi = 45°$ en (i) de las fórmulas de rotación de ejes, obtenemos

$$x = x'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x' - y')$$

$$y = x'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x' + y').$$

Sustituyendo estas expresiones de x y y en la ecuación $xy = 1$,

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x' - y')\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x' + y') = 1.$$

Esta ecuación se reduce a

$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1,$$

que es la ecuación de una hipérbola con vértices $(\pm\sqrt{2}, 0)$ sobre el eje x'. Nótese que en el nuevo sistema las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola son $y' = \pm x'$. Estas corresponden a los ejes originales x y y. ■

El Ejemplo 1 ilustra un método que permite eliminar el término que contiene al producto xy en una ecuación. Esta técnica puede usarse para transformar cualquier ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

en donde $b \neq 0$, en una ecuación en x' y y' que no tenga término $x'y'$. A continuación demostraremos que esto siempre se cumple. Si se giran los ejes un ángulo φ, entonces al sustituir las expresiones para x y y en las fórmulas de (i) para la rotación de ejes, obtenemos

$$A(x' \cos \varphi - y' \operatorname{sen} \varphi)^2 + B(x' \cos \varphi - y' \operatorname{sen} \varphi)(x' \operatorname{sen} \varphi + y' \cos \varphi) + C(x' \operatorname{sen} \varphi + y' \cos \varphi)^2 + D(x' \cos \varphi - y' \operatorname{sen} \varphi) + E(x' \operatorname{sen} \varphi + y' \cos \varphi) + F = 0.$$

Esta última expresión puede escribirse en la forma

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F = 0$$

en donde el coeficiente B' de $x'y'$ está dado por

$$B' = 2(C - A) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + B(\cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi).$$

Con el objeto de eliminar al término $x'y'$ debemos elegir φ de tal forma que

$$2(C - A) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + B(\cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi) = 0.$$

Las fórmulas del seno y el coseno del ángulo doble, permiten escribir la última ecuación como

$$(C - A) \operatorname{sen} 2\varphi + B \cos 2\varphi = 0,$$

que equivale a

$$\cot 2\varphi = \frac{A - C}{B}.$$

Esto comprueba el siguiente resultado.

TEOREMA

Para eliminar el término xy de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

en donde $B \neq 0$, elíjase un ángulo φ tal que

$$\cot 2\varphi = \frac{A - C}{B}$$

y se utilizan luego las fórmulas de rotación de ejes.

Se deduce que la gráfica de una ecuación en x y y del tipo mencionado en el teorema anterior, es una cónica, excepto en ciertos casos de degradación (o degenerados).

EJEMPLO 1 Analizar y trazar la gráfica de la ecuación

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 - 25 = 0.$$

SOLUCIÓN Aplicando la notación del teorema anterior tenemos que

$$A = 41, \quad B = -24, \quad C = 34,$$

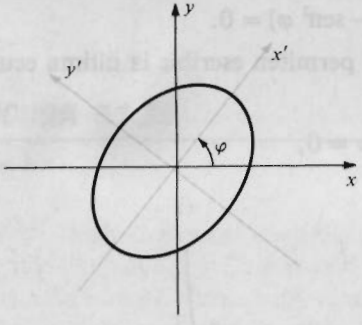
y
$$\cot 2\varphi = \frac{41 - 34}{-24} = -\frac{7}{24}.$$

Como $\cot 2\varphi$ es negativo podemos escoger a 2φ de manera que $90° < 2\varphi < 180°$ y, en consecuencia, $\cos 2\varphi = -\frac{7}{25}$ (¿Por qué?). Ahora usamos las fórmulas del semiángulo y obtenemos

$$\operatorname{sen} \varphi = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (-\frac{7}{25})}{2}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (-\frac{7}{25})}{2}} = \frac{3}{5}.$$

FIGURA 11.37



De aquí deducimos que las fórmulas deseadas para la rotación de ejes son

$$x = \tfrac{3}{5}x' - \tfrac{4}{5}y', \qquad y = \tfrac{4}{5}x' + \tfrac{3}{5}y'.$$

El lector demostrará que sustituyendo estos valores de x y y en la ecuación dada y simplificando, se obtiene la ecuación

$$(x')^2 + 2(y')^2 = 1.$$

Por lo tanto, la gráfica es una elipse con vértice en $(\pm 1, 0)$ sobre el eje x'. Como $\tan \varphi = \operatorname{sen} \varphi / \cos \varphi = (\frac{4}{5}) / (\frac{3}{5}) = \frac{4}{3}$, obtenemos $\varphi = \tan^{-1}(\frac{4}{3})$. Con aproximación al minuto, $\varphi \approx 53°8'$. En la Figura 11.37 se presenta la gráfica. ■

En algunos casos, después de eliminar el término xy, la ecuación resultante contendrá un término en x' o en y'. Es necesario entonces trasladar los ejes del sistema coordenado $x'y'$ para obtener la gráfica. En los siguientes ejercicios se tienen varios problemas de este tipo.

Ejercicios 11.8

En los Ejercicios 1 a 14, después de realizar una rotación de ejes adecuada, describa y trace la gráfica de cada una de las ecuaciones dadas.

1. $32x^2 - 72xy + 53y^2 = 80$
2. $7x^2 - 48xy - 7y^2 = 225$
3. $11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 = 4$
4. $x^2 - xy + y^2 = 3$
5. $5x^2 - 8xy + 5y^2 = 9$
6. $11x^2 - 10\sqrt{3}xy + y^2 = 20$
7. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y + 100 = 0$
8. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 8\sqrt{3}x - 8y + 32 = 0$
9. $5x^2 + 6\sqrt{3}xy - y^2 + 8x - 8\sqrt{3}y - 12 = 0$
10. $18x^2 - 48xy + 82y^2 + 6\sqrt{10}x + 2\sqrt{10}y - 80 = 0$
11. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 6\sqrt{5}x - 18\sqrt{5}y + 45 = 0$
12. $15x^2 + 20xy - 4\sqrt{5}x + 8\sqrt{5}y - 100 = 0$
13. $40x^2 - 36xy + 25y^2 - 8\sqrt{13}x - 12\sqrt{13}y = 0$
14. $64x^2 - 240xy + 225y^2 + 1020x - 544y = 0$
15. Demuestre que, excepto en casos de degeneración, la gráfica de la ecuación cuadrática en x y y es

(a) una parábola si $B^2 - 4AC = 0$.
(b) una elipse si $B^2 - 4AC < 0$.
(c) una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$.

16. Use los resultados del Ejercicio 15 para determinar la naturaleza de las gráficas de los Ejercicios 1 a 14.

17. Las matrices X, X' y A se definen por

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

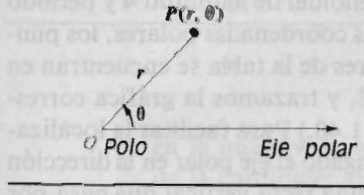
Demuestre que las fórmulas para la rotación de ejes se pueden escribir como

(i) $X = AX'$, (ii) $X' = A^{-1}X$.

11.9 Coordenadas polares

En un sistema coordenado rectangular el par (a, b) denota el punto cuyas distancias dirigidas a los ejes x y y son b y a, respectivamente. Otro método para representar los puntos de un plano es por medio de las *coordenadas polares*. Se toma un punto fijo O (llamado **polo**) y una semirrecta dirigida (llamada **eje polar**) cuyo punto inicial es O. Consideremos ahora un punto P en el plano, diferente de O. Si, como se ilustra en la Figura 11.38, $r = d(O, P)$ y θ denota el ángulo determinado por el eje polar y OP, entonces r y θ se llaman **coordenadas polares** de P y los símbolos (r, θ) o bien $P(r, \theta)$ se usan para denotar a P. Como de costumbre, θ es positivo si el ángulo se genera mediante una rotación del eje polar en sentido opuesto al del reloj, y negativo si la rotación es en el sentido del reloj. Pueden usarse radianes o grados para medir θ.

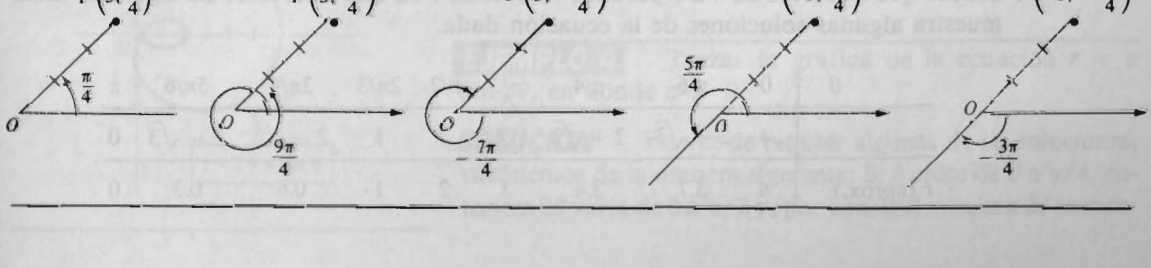
FIGURA 11.38



Las coordenadas polares de un punto no son únicas. Por ejemplo, $(3, \pi/4)$, $(3, 9\pi/4)$ y $(3, -7\pi/4)$ representan el mismo punto (véase la Figura 11.39). Puede considerarse a r negativo también y en vez de medir $|r|$ unidades a lo largo de la semirrecta determinada por θ, se toman $|r|$ unidades a lo largo de la semirrecta que comienza en O y cuya dirección es *opuesta* a la recta determinada por θ. En la Figura 11.39 se muestran también los puntos determinados por los pares $(-3, 5\pi/4)$ y $(-3, -3\pi/4)$.

Finalmente, se conviene en que el polo O tiene coordenadas polares $(0, \theta)$, *cualquiera* que sea θ. Cuando se asignan pares ordenados de la forma (r, θ) a puntos del plano se tiene un **sistema de coordenadas polares**; el plano se denomina **plano** $r\theta$.

FIGURA 11.39



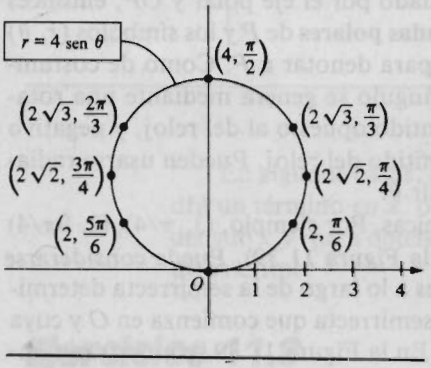
De manera análoga a las ecuaciones en x y y, consideraremos ahora **ecuaciones polares**, es decir, ecuaciones en r y θ. Una **solución** de una ecuación de este tipo es el par ordenado (a, b), tal que al sustituir en la ecuación r por a y θ por b, se obtiene una igualdad. La **gráfica** de una ecuación polar es el conjunto de todos los puntos (en el plano $r\theta$) que corresponden a las soluciones.

EJEMPLO 1 Trazar la gráfica de la ecuación polar $r = 4 \operatorname{sen} \theta$.

SOLUCIÓN En la siguiente tabla se muestran algunas soluciones de la ecuación. Como una ayuda para localizar puntos, se ha incluido un tercer renglón en la tabla que da aproximaciones.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r	0	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	2	0
r (aprox.)	0	2	2.8	3.4	4	3.4	2.8	2	0

FIGURA 11.40



En coordenadas rectangulares, la gráfica de la ecuación dada corresponde a una onda senoidal de amplitud 4 y periodo 2π. Sin embargo, si se usan las coordenadas polares, los puntos correspondientes a los pares de la tabla se encuentran en una circunferencia de radio 2, y trazamos la gráfica correspondiente. (Véase la Figura 11.40.) Para facilitar la localización de los puntos se ha prolongado el eje polar en la dirección negativa y se ha introducido una recta vertical que pasa por el polo.

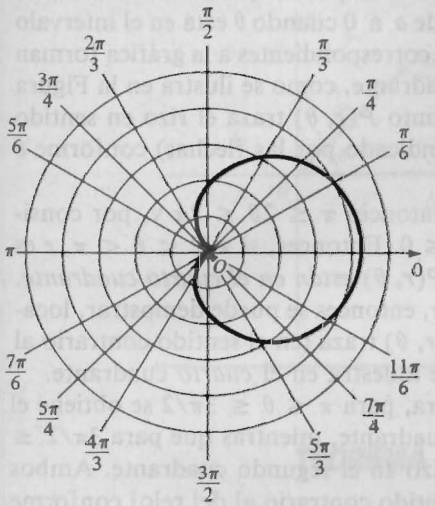
En el Ejemplo 5 demostraremos que la gráfica $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ es una circunferencia. Los puntos adicionales que se obtienen cuando θ toma valores entre π y 2π, se encuentran sobre la misma curva. Por ejemplo, la solución $(-2, 7\pi/6)$ da el mismo punto que $(2, \pi/6)$; el punto correspondiente a $(-2\sqrt{2}, 5\pi/4)$ es el mismo que el que se obtiene con $(2\sqrt{2}, \pi/4)$; etcétera. Si θ toma todos los valores de los números reales, obtenemos los mismos puntos una y otra vez debido a la periodicidad de la función seno. ■

EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de la ecuación $r = 2 + 2 \cos \theta$.

SOLUCIÓN Como la función coseno decrece de 1 a -1 cuando θ varía de 0 a π, se deduce que r decrece de 4 a 0 para los valores de θ en este intervalo. La siguiente tabla muestra algunas soluciones de la ecuación dada.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r	4	$2+\sqrt{3}$	$2+\sqrt{2}$	3	2	1	$2-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{3}$	0
r (aprox.)	4	3.7	3.4	3	2	1	0.6	0.3	0

FIGURA 11.41



Localizando puntos se obtiene la mitad superior de la gráfica mostrada en la Figura 11.41, en la que se ha usado papel para graficación en coordenadas polares, la cual presenta rectas que parten de O a distintos ángulos, y circunferencias concéntricas con centro en el polo.

Si θ toma valores de π a 2π, $\cos\theta$ crece de -1 a 1, y en consecuencia, r aumenta de 0 a 4. Si representamos geométricamente los puntos para $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ se obtiene la mitad inferior de la gráfica.

Se puede obtener la misma gráfica tomando otros intervalos para θ. ■

La gráfica con forma de corazón del Ejemplo 2 se denomina **cardioide**. En general, la gráfica de cualquier ecuación polar de la forma

$$r = a(1 + \cos\theta), \qquad r = a(1 + \operatorname{sen}\theta),$$

$$r = a(1 - \cos\theta), \qquad r = a(1 - \operatorname{sen}\theta),$$

en donde a es un número real, en una cardioide.

La gráfica de una ecuación de la forma

$$r = a + b\cos\theta \quad \text{o bien} \quad r = a + b\operatorname{sen}\theta,$$

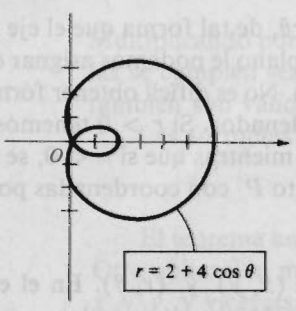
en la que $a \neq b$, se llama **caracol** o **limazón**. La forma de la gráfica es parecida a la de la cardioide; sin embargo, puede tener un lazo o rizo adicional, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de $r = 2 + 4\cos\theta$.

SOLUCIÓN Algunos de los puntos correspondientes $0 \leq \theta \leq \pi$, se indican en la siguiente tabla.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r	6	$2+2\sqrt{3}$	$2+2\sqrt{2}$	4	2	0	$2-2\sqrt{2}$	$2-2\sqrt{3}$	-2
r (aprox.)	6	5.4	4.8	4	2	0	-0.8	-1.4	-2

FIGURA 11.42

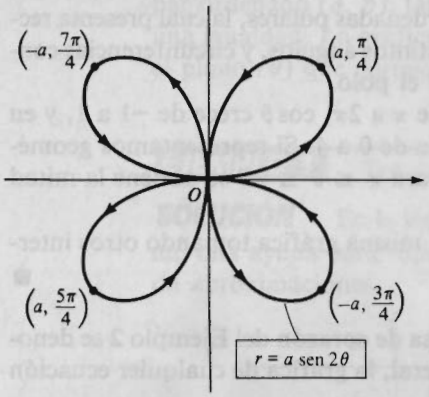


Nótese que $r = 0$ en $\theta = 2\pi/3$. Si $2\pi/3 < \theta \leq \pi$, los valores de r son negativos, y esto lleva a la mitad inferior del rizo pequeño mostrado en la Figura 11.42. (Verificar este hecho.) Dejando que θ varíe de π a 2π se obtiene la parte superior del rizo pequeño y la mitad inferior del rizo grande. ■

EJEMPLO 4 Trazar la gráfica de la ecuación $r = a\operatorname{sen}2\theta$, en donde $a > 0$.

SOLUCIÓN En vez de tabular algunas de las soluciones, razonemos de la manera siguiente: Si θ crece de 0 a $\pi/4$, entonces 2θ varía de 0 a $\pi/2$ y, por consiguiente, sen 2θ aumen-

FIGURA 11.43



ta de 0 a 1. Se deduce que r aumenta de 0 a a cuando θ está en el intervalo $[0, \pi/4]$. Si ahora θ crece de $\pi/4$ a $\pi/2$, entonces 2θ cambia de $\pi/2$ a π por lo que $\operatorname{sen} 2\theta$ decrece de 1 a 0. Así, r disminuye de a a 0 cuando θ está en el intervalo $[\pi/4, \pi/2]$. Los puntos correspondientes a la gráfica forman un lazo en el primer cuadrante, como se ilustra en la Figura 11.43. Nótese que el punto $P(r, \theta)$ traza el rizo en sentido *contrario al del reloj* (indicado por las flechas) conforme θ aumenta de 0 a $\pi/2$.

Si $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, entonces $\pi \leq 2\theta \leq 2\pi$ y, por consiguiente, $r = a \operatorname{sen} 2\theta \leq 0$. Entonces, si $\pi/2 < \theta < \pi$, r es negativo y *los puntos $P(r, \theta)$ están en el cuarto cuadrante.* Si θ aumenta de $\pi/2$ a π, entonces se puede demostrar, localizando puntos, que $P(r, \theta)$ traza (en el sentido contrario al del reloj) el rizo que se muestra en el *cuarto* cuadrante.

De la misma manera, para $\pi \leq \theta \leq 3\pi/2$ se obtiene el lazo o rizo del tercer cuadrante, mientras que para $3\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi$ se obtiene el rizo en el segundo cuadrante. Ambos lazos se trazan en el sentido contrario al del reloj conforme θ aumenta. El lector debe verificar estos hechos graficando algunos puntos con, por ejemplo, $a = 1$. En la Figura 11.43 se han localizado sólo aquellos puntos que corresponden a los mayores valores numéricos de r. ■

La gráfica del Ejemplo 4 se denomina **rosa de cuatro pétalos** (o **folios**). En general, cualquier ecuación de la forma

$$r = a \operatorname{sen} n\theta \quad \text{o bien} \quad r = a \cos n\theta,$$

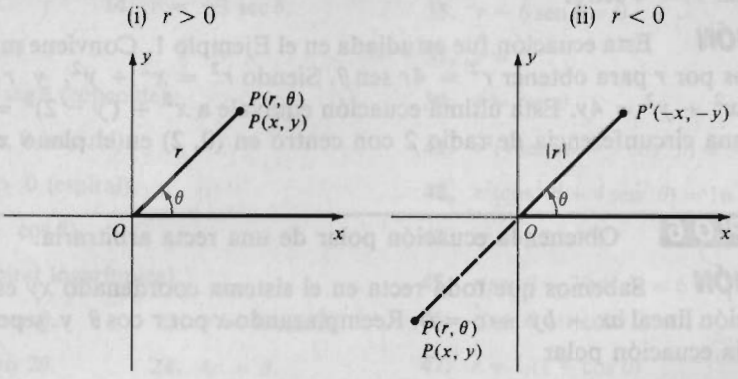
en donde n es un entero positivo mayor que 1 y a es un número real, tiene una gráfica que consiste en un cierto número de rizos unidos al origen. Si n es par hay $2n$ rizos, mientras que si n es impar, hay n lazos. (Véanse, por ejemplo, los Ejercicios 9, 10 y 22.)

Se obtienen muchas otras gráficas interesantes a partir de las ecuaciones polares. Algunas de ellas se incluyen en los ejercicios al final de esta sección. Las coordenadas polares son muy útiles en las aplicaciones donde se tienen circunferencias con centro en el polo o rectas que pasan por el polo, ya que las ecuaciones que tienen estas gráficas son muy sencillas en forma polar; $r = k$ o bien $\theta = k$, siendo k una constante. (Verifíquese lo anterior.)

Vamos ahora a sobreponer un plano xy a un plano $r\theta$, de tal forma que el eje positivo x coincida con el eje polar. A cualquier punto P del plano le podemos asignar coordenadas rectangulares (x, y) o coordenadas polares (r, θ). No es difícil obtener fórmulas que especifiquen la relación entre los dos sistemas coordenados. Si $r > 0$ tenemos una situación similar a la ilustrada en (i) de la Figura 11.44, mientras que si $r < 0$, se tiene el caso ilustrado en (ii) de la figura, se ha situado el punto P' con coordenadas polares $(|r|, \theta)$ y coordenadas rectangulares $(-x, -y)$.

El siguiente teorema especifica las relaciones entre (x, y) y (r, θ). En el enunciado del teorema se supone que el eje x positivo coincide con el eje polar.

FIGURA 11.44



TEOREMA

Las coordenadas rectangulares (x, y) y las coordenadas polares (r, θ) de un punto P están relacionadas como sigue:

(i) $x = r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta$

(ii) $\tan\theta = \dfrac{y}{x}, \quad r^2 = x^2 + y^2.$

DEMOSTRACIÓN Aunque se ha representado θ como un ángulo agudo en la Figura 11.44, la siguiente discusión es válida para todos los ángulos. Por otra parte, si $r > 0$, como en la Figura 11.44(i), entonces $\cos\theta = x/r$, $\text{sen}\,\theta = y/r$, y por lo tanto,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta.$$

Por otra parte, si $r < 0$, la Figura 11.44(ii) y el hecho de que $|r| = -r$, muestran que

$$\cos\theta = \frac{-x}{|r|} = \frac{-x}{-r} = \frac{x}{r},$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{-y}{|r|} = \frac{-y}{-r} = \frac{y}{r}.$$

Multiplicando por r obtenemos $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$; por consiguiente estas fórmulas se cumplen sea r positiva o negativa. Si $r = 0$, el punto se encuentra en el polo y también son válidas las fórmulas en (i).

Las fórmulas en la parte (ii) se siguen directamente de la Figura 11.44. □

El teorema anterior se puede usar para pasar de un sistema de coordenadas a otro. Otra aplicación más importante es transformar una ecuación polar a una ecuación en x y y, y viceversa, como se ilustra en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 5 Hallar una ecuación en x y y que tenga la misma gráfica que la ecuación polar $r = 4 \operatorname{sen}\theta$.

SOLUCIÓN Esta ecuación fue estudiada en el Ejemplo 1. Conviene multiplicar ambos lados por r para obtener $r^2 = 4r \operatorname{sen}\theta$. Siendo $r^2 = x^2 + y^2$, y $r \operatorname{sen}\theta = y$, se obtiene $x^2 + y^2 = 4y$. Esta última ecuación equivale a $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, cuya gráfica es una circunferencia de radio 2 con centro en (0, 2) en el plano xy. ■

EJEMPLO 6 Obtener la ecuación polar de una recta arbitraria.

SOLUCIÓN Sabemos que toda recta en el sistema coordenado xy es la gráfica de la ecuación lineal $ax + by + c = 0$. Reemplazando x por $r\cos\theta$ y y por $r \operatorname{sen}\theta$ obtenemos la ecuación polar

$$ar\cos\theta + br\operatorname{sen}\theta + c = 0$$

o sea

$$r(a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta) + c = 0.$$ ■

Si se sobrepone un plano xy a un plano $r\theta$, entonces la gráfica de una ecuación polar puede ser simétrica con respecto al eje x, al eje y, o al origen. El lector demostrará que si una de las sustituciones indicadas en la siguiente tabla no cambia las soluciones de la ecuación polar, entonces la gráfica tiene la simetría indicada.

PRUEBAS DE SIMETRÍA

Sustitución	*Simetría con respecto a*
$-\theta$ en lugar de θ	la recta $\theta = 0$ (eje x)
$-r$ en lugar de r	el polo (origen)
$\pi + \theta$ en lugar de θ	el polo (origen)
$\pi - \theta$ en lugar de θ	la recta $\theta = \pi/2$ (eje y)

Por ejemplo: siendo $\cos(-\theta) = \cos\theta$, la gráfica de la ecuación del Ejemplo 2 es simétrica con respecto al eje x. Como $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$, la gráfica del Ejemplo 1 es simétrica con respecto al eje y. La gráfica del Ejemplo 4 es simétrica con respecto a ambos ejes y al origen. Pueden establecerse otros criterios de simetría; sin embargo, los que hemos señalado son los más sencillos de aplicar.

Ejercicios 11.9

Trace la gráfica de cada una de las ecuaciones dadas en los Ejercicios 1 a 24.

1. $r = 5$
2. $\theta = \pi/4$
3. $\theta = -\pi/6$
4. $r = -2$
5. $r = 4\cos\theta$
6. $r = -2\operatorname{sen}\theta$
7. $r = 4(1 - \operatorname{sen}\theta)$
8. $r = 1 + 2\cos\theta$
9. $r = 8\cos 3\theta$
10. $r = 2\operatorname{sen} 4\theta$
11. $r^2 = 4\cos 2\theta$ (lemniscato)

12. $r = 6 \operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\theta)$

13. $r = 4 \csc\theta$. **14.** $r = -3 \sec\theta$.

15. $r = 2 - \cos\theta$

16. $r = 2 + 2\sec\theta$ (concoide).

17. $r = 2^\theta$, $\theta \geq 0$ (espiral).

18. $r\theta = 1$, $\theta > 0$ (espiral).

19. $r = -6(1 + \cos\theta)$.

20. $r = e^{2\theta}$ (espiral logarítmica).

21. $r = 2 + 4\operatorname{sen}\theta$. **22.** $r = 8\cos 5\theta$.

23. $r^2 = -16\operatorname{sen} 2\theta$. **24.** $4r = \theta$.

En los Ejercicios 25 a 32 encuentre la ecuación polar que tenga la misma gráfica de la ecuación dada.

25. $x = -3$ **26.** $y = 2$

27. $x^2 + y^2 = 16$ **28.** $x^2 = 8y$

29. $y = 6$ **30.** $y = 6x$

31. $x^2 - y^2 = 16$ **32.** $9x^2 + 4y^2 = 36$

En los Ejercicios 33 a 48 encuentre una ecuación en x y y que tenga la misma gráfica de la ecuación polar dada y úsela como ayuda para trazar la gráfica en un sistema ordenado polar.

33. $r\cos\theta = 5$ **34.** $r\operatorname{sen}\theta = -2$

35. $r - 6\operatorname{sen}\theta = 0$ **36.** $r = 6\cot\theta$

37. $r = 2$ **38.** $\theta = \pi/4$

39. $r = \tan\theta$ **40.** $r = 4\sec\theta$

41. $r^2(4\operatorname{sen}^2\theta - 9\cos^2\theta) = 36$

42. $r^2(\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta) = 16$

43. $r^2\cos 2\theta = 1$ **44.** $r^2\operatorname{sen} 2\theta = 4$

45. $r(\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta) = 6$

46. $r(\operatorname{sen}\theta + r\cos^2\theta) = 1$

47. $r = 1/(1 + \cos\theta)$ **48.** $r = 4/(2 + \operatorname{sen}\theta)$

49. Si $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ son puntos del plano $r\theta$, use la ley de los cosenos para probar que

$$[d(P_1, P_2)]^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1).$$

50. Demuestre que las gráficas de las siguientes ecuaciones polares son circunferencias y determine en cada caso el centro y el radio.

(a) $r = a\operatorname{sen}\theta$, $a \neq 0$

(b) $r = b\cos\theta$, $b \neq 0$

(c) $r = a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta$, $ab \neq 0$

11.10 Ecuaciones polares de las cónicas

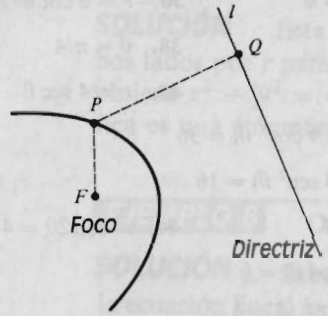
El siguiente teorema proporciona otro método para describir las secciones cónicas.

TEOREMA

Sean F un punto fijo y l una recta fija en un plano. El conjunto de todos los puntos P del plano tales que la razón $d(P, F)/d(P, Q)$ es una constante positiva e, en donde $d(P, Q)$ es la distancia de P a l, es una sección cónica. La cónica será una parábola si $e = 1$, una elipse si $0 < e < 1$, o una hipérbola si $e > 1$.

La constante e se llama **excentricidad** de la cónica. Veremos que el punto F es un foco de tal curva. La recta l se llama **directriz**. Una situación común se ilustra en la Figura 11.45, en donde la curva indica la posible posición de P.

FIGURA 11.45



Si $e = 1$, se tiene $d(P, F) = d(P, Q)$ y, por definición, la curva que se obtiene es una parábola con foco F y directriz l.

Supongamos ahora que $0 < e < 1$. Es conveniente utilizar un sistema coordenado polar en el plano con F como polo y con l perpendicular al eje polar en el punto $D(d, 0)$, para $d > 0$. Si $P(r, \theta)$ es un punto del plano tal que $d(P, F)/d(P, Q) = e < 1$, vemos en la Figura 11.46 que P se encuentra a la izquierda de l. Sea C la proyección de P sobre el eje polar. Siendo

$$d(P, F) = r \quad \text{y} \quad d(P, Q) = \overline{FD} - \overline{FC} = d - r\cos\theta,$$

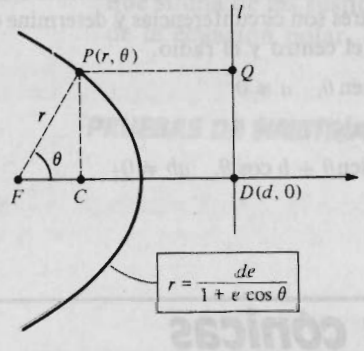
se deduce que P satisface la condición del teorema si y sólo si

$$\frac{r}{d - r\cos\theta} = e$$

o equivalentemente

$$r = de - er\cos\theta.$$

FIGURA 11.46



Al despejar r obtenemos

$$r = \frac{de}{1 + e\cos\theta},$$

esta es una ecuación polar de la gráfica. La misma ecuación se obtiene si $e = 1$; sin embargo, si $e = 1$ y $1 + \cos\theta = 0$, no existe ningún punto (r, θ) sobre la gráfica.

La ecuación rectangular correspondiente a $r = de - er\cos\theta$ es

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = de - ex.$$

Elevando al cuadrado ambos lados y reordenando los términos llegamos a

$$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = d^2e^2.$$

Completando el cuadrado de la ecuación anterior y simplificando,

$$\left(x + \frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2}.$$

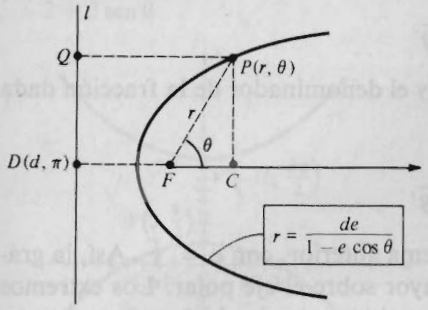
Finalmente, dividiendo ambos lados entre $d^2e^2/(1 - e^2)^2$ se llega a una ecuación de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en la que $h = -de^2/(1 - e^2)$. Por consiguiente, la gráfica es una elipse con centro en el punto $(-de^2/(1 - e^2), 0)$ sobre el eje x y donde

$$a^2 = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2}, \qquad b^2 = \frac{d^2e^2}{1 - e^2}.$$

FIGURA 11.47



Como $c^2 = a^2 - b^2 = \dfrac{d^2e^4}{(1-e^2)^2}$,

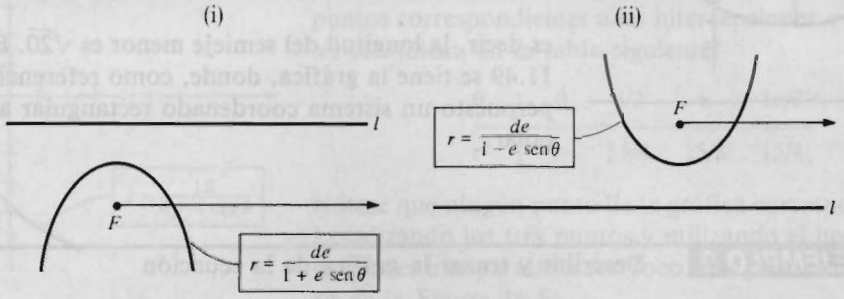
vemos que $c = de^2/(1 - e^2)$. Esto demuestra que F es el foco de la elipse. También se deduce que $e = c/a$. Se puede hacer una demostración similar para el caso en que $e > 1$.

Recíprocamente, puede demostrarse que toda cónica que no es una circunferencia puede describirse por medio de lo enunciado en el teorema. Esto da una formulación de las secciones cónicas que equivale al enfoque anterior. Este teorema, que incluye los tres tipos de cónicas, puede tomarse como definición de las secciones cónicas.

Si se hubiera escogido el foco F a la *derecha* de la directriz, como se ilustra en la Figura 11.47 (para la que $d > 0$), entonces se habría obtenido la ecuación $r = de/(1 - e\cos\theta)$. (Nótese el signo menos en lugar del signo más.) Si d es negativo, ocurre otro cambio de signo.

Si l es *paralela* al eje polar y pasa por el punto $(d, \pi/2)$ o por el $(d, 3\pi/2)$, como se ilustra en la Figura 11.48, entonces las ecuaciones correspondientes contendrán sen θ en lugar de cos θ. El lector deberá demostrar estas propiedades.

FIGURA 11.48



El siguiente teorema es un resumen de lo que se acaba de mencionar.

TEOREMA

Una ecuación polar cuya forma es como una de las siguientes:

$$r = \frac{de}{1 \pm e\cos\theta}, \qquad r = \frac{de}{1 \pm e\,\text{sen}\,\theta}$$

es una sección cónica. La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $0 < e < 1$, o una hipérbola si $e > 1$.

EJEMPLO 1 Describir y trazar la gráfica de la ecuación

$$r = \frac{10}{3 + 2\cos\theta}.$$

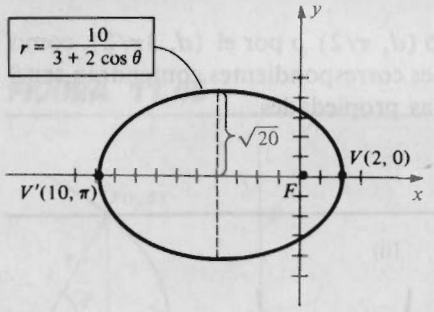
SOLUCIÓN Dividiendo entre 3 el numerador y el denominador de la fracción dada obtenemos

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 + \frac{2}{3}\cos\theta},$$

que tiene una de las formas enunciadas en el teorema anterior, con $e = \frac{2}{3}$. Así, la gráfica es una elipse con foco F en el polo y eje mayor sobre el eje polar. Los extremos del eje mayor se pueden obtener haciendo $\theta = 0$ y $\theta = \pi$; se obtiene así $V(2, 0)$ y $V'(10, \pi)$. De aquí que

$$2a = d(V', V) = 12 \quad \text{o bien} \quad a = 6.$$

FIGURA 11.49



El centro de la elipse es el punto medio del segmento $V'V$, o sea $(4, \pi)$. Siendo $e = c/a$, obtenemos

$$c = ae = 6(\tfrac{2}{3}) = 4.$$

Por consiguiente,

$$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20,$$

es decir, la longitud del semieje menor es $\sqrt{20}$. En la Figura 11.49 se tiene la gráfica, donde, como referencia, se ha superpuesto un sistema coordenado rectangular a un sistema polar. ■

EJEMPLO 2 Describir y trazar la gráfica de la ecuación

$$r = \frac{10}{2 + 3\,\text{sen}\,\theta}.$$

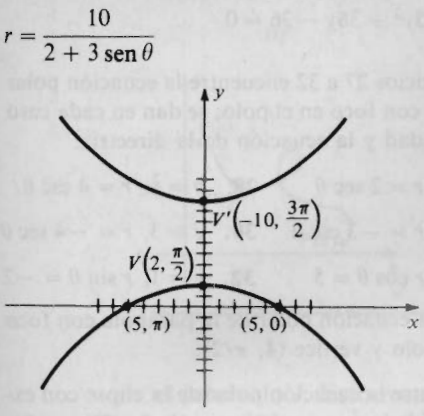
SOLUCIÓN Para expresar la ecuación en la forma conveniente dividimos entre 2 el numerador y el denominador de la fracción dada, obteniendo

$$r = \frac{5}{1 + \frac{3}{2}\,\text{sen}\,\theta}.$$

Así, $e = \frac{3}{2}$ y la gráfica es una hipérbola con foco en el polo. La expresión $\text{sen}\,\theta$ indica que el eje transversal de la hipérbola es perpendicular al eje polar. Para determinar los vértices hacemos a $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$ en la ecuación dada. Esto da los puntos $V(2, \pi/2)$ y $V'(-10, 3\pi/2)$, y por consiguiente,

$$2a = d(V, V') = 8 \quad \text{o bien} \quad a = 4.$$

FIGURA 11.50



Los puntos de la gráfica $(5, 0)$ y $(5, \pi)$ dan una idea aproximada de la rama inferior de la hipérbola; obtenemos la rama superior por simetría, como se ilustra en la Figura 11.50. Si se desean datos adicionales o mayor precisión, podemos calcular

$$c = ae = 4\left(\tfrac{3}{2}\right) = 6$$

y

$$b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20.$$

Las asíntotas se pueden construir en la forma usual. ■

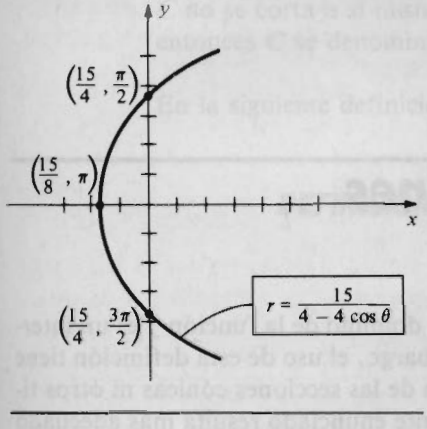
Trazar la gráfica de la ecuación

$$r = \frac{15}{4 - 4\cos\theta}.$$

SOLUCIÓN Para obtener la forma apropiada, se divide entre 4 el numerador y el denominador, obteniendo

$$r = \frac{\frac{15}{4}}{1 - \cos\theta}.$$

FIGURA 11.51



Por consiguiente, $e = 1$ y la gráfica es una parábola con foco en el polo. Se puede aproximar la gráfica localizando los puntos correspondientes a las intercepciones x y y, las cuales se indican en la tabla siguiente:

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
r	—	15/4	15/8	15/4

Nótese que ningún punto de la gráfica corresponde a $\theta = 0$. Localizando los tres puntos y utilizando el hecho de que la gráfica es una parábola con foco en el polo, se obtiene el trazo de la Figura 11.51. ■

Si sólo se desea una idea aproximada de la gráfica de una cónica, el método empleado en el Ejemplo 3 es recomendable. Para usar esta técnica, se localizan (si es posible) los puntos correspondientes a $\theta = 0$, $\pi/2$, π y $3\pi/2$. Estos puntos, junto con el tipo de la cónica (obtenido a partir del valor de e) facilitan el trazo.

Ejercicios 11.10

En los Ejercicios 1 a 10, identifique y trace la gráfica de la ecuación dada.

1. $r = \dfrac{12}{6 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta}$

2. $r = \dfrac{12}{6 - 2\,\mathrm{sen}\,\theta}$

3. $r = \dfrac{12}{2 - 6\cos\theta}$

4. $r = \dfrac{12}{2 + 6\cos\theta}$

5. $r = \dfrac{3}{2 + 2\cos\theta}$

6. $r = \dfrac{3}{2 - 2\,\mathrm{sen}\,\theta}$

7. $r = \dfrac{4}{\cos\theta - 2}$ **8.** $r = \dfrac{4\sec\theta}{2\sec\theta - 1}$

9. $r = \dfrac{6\csc\theta}{2\csc\theta + 3}$

10. $r = \csc\theta(\csc\theta - \cot\theta)$

11.-20. Encuentre la ecuación cartesiana rectangular respectiva para cada una las gráficas de los Ejercicios 1 a 10.

En los Ejercicios 21 a 26 exprese la ecuación dada en forma polar, y luego determine su excentricidad y la ecuación de la directriz.

21. $y^2 = 4 - 4x$

22. $x^2 = 1 - 2y$

23. $3y^2 - 16y - x^2 + 16 = 0$

24. $5x^2 + 9y^2 = 32x + 64$

25. $8x^2 + 9y^2 + 4x = 4$

26. $4x^2 - 5y^2 + 36y - 36 = 0$

En los Ejercicios 27 a 32 encuentre la ecuación polar de la cónica con foco en el polo; se dan en cada caso la excentricidad y la ecuación de la directriz.

27. $e = \frac{1}{3}$, $r = 2\sec\theta$ **28.** $e = \frac{2}{5}$, $r = 4\csc\theta$

29. $e = 4$, $r = -3\csc\theta$ **30.** $e = 3$, $r = -4\sec\theta$

31. $e = 1$, $r\cos\theta = 5$ **32.** $e = 1$, $r\sin\theta = -2$

33. Halle la ecuación polar de la parábola con foco en el polo y vértice $(4, \pi/2)$.

34. Encuentre la ecuación polar de la elipse con excentricidad $\frac{2}{3}$, un vértice en $(1, 3\pi/2)$ y un foco en el polo

35. Demuestre el teorema de esta sección para el caso en que $e > 1$.

36. Deduzca las fórmulas $r = de/(1 \pm e\,\text{sen}\,\theta)$ consideradas en esta sección.

11.11 Curvas planas y ecuaciones paramétricas

La gráfica de una ecuación $y = f(x)$, en donde el dominio de la función f es un intervalo I, se llama algunas veces *curva plana*. Sin embargo, el uso de esta definición tiene muchas limitaciones porque no incluye la mayoría de las secciones cónicas ni otros tipos de gráficas que son de gran utilidad. El siguiente enunciado resulta más adecuado en la mayoría de las aplicaciones.

DEFINICIÓN

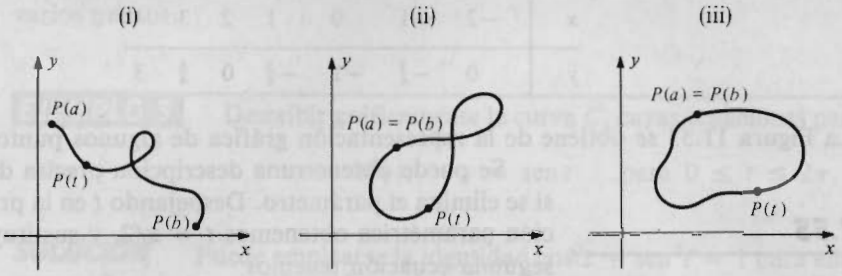
Una **curva plana** es un conjunto C de pares ordenados de la forma

$$(f(t), g(t))$$

en donde f y g son funciones definidas en un intervalo I.

En general, se usa simplemente el término **curva** en vez de curva plana. La **gráfica** de C es el conjunto de todos los puntos $P(t) = (f(t), g(t))$ de un plano coordenado rectangular que corresponde a los pares ordenados. Cada $P(t)$ es un *punto* de la curva. Se usará el término *curva* de modo intercambiable con *gráfica*. Algunas veces resulta conveniente considerar que el punto $P(t)$ recorre la curva C a medida que t varía en

FIGURA 11.52



el intervalo I. Esto resulta especialmente útil en aplicaciones en las que r representa el tiempo; $P(t)$ es entonces la posición de una partícula en movimiento en el instante t.

En la Figura 11.52 se representan algunas gráficas o curvas, para el caso en que I es un intervalo cerrado $[a, b]$. Si, como en (i) de la figura, $P(a) \neq P(b)$, entonces $P(a)$ y $P(b)$ son los **puntos extremos** de C. Nótese que la curva representada en (i) se corta a sí misma; es decir, que dos valores distintos de t dan el mismo punto. Si $P(a) = P(b)$, como se ilustra en (ii), entonces C se llama **curva cerrada**. Si $P(a) = P(b)$, y C no se corta a sí misma en ningún otro punto, como se ilustra en (iii) de la figura, entonces C se denomina **curva cerrada simple**.

En la siguiente definición se da una manera conveniente de representar curvas.

DEFINICIÓN

Sea C la curva que consiste en todas las parejas ordenadas $(f(t), g(t))$, en las que f y g están definidas en un intervalo I. Las ecuaciones

$$x = f(t), \qquad y = g(t),$$

para t en I, se llaman **ecuaciones paramétricas** de C, y t es un **parámetro.**

Si las ecuaciones paramétricas se conocen, entonces a medida que t varía en el intervalo I, el punto $P(x, y)$ recorre la curva. Como se muestra en el siguiente ejemplo algunas veces es posible eliminar el parámetro y obtener una ecuación rectangular para C en la que intervienen las variables x y y.

EJEMPLO 1 Describir y trazar la gráfica de la curva C dada paramétricamente por

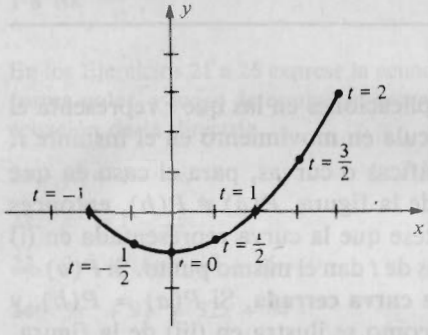
$$x = 2t, \quad y = t^2 - 1 \text{ en donde } -1 \leq t \leq 2.$$

SOLUCIÓN Como se muestra en la siguiente tabla, se pueden usar estas ecuaciones paramétricas para tabular las coordenadas de los puntos $P(x, y)$ de C.

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

La Figura 11.53 se obtiene de la representación gráfica de algunos puntos.

FIGURA 11.53



Se puede obtener una descripción precisa de la gráfica si se elimina el parámetro. Despejando t en la primera ecuación paramétrica obtenemos $t = x/2$, y sustituyendo en la segunda ecuación tenemos

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 \quad \text{o bien} \quad y + 1 = \frac{1}{4}x^2.$$

La gráfica de esta última ecuación es una parábola con eje vertical y vértice en el punto $(0, -1)$. La curva C es la porción de la parábola que se ilustra en la Figura 11.53. ■

Las ecuaciones paramétricas de una curva nunca son únicas. El lector debe comprobar que la curva C de este ejemplo, se obtiene también por cualquiera de las siguientes representaciones paramétricas:

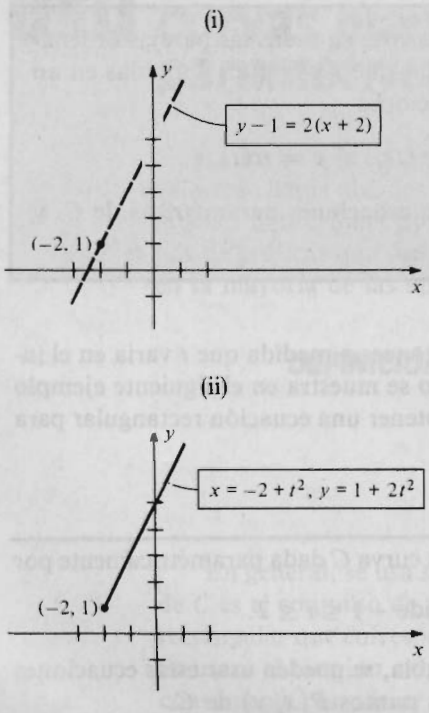
$$x = 2t, \quad y = t^2 - 1; \qquad -1 \le t \le 2$$

$$x = t, \quad y = \tfrac{1}{4}t^2 - 1; \qquad -2 \le t \le 4$$

$$x = t^3, \quad y = \tfrac{1}{4}t^6 - 1; \qquad \sqrt[3]{-2} \le t \le \sqrt[3]{4}.$$

El siguiente ejemplo ilustra el hecho de que es útil a menudo eliminar el parámetro *antes* de localizar los puntos.

FIGURA 11.54



EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de C definida paramétricamente por

$$x = -2 + t^2, \quad y = 1 + 2t^2 \quad \text{para } t \text{ en } \mathbb{R}.$$

SOLUCIÓN Para eliminar el parámetro puede notarse en la primera ecuación que $t^2 = x + 2$. Sustituyendo t^2 en la segunda ecuación se obtiene

$$y = 1 + 2(x + 2) \quad \text{o bien} \quad y - 1 = 2(x + 2).$$

Esta es la ecuación de una recta de pendiente igual a 2, que pasa por el punto $(-2, 1)$, como se muestra con línea punteada en la parte (i) de la Figura 11.54. Sin embargo, puesto que $t^2 \ge 0$,

$$x = -2 + t^2 \ge -2 \quad \text{y} \quad y = 1 + 2t^2 \ge 1.$$

Se deduce que la gráfica de C es la parte de la recta situada a la derecha de $(-2, 1)$, como se ve en la parte (ii) de la figura. Este hecho se puede verificar también localizando varios puntos. ■

EJEMPLO 3 Describir gráficamente la curva C, cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

SOLUCIÓN Puede emplearse la identidad $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ para eliminar el parámetro. De aquí se obtiene $x^2 + y^2 = 1$ y, por lo tanto, los puntos de C están en la circunferencia unitaria con centro en el origen. Conforme t aumenta de 0 a 2π, $P(t)$ parte del punto $A(1, 0)$ y recorre la circunferencia una vez en el sentido contrario al del reloj. En este ejemplo, el parámetro t se puede interpretar geométricamente como el valor en radianes del ángulo θ en la Figura 6.34. ■

Si se describe una curva C mediante una ecuación $y = f(x)$, en la que f es una función, entonces una manera fácil de obtener las ecuaciones paramétricas es hacer

$$x = t, \quad y = f(t)$$

en donde t está en el dominio de f. Por ejemplo, si $y = x^3$, entonces las ecuaciones paramétricas son

$$x = t, \quad y = t^3 \quad \text{para } t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Se pueden usar muchas sustituciones para x, siempre y cuando, conforme t varíe en un intervalo, x tome todos los valores en el dominio de f. Así que la gráfica de $y = x^3$ también está dada por

$$x = t^{1/3}, \quad y = t \quad \text{para } t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Nótese, sin embargo, que las ecuaciones paramétricas

$$x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen}^3 t \quad \text{para } t \text{ en } \mathbb{R}$$

sólo dan parte de la gráfica de $y = x^3$ situada entre los puntos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$.

EJEMPLO 4 Hallar tres representaciones paramétricas de la recta que tiene pendiente m y pasa por el punto (x_1, y_1).

SOLUCIÓN Sabemos que la ecuación de la recta dados un punto y su pendiente es

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Si se toma $x = t$, entonces $y - y_1 = m(t - x_1)$ y se obtienen las ecuaciones paramétricas de

$$x = t, \quad y = y_1 + m(t - x_1) \quad \text{para } t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Otro par de ecuaciones paramétricas se obtiene si $x - x_1 = t$. En este caso, $y - y_1 = mt$, y por lo tanto, la recta está dada paramétricamente por

$$x = x_1 + t, \quad y = y_1 + mt \quad \text{para } t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Si se toma $x - x_1 = \tan t$, entonces, una tercera representación sería

$$x = x_1 + \tan t, \quad y = y_1 + m \tan t \qquad \text{para } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Hay muchas otras maneras de representar paramétricamente a la recta. ■

EJEMPLO 5 La curva trazada por un punto P en la circunferencia de un círculo cuando éste rueda sobre una recta en un plano, se llama **cicloide**. Hallar las ecuaciones paramétricas de una cicloide.

Supóngase que la curva circular tiene radio a y que rueda a lo largo y por encima del eje x en el primer cuadrante, en el sentido positivo. Si el origen es una posición del punto P, entonces en la Figura 11.55 se muestra una porción de la curva y una de las posiciones de la misma. Sea K el centro del círculo y T el punto de tangencia con el eje x. Tomaremos el parámetro t como la medida en radianes del ángulo TKP. Como $\overline{OT}$ es la distancia en que ha rodado la circunferencia, se tiene $\overline{OT} = at$. Por consiguiente, las coordenadas de K son (at, a). Si consideramos un sistema coordenado $x'y'$ con origen en $K(at, a)$, y si $P(x', y')$ denota el punto P relativo a este sistema, entonces mediante las fórmulas para la traslación de ejes con $h = at$ y $k = a$ obtenemos

$$x = at + x', \quad y = a + y'.$$

FIGURA 11.55

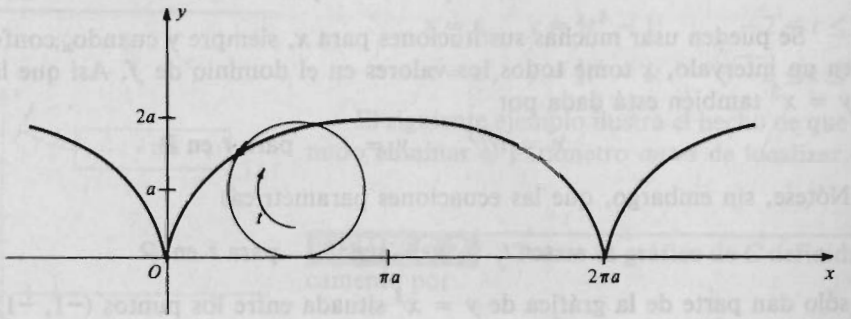
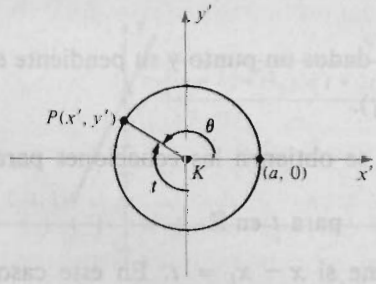


FIGURA 11.56



Si, como en la Figura 11.56, θ denota un ángulo en posición estándar en el sistema $x'y'$, se tiene que $\theta = (3\pi/2) - t$. Por lo tanto,

$$x' = a \cos \theta = a \cos [(3\pi/2) - t] = -a \operatorname{sen} t$$

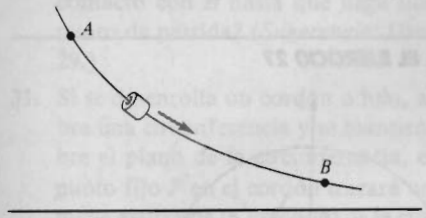
$$y' = a \operatorname{sen} \theta = a \operatorname{sen} [(3\pi/2) - t] = -a \cos t,$$

y al sustituir en $x = at + x'$, $y = a + y'$ resultan las ecuaciones paramétricas de la cicloide, que son:

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad \text{para } t \text{ en } \mathbb{R}.$$ ■

Si $a < 0$, la gráfica en cuestión es la cicloide invertida que resulta si la circunferencia rueda *por debajo* del eje x. Esta curva tiene numerosas propiedades físicas de importancia. En particular, supóngase que un alambre delgado pase por dos puntos fijos A y B, como se ilustra en la Figura 11.57, y supóngase que se pueda cambiar la forma del alambre curvándolo de una u otra manera. Considérese además que a lo largo del alambre se deslice una cuenta y que la única fuerza que actúa sobre ésta es la gravedad. Nos preguntamos ahora cuál de las posibles trayectorias permite que se deslice la cuenta de A a B en el mínimo de tiempo. Es natural pensar que la trayectoria deseada es el segmento de recta de A a B; sin embargo, esta respuesta no es correcta. Se puede demostrar, mediante métodos de cálculo avanzado, que la trayectoria que se requiere para el menor tiempo coincide con la gráfica de la cicloide invertida con A en el origen y B como el punto más bajo sobre la curva. La demostración de este resultado no se presentará en este libro.

FIGURA 11.57



Esta curva tiene otras propiedades interesantes: supóngase que A está en el origen y B es el punto de abscisa $\pi|a|$, es decir, el punto más bajo de la cicloide en el primer arco a la derecha de A. Se puede demostrar que si la cuenta se suelta en *cualquier* punto entre A y B, el tiempo que tarda en llegar a B es siempre el mismo.

En los problemas aplicados se presentan algunas variaciones de la cicloide. Por ejemplo, si la rueda de una motocicleta se desplaza a lo largo de un camino recto, entonces la curva recorrida por un punto fijo de uno de los rayos de la rueda es un tipo de curva cicloidal. En este caso, la curva no tiene ángulos agudos ni corta al camino (el eje x) como sucede con la cicloide. En forma análoga, si la rueda de un vagón de tren se desplaza sobre una vía, la curva trazada por un punto fijo de la circunferencia de la rueda (que se extienda por debajo de la vía) tiene saltos a intervalos regulares (véase el Ejercicio 32). En los Ejercicios 27 y 28 se definen otras cicloides.

Ejercicios 11.11

En los Ejercicios 1 a 18, (a) trace la representación de la curva C que tiene las ecuaciones paramétricas indicadas y (b) encuentre la ecuación rectangular de la gráfica que contiene a los puntos de C.

1. $x = t - 2, \quad y = 2t + 3; \quad 0 \le t \le 5$
2. $x = 1 - 2t, \quad y = 1 + t; \quad -1 \le t \le 4$
3. $x = t^2 + 1, \quad y = t^2 - 1; \quad -2 \le t \le 2$
4. $x = t^3 + 1, \quad y = t^3 - 1; \quad -2 \le t \le 2$
5. $x = 4t^2 - 5, \quad y = 2t + 3; \quad t \text{ en } \mathbb{R}$
6. $x = t^3, \quad y = t^2; \quad t \text{ en } \mathbb{R}$
7. $x = e^t, \quad y = e^{-2t}; \quad t \text{ en } \mathbb{R}$
8. $x = \sqrt{t}, \quad y = 3t + 4; \quad t \ge 0$
9. $x = 2 \operatorname{sen} t, \quad y = 3 \cos t; \quad 0 \le t \le 2\pi$
10. $x = \cos t - 2, \quad y = \operatorname{sen} t + 3; \quad 0 \le t \le 2\pi$
11. $x = \sec t, \quad y = \tan t; \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
12. $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} t; \quad -\pi \le t \le \pi$
13. $x = t^2, \quad y = 2 \ln t; \quad t > 0$
14. $x = \cos^3 t, \quad y = \operatorname{sen}^3 t; \quad 0 \le t \le 2\pi$
15. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \csc t; \quad 0 < t \le \pi/2$
16. $x = e^t, \quad y = e^{-t}; \quad t \text{ en } \mathbb{R}$
17. $x = t, \quad y = \sqrt{t^2 - 1}; \quad |t| \ge 1$
18. $x = -2\sqrt{1 - t^2}, \quad y = t; \quad |t| \le 1$

En los Ejercicios 19 y 22 trace la representación de la curva C cuyas ecuaciones paramétricas son las indicadas.

19. $x = t, \quad y = \sqrt{t^2 - 2t + 1}; \quad 0 \le t \le 4$

20. $x = 2t, \quad y = 8t^3; \quad -1 \le t \le 1$

21. $x = (t + 1)^3, \quad y = (t + 2)^2; \quad 0 \le t \le 2$

22. $x = \tan t, \quad y = 1; \quad -\pi/2 < t < \pi/2$

En los Ejercicios 23 y 24, se dan las curvas C_1, C_2, C_3 y C_4 paramétricamente, para t en $\mathbb{R}$. Trace las representaciones de éstas y analice sus similitudes y sus diferencias.

23. $C_1: x = t^2, \quad y = t$
$C_2: x = t^4, \quad y = t^2$
$C_3: x = \operatorname{sen}^2 t, \quad y = \operatorname{sen} t$
$C_4: x = e^{2t}, \quad y = -e^t$

24. $C_1: x = t, \quad y = 1 - t$
$C_2: x = 1 - t^2, \quad y = t^2$
$C_3: x = \cos^2 t, \quad y = \operatorname{sen}^2 t$
$C_4: x = \ln t - t, \quad y = 1 + t - \ln t$

25. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos distintos. Demuestre que

$$x = (x_2 - x_1)t + x_1, \qquad y = (y_2 - y_1)t + y_1,$$

en donde t toma valores en $\mathbb{R}$, son las ecuaciones paramétricas de la recta l que pasa por P_1 y P_2. Encuentre otros tres pares de ecuaciones paramétricas de l. Demuestre que existe un número infinito de pares distintos de ecuaciones paramétricas de l.

26. Demuestre que

$$x = a \cos t + h, \qquad y = b \operatorname{sen} t + k,$$

para $0 \le t \le 2\pi$, son las ecuaciones paramétricas de una elipse con centro en el punto (h, k) y semiejes de longitud a y b.

27. Una circunferencia C de radio b rueda por el interior de otra circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, donde $b < a$. Sea P un punto fijo de C, y sea $A(a, 0)$ la posición inicial de P como se muestra en la figura. Si el parámetro t es el ángulo que va de la parte positiva del eje x al segmento de recta de O al centro C, muestre que las ecuaciones paramétricas de la curva recorrida por P (llamada **hipocicloide**) son

$$x = (a - b) \cos t + b \cos \frac{a - b}{b} t,$$

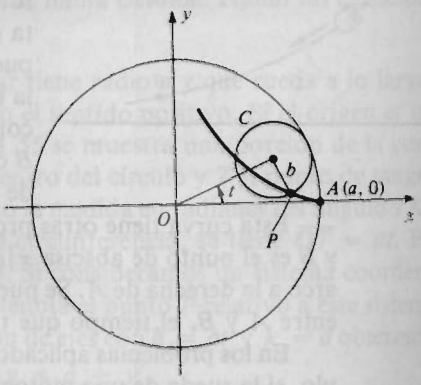
$$y = (a - b) \operatorname{sen} t - b \operatorname{sen} \frac{a - b}{b} t,$$

en donde $0 \le t \le 2\pi$. Compruebe que si $b = a/4$, entonces

$$x = a \cos^3 t, \qquad y = a \operatorname{sen}^3 t$$

y trace la gráfica.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 27



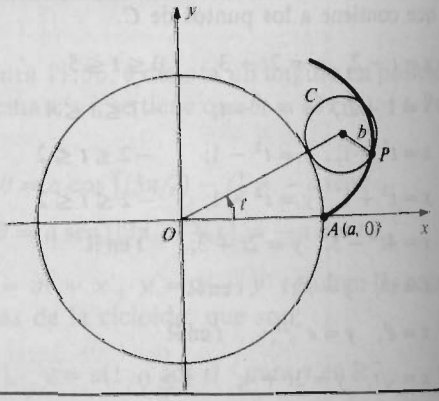
28. La circunferencia C del Ejercicio 27 rueda sobre la parte exterior de la otra curva, encuentre las ecuaciones paramétricas de la curva descrita por P. (Esta curva se llama **epicicloide**.) Demuestre que las ecuaciones paramétricas de esta curva son

$$x = (a + b) \cos t - b \cos \frac{a + b}{b} t,$$

$$y = (a + b) \operatorname{sen} t - b \operatorname{sen} \frac{a + b}{b} t,$$

para $0 \le t \le 2\pi$.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 28



29. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la epicicloide para $b = a/3$ en el Ejercicio 28, y trace la gráfica.

30. El radio de una circunferencia A es un tercio del de una circunferencia B. ¿Cuántas vueltas dará la circunferencia A cuando ruede alrededor y en contacto con B hasta que llega nuevamente al punto de partida? (*Sugerencia:* Use el Ejercicio 29.)

31. Si se desenrolla un cordón o hilo, arrollado sobre una circunferencia y se mantiene tirante sobre el plano de la circunferencia, entonces, un punto fijo P en el cordón trazará una curva llamada **evolvente (o involuta) de la circunferencia.** Si se escoge la circunferencia como en el Ejercicio 27 y el parámetro t es el ángulo desde el eje x positivo hasta el punto de tangencia del cordón, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la evolvente o involuta son

$$x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t), \quad y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$$

para t en $\mathbb{R}$.

32. Generalice la cicloide del Ejemplo 5 al caso en que P es cualquier punto en una recta fija que pasa por el centro K de la circunferencia. Si $b = d(K, P)$, obtenga las ecuaciones paramétricas

$$x = at - b \operatorname{sen} t, \quad y = a - b \cos t \text{ para } t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Trace una gráfica típica si $b < a$ (llamada **cicloide acortada**) y si $b > a$ (la **cicloide alargada**). El nombre **trocoide** se usa algunas veces para cualquiera de estas curvas.

11.12 Repaso

Defina o discuta cada uno de los siguientes conceptos.

1. Secciones cónicas.
2. Parábola.
3. Foco, directriz, vértice y eje de la parábola.
4. Elipse.
5. Ejes mayor y menor de una elipse.
6. Focos y vértices de la elipse.
7. Hipérbola.
8. Ejes transverso y conjugado de la hipérbola.
9. Focos y vértices de la hipérbola.
10. Asíntotas de la hipérbola.
11. Traslación de ejes.
12. Rotación de ejes.
13. Coordenadas polares de un punto.
14. Relación entre coordenadas polares y rectangulares.
15. Gráficas de ecuaciones polares.
16. Ecuaciones polares de las cónicas.
17. Curvas planas.
18. Ecuaciones paramétricas de una curva.

Ejercicios 11.12

En los Ejercicios 1 a 10, encuentre los focos y los vértices; trace también la gráfica de la cónica que tiene la ecuación dada.

1. $y^2 = 64x$
2. $y - 1 = 8(x + 2)^2$
3. $9y^2 = 144 - 16x^2$
4. $9y^2 = 144 + 16x^2$
5. $x^2 - y^2 - 4 = 0$
6. $25x^2 + 36y^2 = 1$
7. $25y = 100 - x^2$
8. $3x^2 + 4y^2 - 18x + 8y + 19 = 0$
9. $x^2 - 9y^2 + 8x + 90y - 210 = 0$
10. $x = 2y^2 + 8y + 3$

Encuentre las ecuaciones de las cónicas descritas en los Ejercicios 11 a 18.

11. La hipérbola con vértices $V(0, \pm 7)$ y puntos extremos de los ejes conjugados $(\pm 3, 0)$.

12. La parábola con foco $F(-4, 0)$ y directriz $x = 4$.

13. La parábola con foco $(0, -10)$ y directriz $y = 10$.

14. La parábola con vértice en el origen, simétrica con respecto al eje x, y que pasa por el punto $(5, -1)$.

15. La elipse con vértices $V(0, \pm 10)$ y focos $F(0, \pm 5)$.

16. La hipérbola con focos $F(\pm 10, 0)$ y vértices $V(\pm 5, 0)$.

17. La hipérbola con vértices $V(0, \pm 6)$ y asíntotas con ecuación $y = \pm 9x$.

18. La elipse con focos $F(\pm 2, 0)$ que pasa por el punto $(2, \sqrt{2})$.

Analice y trace la gráfica de cada una de las ecuaciones de los Ejercicios 19 a 24 después de efectuar una traslación de ejes conveniente.

19. $4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y + 36 = 0$

20. $4x^2 - y^2 - 40x - 8y + 88 = 0$

21. $y^2 - 8x + 8y + 32 = 0$

22. $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 36 = 0$

23. $y^2 - 2x^2 + 6y + 8x - 3 = 0$

24. $x^2 - 9y^2 + 8x + 7 = 0$

En los Ejercicios 25 a 32 trace las gráficas de las ecuaciones polares dadas.

25 $r = -4 \operatorname{sen} \theta$

26. $r = 3 \operatorname{sen} 5\theta$

27. $r = 6 - 3 \cos \theta$

28. $r^2 = 9 \operatorname{sen} 2\theta$

29. $2r = \theta$

30. $r = \dfrac{8}{1 - 3 \operatorname{sen} \theta}$

31. $r = 6 - r \cos \theta$

32. $r = 8 \sec \theta$

Cambie a la forma polar las ecuaciones de los Ejercicios 33 a 36.

33. $y^2 = 4x$

34. $x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0$

35. $2x - 3y = 8$

36. $x^2 + y^2 = 2xy$

En los Ejercicios 37 a 40 cambie las ecuaciones dadas a ecuaciones en x y y.

37. $r^2 = \tan \theta$

38. $r = 2 \cos \theta + 3 \operatorname{sen} \theta$

39. $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$

40. $\theta = \sqrt{3}$

En los Ejercicios 41 a 43 trace la representación de la curva y encuentre la ecuación rectangular de la gráfica que contiene los puntos de la curva.

41. $x = (1/t) + 1, \quad y = (2/t) - t; \qquad 0 < t \leq 4$

42. $x = \cos^2 t - 2, \quad y = \operatorname{sen} t + 1; \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

43. $x = \sqrt{t}, \quad y = 2^{-t}; \qquad t \geq 0$

44. Sean las curvas C_1, C_2, C_3 y C_4 cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$C_1: x = t, \quad y = \sqrt{t}$$
$$C_2: x = t^2, \quad y = t$$
$$C_3: x = 1 - \operatorname{sen}^2 t, \quad y = \cos t$$
$$C_4: x = e^{2t}, \quad y = -e^t$$

en donde t toma valores en $\mathbb{R}$. Trace las gráficas de C_1, C_2, C_3 y C_4 y analice sus semejanzas y diferencias.

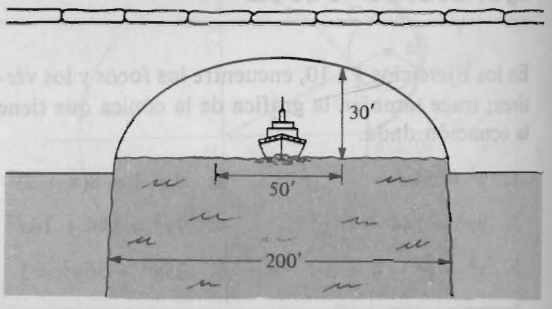
Después de hacer una rotación de ejes apropiada, describa y trace las gráficas de los Ejercicios 45 y 46.

45. $x^2 - 8xy + 16y^2 - 12\sqrt{17}x - 3\sqrt{17}y = 0$

46. $8x^2 + 12xy + 17y^2 - 16\sqrt{5}x - 12\sqrt{5}y = 0$

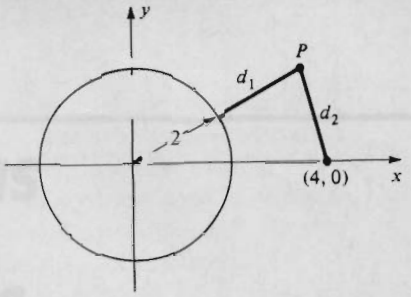
47. Se construirá un puente a través de un río de 200 pie de ancho. El arco del puente será semielíptico y debe construirse de manera que pueda pasar sin peligro por debajo de él un barco de menos de 50 pie de ancho y 30 pie de altura (véase la figura). Encuentre una ecuación para el perfil del arco y calcule la altura del mismo a la mitad del puente.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 47



48. Un punto $P(x, y)$ está a la misma distancia del punto $(4, 0)$ que de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ $(d_1 = d_2)$, como se muestra en la figura. Pruebe que el conjunto de todos esos puntos forma una rama de una hipérbola y trace la gráfica.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 48



Uso de las tablas logarítmicas y trigonométricas

Tablas de logaritmos

Si x es cualquier número real positivo y escribimos

$$x = c \cdot 10^k$$

en donde $1 \leq c \leq 10$ y k es un entero, entonces, aplicando (iii) de las leyes de los logaritmos,

$$\log x = \log c + \log 10^k.$$

Como $\log 10^k = k$, vemos que

$$\log x = \log c + k.$$

La última ecuación indica que para determinar $\log x$ para cualquier número real positivo x, es suficiente conocer los logaritmos de los números entre 1 y 10. El número $\log c$, para $1 \leq c < 10$, recibe el nombre de **mantisa**, y el entero k se llama **característica**, de $\log x$.

Si $1 \leq c < 10$, entonces, como $\log x$ crece a medida que lo hace x

$$\log 1 \leq \log c < \log 10,$$

o equivalentemente,

$$0 \leq \log c < 1.$$

Así, la mantisa de un logaritmo es un número entre 0 y 1. En los problemas numéricos es generalmente necesario aproximar logaritmos. Por ejemplo, se puede demostrar que

$$\log 2 = 0.3010299957\ldots$$

en donde las cifras decimales no se repiten y no terminan. Generalmente se redondean tales logaritmos a cuatro cifras decimales y se escribe

$$\log 2 \approx 0.3010.$$

Si un número entre 0 y 1 se expresa como un decimal finito, casi siempre nos referimos a él como **fracción decimal**. Así, la ecuación $\log x = \log c + k$ implica que si x es cualquier número real positivo, entonces $\log x$ *puede ser aproximado por la suma de una fracción decimal positiva* (*la mantisa*) *y un entero* k (*la característica*). Esta representación se denomina **forma normal** o **estándar** de $\log x$.

Se han calculado los logaritmos comunes de muchos de los números entre 1 y 10. La Tabla 1 del Apéndice II contiene aproximaciones con cuatro cifras decimales para logaritmos de números entre 1.00 y 9.99, con intervalos de 0.01. Esta tabla se puede usar para obtener el logaritmo común de cualquier número de 3 dígitos con una exactitud de cuatro cifras decimales. El uso de la Tabla 1 se explica en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1 Evaluar aproximadamente cada uno de los siguientes logaritmos:

(a) log 43.6 (b) log 43,600 (c) log 0.0436

SOLUCIÓN

(a) Como $43.6 = (4.36)10^1$, la característica de log 43.6 es 1. Con referencia a la Tabla 1, se halla que la mantisa log 4.36 puede ser aproximada por 0.6395. En consecuencia, como en la discusión anterior

$$\log 43.6 \approx 0.6395 + 1 = 1.6395.$$

(b) Como $43\,600 = (4.36)10^4$, la mantisa es la misma de la parte (a); sin embargo, la característica es 4. Consecuentemente,

$$\log 43{,}600 \approx 0.6395 + 4 = 4.6395.$$

(c) Si escribimos $0.0436 = (4.36)10^{-2}$, entonces

$$\log 0.0436 = \log 4.36 + (-2).$$

Por lo tanto, $$\log 0.0436 \approx 0.6395 + (-2).$$

Podemos restar 2 de 0.6395 y obtener

$$\log 0.0436 \approx -1.3605$$

pero esta no es la forma normal, ya que $-1.3605 = -0.3605 + (-1)$, un número en el cual la parte decimal es *negativa*. Un error frecuente es escribir $0.6395 + (-2)$ como -2.6395. Esto es incorrecto porque

$$-2.6395 = -0.6395 + (-2).$$

lo cual no es lo mismo que $0.6395 + (-2)$. ■

Si un logaritmo tiene característica negativa, por lo común se maneja en la forma normal o se expresa de otro modo con la parte decimal positiva. A fin de ilustrar esta técnica, se suma y se resta 8 en el segundo miembro de la ecuación

$$\log 0.0436 \approx 0.6395 + (-2)$$

Lo anterior da $$\log 0.0436 \approx 0.6395 + (8 - 8) + (-2)$$

o sea $$\log 0.0436 \approx 8.6395 - 10.$$

También se puede escribir

$$\log 0.0436 \approx 18.6395 - 20 = 43.6395 - 45$$

y así sucesivamente, en tanto la *parte entera* del logaritmo sea -2.

EJEMPLO 2 Determinar cada uno de los siguientes logaritmos:

(a) $\log (0.00652)^2$ (b) $\log (0.00652)^{-2}$ (c) $\log (0.00652)^{1/2}$

SOLUCIÓN

(a) Por (iii) de las leyes de los logaritmos,

$$\log (0.00652)^2 = 2 \log 0.00652.$$

Como $0.00652 = (6.52)10^{-3}$,

$$\log 0.00652 = \log 6.52 + (-3).$$

Con referencia a la Tabla 1, vemos que $\log 6.52$ es aproximadamente 0.8142 y, por lo tanto,

$$\log 0.00652 \approx 0.8142 + (-3).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \log (0.00652)^2 &= 2 \log 0.00652 \\ &\approx 2[0.8142 + (-3)] \\ &= 1.6284 + (-6). \end{aligned}$$

La forma normal es $0.6284 + (-5)$.

(b) Otra vez se aplica la ley (iii) y el valor para $\log 0.00652$ de la parte (a):

$$\begin{aligned} \log (0.00652)^{-2} &= -2 \log 0.00652 \\ &\approx -2[0.8142 + (-3)] \\ &= -1.6284 + 6. \end{aligned}$$

Es importante señalar que -1.6284 significa $-0.6284 + (-1)$ y, consecuentemente, la parte decimal es negativa. Para obtener la forma normal o estándar, debemos escribir

$$\begin{aligned} -1.6284 + 6 &= 6.0000 - 1.6284 \\ &= 4.3716. \end{aligned}$$

Esto muestra que la mantisa es 0.3716 y la característica es 4.

(c) Por la ley (iii),

$$\begin{aligned} \log (0.00652)^{1/2} &= \tfrac{1}{2} \log 0.00652 \\ &\approx \tfrac{1}{2}[0.8142 + (-3)]. \end{aligned}$$

Si multiplicamos por $\frac{1}{2}$, no se obtiene la forma estándar, pues ningún número en la suma resultante es la característica. Para evitar esto, se puede ajustar la expresión entre corchetes sumando y restando un número adecuado. Si usamos 1 de esta forma, obtenemos,

$$\begin{aligned} \log (0.00652)^{1/2} &\approx \tfrac{1}{2}[1.8142 + (-4)] \\ &= 0.9071 + (-2), \end{aligned}$$

que es la forma estándar. Podríamos haber sumado y restado otro número distinto de 1. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}[0.8142 + (-3)] &= \tfrac{1}{2}[17.8142 + (-20)] \\ &= 8.9071 + (-10). \end{aligned}$$

■

Se puede usar la Tabla 1 para obtener una aproximación a x si se conoce $\log x$, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Hallar una aproximación decimal de x para cada $\log x$:

(a) $\log x = 1.7959$ (b) $\log x = -3.5918$

SOLUCIÓN

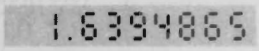
(a) La mantisa 0.7959 determina la secuencia de los dígitos en x, y la característica determina la posición del punto decimal. Con referencia al *cuerpo* de la Tabla 1, vemos que la mantisa 0.7959 es el logaritmo de 6.25. Como la característica es 1, x está entre 10 y 100. En consecuencia, $x \approx 62.5$.

(b) Para encontrar x a partir de la Tabla 1, $\log x$ debe expresarse en la forma normal. Para cambiar $\log x = -3.5918$ a la forma estándar, se puede sumar y restar 4, obteniendo así

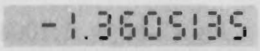
$$\begin{aligned} \log x &= (4 - 3.5918) - 4 \\ &= 0.4082 - 4. \end{aligned}$$

En la Tabla 1 se ve que la mantisa 0.4082 es el logaritmo de 2.56. Como la característica de $\log x$ es -4, se obtiene que $x \approx 0.000256$. ■

Si se utiliza una calculadora con tecla [log] para determinar logaritmos comunes, entonces la forma estándar de $\log x$ se obtiene sólo si $x \geq 1$. Por ejemplo, para evaluar log 43.6 con una calculadora normal, se registra 43.6 y se oprime luego [log], obteniendo así la forma estándar



Si se determina log 0.0436 de modo similar, entonces el siguiente número que aparece en el visor es



Esta no es la forma estándar para el logaritmo, pero es similar a la de la solución del Ejemplo 1(c). Para encontrar la forma estándar podemos sumar 2 al logaritmo (mediante la calculadora), y luego restar 2, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \log 0.0436 &\approx -1.3605135 \\ &= (-1.3605135 + 2) - 2 \\ &= 0.6394865 - 2 \\ &= 0.6394865 + (-2) \end{aligned}$$

Los únicos logaritmos comunes que se pueden encontrar *directamente* a partir de la Tabla 1 son logaritmos de números que tienen como máximo tres dígitos no iguales a cero. Si intervienen *cuatro* dígitos no nulos, es posible obtener una aproximación usando el método de interpolación lineal que describiremos enseguida. El término **interpolación lineal** se usa porque, como hemos visto, el método se basa en porciones aproximadas de la gráfica de $y = \log x$ por medio de segmentos lineales o rectilíneos.

FIGURA A1.1

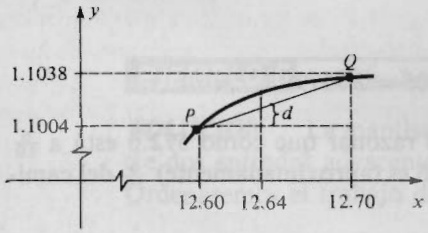
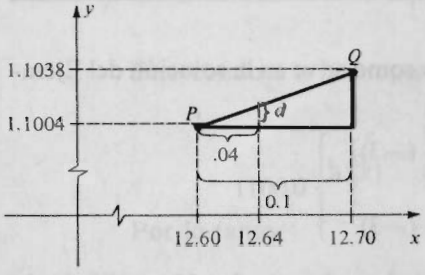


FIGURA A1.2



Para ilustrar el proceso de interpolación lineal, y al mismo tiempo justificarlo, consideremos el ejemplo específico de log 12.64. Como la función logarítmica con base 10 es creciente, este número está entre log 12.60 ≈ 1.1004, y log 12.70 ≈ 1.1038. Examinando la gráfica de $y = \log x$, se tiene la situación de la Figura A1.1, en donde se han distorsionado o exagerado las unidades sobre los ejes x y y, y también la porción de la gráfica que se muestra. Un croquis más exacto indicaría que la gráfica de $y = \log x$ estaría mucho más cerca del segmento rectilíneo que une P(12.60, 1.1004) a Q(12.70, 1.1038), que lo que muestra la figura. Como log 12.64 es la ordenada del punto sobre la gráfica que tiene como abscisa 12.64, puede ser aproximada por la coordenada y del punto con coordenada x igual a 12.64 sobre el *segmento de recta PQ*. Refiriéndonos a la Figura A1.1 vemos que la última ordenada es 1.1004 + d. El número d puede ser aproximado usando triángulos semejantes. Con referencia a la Figura A1.2, en donde la gráfica de $y = \log x$ fue suprimida, es posible formar las siguientes proporciones:

$$\frac{d}{0.0034} = \frac{0.04}{0.1}.$$

En consecuencia,

$$d = \frac{(0.04)(0.0034)}{0.1} = 0.00136.$$

Cuando usemos esta técnica, siempre se redondean los decimales al mismo número de cifras que aparecen en el cuerpo de la tabla. Por consiguiente, $d \approx 0.0014$ y

$$\log 12.64 \approx 1.1004 + 0.0014 = 1.1018.$$

De aquí en adelante, no se trazará la gráfica para interpolación. En vez de ello usaremos el método que se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Determinar log 572.6.

SOLUCIÓN Es conveniente ordenar el trabajo de la siguiente manera:

$$1.0\left\{\begin{array}{l} 0.6\left\{\begin{array}{l}\log 572.0 \approx 2.7574\\ \log 572.6 = ?\end{array}\right\} d \\ \log 573.0 \approx 2.7582\end{array}\right\} 0.0008$$

en donde las diferencias se indican por símbolos apropiados a lo alto de las llaves. Esto conduce a la proporción

$$\frac{d}{0.0008} = \frac{0.6}{1.0} = \frac{6}{10} \quad \text{o bien} \quad d = \left(\frac{6}{10}\right)(0.0008) = 0.00048 \approx 0.0005.$$

Por lo tanto $\log 572.6 \approx 2.7574 + 0.0005 = 2.7579.$

Otra forma de resolver este tipo de problema es razonar que como 572.6 está a $\frac{6}{10}$ de la distancia de 572.0 a 573.0, entonces log 572.6 es (aproximadamente) $\frac{6}{10}$ del camino de 2.7574 a 2.7582. Por lo tanto,

$$\log 572.6 \approx 2.7574 + (\tfrac{6}{10})(0.0008) \approx 2.7574 + 0.0005 = 2.7579. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 Calcular log 0.003678.

SOLUCIÓN Comenzamos ordenando el trabajo como se ve en la solución del Ejemplo 1. Por tanto,

$$10\left\{\begin{array}{l} 8\left\{\begin{array}{l}\log 0.003670 \approx 0.5647 + (-3)\\ \log 0.003678 = ?\end{array}\right\} d \\ \log 0.003680 \approx 0.5658 + (-3)\end{array}\right\} 0.0011$$

Como sólo estamos interesados en razones, usamos los números 8 y 10 en el lado de

la izquierda, ya que su razón es la misma que la de 0.000008 a 0.000010. Esto conduce a la proporción

$$\frac{d}{0.0011} = \frac{8}{10} = 0.8 \quad \text{o bien} \quad d = (0.0011)(0.8) = 0.00088 \approx 0.0009.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \log 0.003678 &\approx [0.5647 + (-3)] + 0.0009 \\ &= 0.5656 + (-3). \end{aligned}$$

■

Si un número x se escribe en la forma $x = c \cdot 10^k$, en donde $1 \leq c < 10$, entonces antes de usar la Tabla 1 para evaluar $\log x$ por interpolación, c debe ser redondeado a tres cifras decimales. Otra forma de decir esto es que x debe ser aproximado a cuatro **cifras significativas**. Algunos ejemplos ayudarán a esclarecer este procedimiento. Si $x = 36.4635$, se redondea a 36.46 antes de aproximar $\log x$. El número 684 279 se debe redondear a 684 300. Para un valor decimal como 0.096202 se usa 0.09620. La razón para hacer esto es que la Tabla 1 no garantiza una exactitud de más de cuatro dígitos, ya que las mantisas que aparecen en ella son aproximaciones. Ello significa que si en el problema es necesaria una exactitud de *más* de cuatro dígitos, no puede usarse la Tabla 1. Si, en tablas más extensas, se puede encontrar directamente el logaritmo de un número que contenga n dígitos, se permite la interpolación para números que comprenden $n + 1$ dígitos, y los números deben ser redondeados en consecuencia.

El método de interpolación también puede ser empleado para encontrar x cuando se da $\log x$. Si usamos la Tabla 1, x puede encontrarse a cuatro cifras significativas. En este caso se da la *ordenada* y de un punto en la gráfica de $y = \log x$, y se pide encontrar la *abscisa* x. Un razonamiento geométrico similar al dado anteriormente se puede usar para justificar el procedimiento que se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Calcular x con cuatro cifras significativas a partir de $\log x = 1.7949$.

SOLUCIÓN La mantisa 0.7949 no aparece en la Tabla 1, pero puede ser aislada entre dos entradas adyacentes; es decir, las mantisas correspondientes a 6.230 y 6.240. Ordenaremos el trabajo de la siguiente manera:

$$0.1\left\{\begin{array}{l} r\left\{\begin{array}{l}\log 62.30 \approx 1.7945 \\ \log x \quad\quad = 1.7949\end{array}\right\} 0.0004 \\ \log 62.40 \approx 1.7952 \end{array}\right\} 0.0007.$$

Esto conduce a la proporción

$$\frac{r}{0.1} = \frac{0.0004}{0.0007} = \frac{4}{7} \quad \text{o bien} \quad r = (0.1)\left(\frac{4}{7}\right) \approx 0.06.$$

Por lo tanto,

$$x \approx 62.30 + 0.06 = 62.36.$$

■

Empleando técnicas avanzadas es posile aproximar, a cualquier grado de exactitud, todos los valores de las funciones trigonométricas en el intervalo t [0, $\pi/2$] o, equivalentemente, en el intervalo en grados [0°, 90°]. La Tabla 4, parte de la cual se reproduce aquí, da aproximaciones a cuatro cifras decimales para tales valores.

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.4887	**28°00′**	.4695	.8829	.5317	1.881	1.133	2.130	**62°00′**	1.0821
.4916	10	.4720	.8816	.5354	1.868	1.134	2.118	50	1.0792
.4945	20	.4746	.8802	.5392	1.855	1.136	2.107	40	1.0763
.4974	30	.4772	.8788	.5430	1.842	1.138	2.096	30	1.0734
.5003	40	.4797	.8774	.5467	1.829	1.140	2.085	20	1.0705
.5032	50	.4823	.8760	.5505	1.816	1.142	2.074	10	1.0676
.5061	**29°00′**	.4848	.8746	.5543	1.804	1.143	2.063	**61°00′**	1.0647
.5091	10	.4874	.8732	.5581	1.792	1.145	2.052	50	1.0617
.5120	20	.4899	.8718	.5619	1.780	1.147	2.041	40	1.0588
.5149	30	.4924	.8704	.5658	1.767	1.149	2.031	30	1.0559
.5178	40	.4950	.8689	.5696	1.756	1.151	2.202	20	1.0530
.5207	50	.4975	.8675	.5735	1.744	1.153	2.010	10	1.0501
.5236	**30°00′**	.5000	.8660	.5774	1.732	1.155	2.000	**60°00′**	1.0472
.5265	10	.5025	.8646	.5812	1.720	1.157	1.990	50	1.0443
.5294	20	.5050	.8631	.5851	1.709	1.159	1.980	40	1.0414
.5323	30	.5075	.8616	.5890	1.698	1.161	1.970	30	1.0385
.5352	40	.5100	.8601	.5930	1.686	1.163	1.961	20	1.0356
.5381	50	.5125	.8587	.5969	1.675	1.165	1.951	10	1.0327
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

En la citada Tabla 4, $0 \leq t \leq 1.5708$. El número 1.5708 es una aproximación a cuatro cifras decimales de $\pi/2$. La tabla está dispuesta de tal manera que los valores de la función correspondiente a ángulos medidos en grados puedan encontrarse directamente. Los valores angulares están dados en intervalos de 10′ de 0° a 90°. La razón por la cual t varía en intervalos de aproximadamente 0.0029 es que $10' \approx 0.0029$ radianes.

Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas si $0 \leq t \leq 0.7854 \approx \pi/4$ o bien $0° \leq \theta \leq 45°$ se deben utilizar los encabezados de la *parte superior* de las columnas de la Tabla 4. Por ejemplo,

$$\text{sen}\,(0.5003) \approx 0.4797 \qquad \tan 28°30' \approx 0.5430$$
$$\cos (0.4945) \approx 0.8802 \qquad \sec 29°00' \approx 1.143$$
$$\cot (0.5120) \approx 1.780 \qquad \csc 29°40' \approx 2.020.$$

Si $0.7854 \leq t \leq 1.5708$, o si $45° \leq \theta \leq 90°$, entonces se deben usar los encabezados de la *parte inferior* de las columnas. Por ejemplo,

$$\text{sen}\,(1.0705) \approx 0.8774 \qquad \csc 62°00' \approx 1.133$$
$$\cos (1.0530) \approx 0.4950 \qquad \cot 61°10' \approx 0.5505$$
$$\tan (1.0821) \approx 1.881 \qquad \sec 60°30' \approx 2.031.$$

La razón por la cual puede acomodarse la tabla de esa manera se sigue del hecho de que

$$\operatorname{sen} t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right), \qquad \cot t = \tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right), \qquad \csc t = \sec\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\operatorname{sen}\theta = \cos(90° - \theta), \qquad \cot\theta = \tan(90° - \theta), \qquad \csc\theta = \sec(90° - \theta).$$

En particular,

$$\operatorname{sen} 29° = \cos(90° - 29°) = \cos 61°$$

$$\cot 28°20' = \tan(90° - 28°20') = \tan 61°40',$$

como se muestra en la tabla.

Si es necesario encontrar los valores de la función cuando t está *entre* los números dados en la tabla, se debe emplear el método de interpolación lineal. Similarmente, dado un valor como $\operatorname{sen} t = 0.6371$, puede utilizarse el cuerpo de la Tabla 4 y aplicar interpolación lineal, si fuera necesario, para obtener una aproximación de t. Si t está dada en grados se redondea al minuto más cercano.

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de la interpolación en la Tabla 4.

EJEMPLO 7 Calcular $\tan 24°16'$.

SOLUCIÓN Se consulta la Tabla 4 y se interpola de la siguiente manera

$$10'\left\{\begin{array}{l} 6'\left\{\begin{array}{l}\tan 24°10' \approx 0.4487\\ \tan 24°16' = ?\end{array}\right\} d \\ \tan 24°20' \approx 0.4522\end{array}\right\} 0.0035$$

$$\frac{d}{0.0035} = \frac{6}{10} \quad \text{o bien} \quad d = \frac{6}{10}(0.0035) \approx 0.0021$$

$$\tan 24°16' \approx 0.4487 + 0.0021 = 0.4508$$ ■

EJEMPLO 8 Calcular $\cos(-117°47')$.

SOLUCIÓN El ángulo está en el tercer cuadrante. El lector debe verificar que el ángulo de referencia es $62°13'$. Por consiguiente, $\cos(-117°47') = -\cos 62°13'$. Interpolando en la Tabla 4 se obtiene

$$10'\left\{\begin{array}{l} 3'\left\{\begin{array}{l}\cos 62°10' \approx 0.4669\\ \cos 62°13' = ?\end{array}\right\} d \\ \cos 62°20' \approx 0.4643\end{array}\right\} 0.0026$$

$$\frac{d}{0.0026} = \frac{3}{10} \quad \text{o bien} \quad d \approx 0.0008$$

Puesto que la función coseno es decreciente,

$$\cos 62°13' \approx 0.4669 - 0.0008 = 0.4661$$

Por lo tanto, $\cos(-117°47') \approx -0.4661$. ■

EJEMPLO 9 Evaluar el menor número real positivo t tal que $\operatorname{sen} t = 0.6635$.

SOLUCIÓN Se localiza 0.6635 entre los valores registrados sucesivos en la columna del seno de la Tabla 4, y se interpola de la siguiente manera:

$$0.0029 \left\{ \begin{array}{l} d \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{sen}(0.7243) \approx 0.6626 & \\ \operatorname{sen} t & = 0.6635 \end{array} \right\} 0.0009 \\ \operatorname{sen}(0.7272) \approx 0.6648 \end{array} \right\} 0.0022$$

$$\frac{d}{0.0029} = \frac{0.0009}{0.0022} \quad \text{o bien} \quad d = \frac{9}{22}(0.0029) \approx 0.0012$$

Por lo tanto,

$$t \approx 0.7243 + 0.0012 = 0.7255$$ ■

EJEMPLO 10 Si $\operatorname{sen}\theta = -0.7963$, aproximar el valor en grados de todos los ángulos θ que están en el intervalo $[0°, 360°]$.

SOLUCIÓN Sea θ' el ángulo de referencia, tal que $\operatorname{sen}\theta' = 0.7963$. Interpolando en la Tabla 4,

$$10' \left\{ \begin{array}{l} d \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{sen} 52°40' \approx 0.7951 & \\ \operatorname{sen}\theta' & = 0.7963 \end{array} \right\} 0.0012 \\ \operatorname{sen} 52°50' \approx 0.7969 \end{array} \right\} 0.0018$$

$$\frac{d}{10} = \frac{0.0012}{0.0018} \quad \text{o bien} \quad d \approx 7'$$

$$\theta' \approx 52°47'$$

Puesto que $\operatorname{sen}\theta$ es negativo, θ está en el tercer o cuarto cuadrantes. Usando el ángulo de referencia de 52°47', se obtiene

$$\theta \approx 180° + 52°47' = 232°47'$$

$$\theta \approx 360° - 52°47' = 307°13'$$ ■

Ejercicios A.1

En los Ejercicios 1 a 16 use la Tabla 1 y las leyes de los logaritmos para evaluar (aproximadamente) el logaritmo común de los números.

1. 347; 0.00347; 3.47

2. 86.2; 8620; 0.862

3. 0.54; 540; 540,000

4. 208; 2.08; 20,800

5. 60.2; 0.0000602; 602 **6.** 5; 0.5; 0.0005

7. $(44.9)^2$; $(44.9)^{1/2}$; $(44.9)^{-2}$

8. $(1810)^4$; $(1810)^{40}$; $(1810)^{1/4}$

9. $(0.943)^3$; $(0.943)^{-3}$; $(0.943)^{1/3}$

10. $(0.017)^{10}$; $10^{0.017}$; $10^{1.43}$

11. $(638)(17.3)$ **12.** $\dfrac{(2.73)(78.5)}{621}$

13. $\dfrac{(47.4)^3}{(29.5)^2}$ **14.** $\dfrac{(897)^4}{\sqrt{17.8}}$

15. $\sqrt[3]{20.6}(371)^3$ **16.** $\dfrac{(0.0048)^{10}}{\sqrt{0.29}}$

En los Ejercicios 17 a 30 use la Tabla 1 para encontrar una aproximación decimal a x.

17. $\log x = 3.6274$ **18.** $\log x = 1.8965$

19. $\log x = 0.9469$ **20.** $\log x = 0.5729$

21. $\log x = 5.2095$

22. $\log x = 6.7300 - 10$

23. $\log x = 9.7348 - 10$

24. $\log x = 7.6739 - 10$

25. $\log x = 8.8306 - 10$ **26.** $\log x = 4.9680$

27. $\log x = 2.2765$ **28.** $\log x = 3.0043$

29. $\log x = -1.6253$ **30.** $\log x = -2.2118$

Aplique interpolación en la Tabla 1 para aproximar el logaritmo común de los números en los Ejercicios 31 a 50.

31. 25.48	**32.** 421.6	**33.** 5363
34. 0.3817	**35.** 0.001259	**36.** 69,450
37. 123,400	**38.** 0.0212	**39.** 0.7786
40. 1.203	**41.** 384.7	**42.** 54.44
43. 0.9462	**44.** 7259	**45.** 66,590
46. 0.001428	**47.** 0.04321	**48.** 300,100
49. 3.003	**50.** 1.236	

En los Ejercicios 51 a 70 aplique interpolación en la Tabla 1 para aproximar x.

51. $\log x = 1.4437$ **52.** $\log x = 3.7455$

53. $\log x = 4.6931$ **54.** $\log x = 0.5883$

55. $\log x = 9.1664 - 10$

56. $\log x = 8.3902 - 10$

57. $\log x = 3.8153 - 6$

58. $\log x = 5.9306 - 9$

59. $\log x = 2.3705$ **60.** $\log x = 4.2867$

61. $\log x = 0.1358$ **62.** $\log x = 0.0194$

63. $\log x = 8.9752 - 10$

64. $\log x = 2.4979 - 5$ **65.** $\log x = 5.0409$

66. $\log x = 1.3796$

67. $\log x = -2.8712$

68. $\log x = -1.8164$

69. $\log x = -0.6123$

70. $\log x = -3.1426$

En los Ejercicios 71 a 82 utilice interpolación en la Tabla 4 para aproximar los números.

71. sen (0.46)	**72.** cos (0.82)	**73.** tan 3
74. cot 6	**75.** sec $\frac{1}{4}$	**76.** csc (1.54)
77. cos 37°43′	**78.** sen 22°34′	**79.** cot 62°27′
80. tan 57°16′	**81.** csc 16°55′	**82.** sec 9°12′

En los Ejercicios 83 a 88 use interpolación en la Tabla 4 para aproximar el menor número positivo t para el cual la igualdad es verdadera.

83. $\cos t = 0.8620$ **84.** $\operatorname{sen} t = 0.6612$

85. $\tan t = 4.501$ **86.** $\sec t = 3.641$

87. $\csc t = 1.436$ **88.** $\cot t = 1.165$

En los Ejercicios 89 a 96 emplee interpolación en la Tabla 4 para aproximar, al minuto más cercano, el valor en grados de todos los ángulos θ que están en el intervalo $[0°, 360°]$.

89. $\operatorname{sen}\theta = 0.3672$ **90.** $\cos\theta = 0.8426$

91. $\tan\theta = 0.5042$ **92.** $\cot\theta = 1.348$

93. $\cos\theta = 0.3465$ **94.** $\csc\theta = 1.219$

95. $\sec\theta = 1.385$ **96.** $\operatorname{sen}\theta = 0.7534$

TABLA 1 Logaritmos comunes

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.9993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

NOTA: Para simplificar la búsqueda de valores decimales se ha omitido en las tablas el cero de enteros.

TABLA 2 Función exponencial natural

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
.00	1.0000	1.0000	2.50	12.182	.0821
.05	1.0513	.9512	2.60	13.464	.0743
.10	1.1052	.9048	2.70	14.880	.0672
.15	1.1618	.8607	2.80	16.445	.0608
.20	1.2214	.8187	2.90	18.174	.0550
.25	1.2840	.7788	3.00	20.086	.0498
.30	1.3499	.7408	3.10	22.198	.0450
.35	1.4191	.7047	3.20	24.533	.0408
.40	1.4918	.6703	3.30	27.113	.0369
.45	1.5683	.6376	3.40	29.964	.0334
.50	1.6487	.6065	3.50	33.115	.0302
.55	1.7333	.5769	3.60	36.598	.0273
.60	1.8221	.5488	3.70	40.447	.0247
.65	1.9155	.5220	3.80	44.701	.0224
.70	2.0138	.4966	3.90	49.402	.0202
.75	2.1170	.4724	4.00	54.598	.0183
.80	2.2255	.4493	4.10	60.340	.0166
.85	2.3396	.4274	4.20	66.686	.0150
.90	2.4596	.4066	4.30	73.700	.0136
.95	2.5857	.3867	4.40	81.451	.0123
1.00	2.7183	.3679	4.50	99.017	.0111
1.10	3.0042	.3329	4.60	99.484	.0101
1.20	3.3201	.3012	4.70	109.95	.0091
1.30	3.6693	.2725	4.80	121.51	.0082
1.40	4.0552	.2466	4.90	134.29	.0074
1.50	4.4817	.2231	5.00	148.41	.0067
1.60	4.9530	.2019	6.00	403.43	.0025
1.70	5.4739	.1827	7.00	1096.6	.0009
1.80	6.0496	.1653	8.00	2981.0	.0003
1.90	6.6859	.1496	9.00	8103.1	.0001
2.00	7.3891	.1353	10.00	22026.0	.00005
2.10	8.1662	.1225			
2.20	9.0250	.1108			
2.30	9.9742	.1003			
2.40	11.0232	.0907			

TABLA 3 Logaritmos naturales

n	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0*		7.697	8.391	8.796	9.084	9.307	9.489	9.643	9.777	9.895
1	.000	.095	.182	.262	.336	.405	.470	.531	.588	.642
2	.693	.742	.788	.833	.875	.916	.956	.993	1.030	1.065
3	1.099	1.131	1.163	1.194	1.224	1.253	1.281	1.308	1.335	1.361
4	1.386	1.411	1.435	1.459	1.482	1.504	1.526	1.548	1.569	1.589
5	1.609	1.629	1.649	1.668	1.686	1.705	1.723	1.740	1.758	1.775
6	1.792	1.808	1.825	1.841	1.856	1.872	1.887	1.902	1.917	1.932
7	1.946	1.960	1.974	1.988	2.001	2.015	2.028	2.041	2.054	2.067
8	2.079	2.092	2.104	2.116	2.128	2.140	2.152	2.163	2.175	2.186
9	2.197	2.208	2.219	2.230	2.241	2.251	2.262	2.272	2.282	2.293
10	2.303	2.313	2.322	2.332	2.342	2.351	2.361	2.370	2.380	2.389

* Réstese 10 si $n < 1$; por ejemplo $\ln 0.3 \approx 8.796 - 10 = -1.204$.

TABLA 4 Funciones trigonométricas de valores en grados

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.0000	0°00′	.0000	1.0000	.0000	—	1.000	—	90°00′	1.5708
.0029	10	.0029	1.0000	.0029	343.8	1.000	343.8	50	1.5679
.0058	20	.0058	1.0000	.0058	171.9	1.000	171.9	40	1.5650
.0087	30	.0087	1.0000	.0087	114.6	1.000	114.6	30	1.5621
.0116	40	.0116	.9999	.0116	85.94	1.000	85.95	20	1.5592
.0145	50	.0145	.9999	.0145	68.75	1.000	68.76	10	1.5563
.0175	1°00′	.0175	.9998	.0175	57.29	1.000	57.30	89°00′	1.5533
.0204	10	.0204	.9998	.0204	49.10	1.000	49.11	50	1.5504
.0233	20	.0233	.9997	.0233	42.96	1.000	42.98	40	1.5475
.0262	30	.0262	.9997	.0262	38.19	1.000	38.20	30	1.5446
.0291	40	.0291	.9996	.0291	34.37	1.000	34.38	20	1.5417
.0320	50	.0320	.9995	.0320	31.24	1.001	31.26	10	1.5388
.0349	2°00′	.0349	.9994	.0349	28.64	1.001	28.65	88°00′	1.5359
.0378	10	.0378	.9993	.0378	26.43	1.001	26.45	50	1.5330
.0407	20	.0407	.9992	.0407	24.54	1.001	24.56	40	1.5301
.0436	30	.0436	.9990	.0437	22.90	1.001	22.93	30	1.5272
.0465	40	.0465	.9989	.0466	21.47	1.001	21.49	20	1.5243
.0495	50	.0494	.9988	.0495	20.21	1.001	20.23	10	1.5213
.0524	3°00′	.0523	.9986	.0524	19.08	1.001	19.11	87°00′	1.5184
.0553	10	.0552	.9985	.0553	18.07	1.002	18.10	50	1.5155
.0582	20	.0581	.9983	.0582	17.17	1.002	17.20	40	1.5126
.0611	30	.0610	.9981	.0612	16.35	1.002	16.38	30	1.5097
.0640	40	.0640	.9980	.0641	15.60	1.002	15.64	20	1.5068
.0669	50	.0669	.9978	.0670	14.92	1.002	14.96	10	1.5039
.0698	4°00′	.0698	.9976	.0699	14.30	1.002	14.34	86°00′	1.5010
.0727	10	.0727	.9974	.0729	13.73	1.003	13.76	50	1.4981
.0756	20	.0756	.9971	.0758	13.20	1.003	13.23	40	1.4952
.0785	30	.0785	.9969	.0787	12.71	1.003	12.75	30	1.4923
.0814	40	.0814	.9967	.0816	12.25	1.003	12.29	20	1.4893
.0844	50	.0843	.9964	.0846	11.83	1.004	11.87	10	1.4864
.0873	5°00′	.0872	.9962	.0875	11.43	1.004	11.47	85°00′	1.4835
.0902	10	.0901	.9959	.0904	11.06	1.004	11.10	50	1.4806
.0931	20	.0929	.9957	.0934	10.71	1.004	10.76	40	1.4777
.0960	30	.0958	.9954	.0963	10.39	1.005	10.43	30	1.4748
.0989	40	.0987	.9951	.0992	10.08	1.005	10.13	20	1.4719
.1018	50	.1016	.9948	.1022	9.788	1.005	9.839	10	1.4690
.1047	6°00′	.1045	.9945	.1051	9.514	1.006	9.567	84°00′	1.4661
.1076	10	.1074	.9942	.1080	9.255	1.006	9.309	50	1.4632
.1105	20	.1103	.9939	.1110	9.010	1.006	9.065	40	1.4603
.1134	30	.1132	.9936	.1139	8.777	1.006	8.834	30	1.4573
.1164	40	.1161	.9932	.1169	8.556	1.007	8.614	20	1.4544
.1193	50	.1190	.9929	.1198	8.345	1.007	8.405	10	1.4515
.1222	7°00′	.1219	.9925	.1228	8.144	1.008	8.206	83°00′	1.4486
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.1222	7°00′	.1219	.9925	.1228	8.144	1.008	8.206	83°00′	1.4486
.1251	10	.1248	.9922	.1257	7.953	1.008	8.016	50	1.4457
.1280	20	.1276	.9918	.1287	7.770	1.008	7.834	40	1.4428
.1309	30	.1305	.9914	.1317	7.596	1.009	7.661	30	1.4399
.1338	40	.1334	.9911	.1346	7.429	1.009	7.496	20	1.4370
.1367	50	.1363	.9907	.1376	7.269	1.009	7.337	10	1.4341
.1396	8°00′	.1392	.9903	.1405	7.115	1.010	7.185	82°00′	1.4312
.1425	10	.1421	.9899	.1435	6.968	1.010	7.040	50	1.4283
.1454	20	.1449	.9894	.1465	6.827	1.011	6.900	40	1.4254
.1484	30	.1478	.9890	.1495	6.691	1.011	6.765	30	1.4224
.1513	40	.1507	.9886	.1524	6.561	1.012	6.636	20	1.4195
.1542	50	.1536	.9881	.1554	6.435	1.012	6.512	10	1.4166
.1571	9°00′	.1564	.9877	.1584	6.314	1.012	6.392	81°00′	1.4137
.1600	10	.1593	.9872	.1614	6.197	1.013	6.277	50	1.4108
.1629	20	.1622	.9868	.1644	6.084	1.013	6.166	40	1.4079
.1658	30	.1650	.9863	.1673	5.976	1.014	6.059	30	1.4050
.1687	40	.1679	.9858	.1703	5.871	1.014	5.955	20	1.4021
.1716	50	.1708	.9853	.1733	5.769	1.015	5.855	10	1.3992
.1745	10°00′	.1736	.9848	.1763	5.671	1.015	5.759	80°00′	1.3963
.1774	10	.1765	.9843	.1793	5.576	1.016	5.665	50	1.3934
.1804	20	.1794	.9838	.1823	5.485	1.016	5.575	40	1.3904
.1833	30	.1822	.9833	.1853	5.396	1.017	5.487	50	1.3875
.1862	40	.1851	.9827	.1883	5.309	1.018	5.403	20	1.3846
.1891	50	.1880	.9822	.1914	5.226	1.018	5.320	10	1.3817
.1920	11°00′	.1908	.9816	.1944	5.145	1.019	5.241	79°00′	1.3788
.1949	10	.1937	.9811	.1974	5.066	1.019	5.164	50	1.3759
.1978	20	.1965	.9805	.2004	4.989	1.020	5.089	40	1.3730
.2007	30	.1994	.9799	.2035	4.915	1.020	5.016	30	1.3701
.2036	40	.2022	.9793	.2065	4.843	1.021	4.945	20	1.3672
.2065	50	.2051	.9787	.2095	4.773	1.022	4.876	10	1.3643
.2094	12°00′	.2079	.9781	.2126	4.705	1.022	4.810	78°00′	1.3614
.2123	10	.2108	.9775	.2156	4.638	1.023	4.745	50	1.3584
.2153	20	.2136	.9769	.2186	4.574	1.024	4.682	40	1.3555
.2182	30	.2164	.9763	.2217	4.511	1.024	4.620	30	1.3526
.2211	40	.2193	.9757	.2247	4.449	1.025	4.560	20	1.3497
.2240	50	.2221	.9750	.2278	4.390	1.026	4.502	10	1.3468
.2269	13°00′	.2250	.9744	.2309	4.331	1.026	4.445	77°00′	1.3439
.2298	10	.2278	.9737	.2339	4.275	1.027	4.390	50	1.3410
.2327	20	.2306	.9730	.2370	4.219	1.028	4.336	40	1.3381
.2356	30	.2334	.9724	.2401	4.165	1.028	4.284	30	1.3352
.2385	40	.2363	.9717	.2432	4.113	1.029	4.232	20	1.3323
.2414	50	.2391	.9710	.2462	4.061	1.030	4.182	10	1.3294
.2443	14°00′	.2419	.9703	.2493	4.011	1.031	4.134	76°00′	1.3265
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

TABLA 4 Funciones trigonométricas de valores en grados (cont.)

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.2443	14°00′	.2419	.9703	.2493	4.011	1.031	4.134	76°00′	1.3265
.2473	10	.2447	.9696	.2524	3.962	1.031	4.086	50	1.3235
.2502	20	.2476	.9689	.2555	3.914	1.032	4.039	40	1.3206
.2531	30	.2504	.9681	.2586	3.867	1.033	3.994	30	1.3177
.2560	40	.2532	.9674	.2617	3.821	1.034	3.950	20	1.3148
.2589	50	.2560	.9667	.2648	3.776	1.034	3.906	10	1.3119
.2618	15°00′	.2588	.9659	.2679	3.732	1.035	3.864	75°00′	1.3090
.2647	10	.2616	.9652	.2711	3.689	1.036	3.822	50	1.3061
.2676	20	.2644	.9644	.2742	3.647	1.037	3.782	40	1.3032
.2705	30	.2672	.9636	.2773	3.606	1.038	3.742	30	1.3003
.2734	40	.2700	.9628	.2805	3.566	1.039	3.703	20	1.2974
.2763	50	.2728	.9621	.2836	3.526	1.039	3.665	10	1.2945
.2793	16°00′	.2756	.9613	.2867	3.487	1.040	3.628	74°00′	1.2915
.2822	10	.2784	.9605	.2899	3.450	1.041	3.592	50	1.2886
.2851	20	.2812	.9596	.2931	3.412	1.042	3.556	40	1.2857
.2880	30	.2840	.9588	.2962	3.376	1.043	3.521	30	1.2828
.2909	40	.2868	.9580	.2994	3.340	1.044	3.487	20	1.2799
.2938	50	.2896	.9572	.3026	3.305	1.045	3.453	10	1.2770
.2967	17°00′	.2924	.9563	.3057	3.271	1.046	3.420	73°00′	1.2741
.2996	10	.2952	.9555	.3089	3.237	1.047	3.388	50	1.2712
.3025	20	.2979	.9546	.3121	3.204	1.048	3.356	40	1.2683
.3054	30	.3007	.9537	.3153	3.172	1.049	3.326	30	1.2654
.3083	40	.3035	.9528	.3185	3.140	1.049	3.295	20	1.2625
.3113	50	.3062	.9520	.3217	3.108	1.050	3.265	10	1.2595
.3142	18°00′	.3090	.9511	.3249	3.078	1.051	3.236	72°00′	1.2566
.3171	10	.3118	.9502	.3281	3.047	1.052	3.207	50	1.2537
.3200	20	.3145	.9492	.3314	3.018	1.053	3.179	40	1.2508
.3229	30	.3173	.9483	.3346	2.989	1.054	3.152	30	1.2479
.3258	40	.3201	.9474	.3378	2.960	1.056	3.124	20	1.2450
.3287	50	.3228	.9465	.3411	2.932	1.057	3.098	10	1.2421
.3316	19°00′	.3256	.9455	.3443	2.904	1.058	3.072	71°00′	1.2392
.3345	10	.3283	.9446	.3476	2.877	1.059	3.046	50	1.2363
.3374	20	.3311	.9436	.3508	2.850	1.060	3.021	40	1.2334
.3403	30	.3338	.9426	.3541	2.824	1.061	2.996	30	1.2305
.3432	40	.3365	.9417	.3574	2.798	1.062	2.971	20	1.2275
.3462	50	.3393	.9407	.3607	2.773	1.063	2.947	10	1.2246
.3491	20°00′	.3420	.9397	.3640	2.747	1.064	2.924	70°00′	1.2217
.3520	10	.3448	.9387	.3673	2.723	1.065	2.901	50	1.2188
.3549	20	.3475	.9377	.3706	2.699	1.066	2.878	40	1.2159
.3578	30	.3502	.9367	.3739	2.675	1.068	2.855	30	1.2130
.3607	40	.3529	.9356	.3772	2.651	1.069	2.833	20	1.2101
.3636	50	.3557	.9346	.3805	2.628	1.070	2.812	10	1.2072
.3665	21°00′	.3584	.9336	.3839	2.605	1.071	2.790	69°00′	1.2043
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.3665	21°00′	.3584	.9336	.3839	2.605	1.071	2.790	69°00′	1.2043
.3694	10	.3611	.9325	.3872	2.583	1.072	2.769	50	1.2014
.3723	20	.3638	.9315	.3906	2.560	1.074	2.749	40	1.1985
.3752	30	.3665	.9304	.3939	2.539	1.075	2.729	30	1.1956
.3782	40	.3692	.9293	.3973	2.517	1.076	2.709	20	1.1926
.3811	50	.3719	.9283	.4006	2.496	1.077	2.689	10	1.1897
.3840	22°00′	.3746	.9272	.4040	2.475	1.079	2.669	68°00′	1.1868
.3869	10	.3773	.9261	.4074	2.455	1.080	2.650	50	1.1839
.3898	20	.3800	.9250	.4108	2.434	1.081	2.632	40	1.1810
.3927	30	.3827	.9239	.4142	2.414	1.082	2.613	30	1.1781
.3956	40	.3854	.9228	.4176	2.394	1.084	2.595	20	1.1752
.3985	50	.3881	.9216	.4210	2.375	1.085	2.577	10	1.1723
.4014	23°00′	.3907	.9205	.4245	2.356	1.086	2.559	67°00′	1.1694
.4043	10	.3934	.9194	.4279	2.337	1.088	2.542	50	1.1665
.4072	20	.3961	.9182	.4314	2.318	1.089	2.525	40	1.1636
.4102	30	.3987	.9771	.4348	2.300	1.090	2.508	30	1.1606
.4131	40	.4014	.9159	.4383	2.282	1.092	2.491	20	1.1577
.4160	50	.4041	.9147	.4417	2.264	1.093	2.475	10	1.1548
.4189	24°00′	.4067	.9135	.4452	2.246	1.095	2.459	66°00′	1.1519
.4218	10	.4094	.9124	.4487	2.229	1.096	2.443	50	1.1490
.4247	20	.4120	.9112	.4522	2.211	1.097	2.427	40	1.1461
.4276	30	.4147	.9100	.4557	2.194	1.099	2.411	30	1.1432
.4305	40	.4173	.9088	.4592	2.177	1.100	2.396	20	1.1403
.4334	50	.4200	.9075	.4628	2.161	1.102	2.381	10	1.1374
.4363	25°00′	.4226	.9063	.4663	2.145	1.103	2.366	65°00′	1.1345
.4392	10	.4253	.9051	.4699	2.128	1.105	2.352	50	1.1316
.4422	20	.4279	.9038	.4734	2.112	1.106	2.337	40	1.1286
.4451	30	.4305	.9026	.4770	2.097	1.108	2.323	30	1.1257
.4480	40	.4331	.9013	.4806	2.081	1.109	2.309	20	1.1228
.4509	50	.4358	.9001	.4841	2.066	1.111	2.295	10	1.1199
.4538	26°00′	.4384	.8988	.4877	2.050	1.113	2.281	64°00′	1.1170
.4567	10	.4410	.8975	.4913	2.035	1.114	2.268	50	1.1141
.4596	20	.4436	.8962	.4950	2.020	1.116	2.254	40	1.1112
.4625	30	.4462	.8949	.4986	2.006	1.117	2.241	30	1.1083
.4654	40	.4488	.8936	.5022	1.991	1.119	2.228	20	1.1054
.4683	50	.4514	.8923	.5059	1.977	1.121	2.215	10	1.1025
.4712	27°00′	.4540	.8910	.5095	1.963	1.122	2.203	63°00′	1.0996
.4741	10	.4566	.8897	.5132	1.949	1.124	2.190	50	1.0966
.4771	20	.4592	.8884	.5169	1.935	1.126	2.178	40	1.0937
.4800	30	.4617	.8870	.5206	1.921	1.127	2.166	30	1.0908
.4829	40	.4643	.8857	.5243	1.907	1.129	2.154	20	1.0879
.4858	50	.4669	.8843	.5280	1.894	1.131	2.142	10	1.0850
.4887	28°00′	.4695	.8829	.5317	1.881	1.133	2.130	62°00′	1.0821
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

TABLA 4 Funciones trigonométricas de valores en grados (cont.)

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.4887	**28°00′**	.4695	.8829	.5317	1.881	1.133	2.130	**62°00′**	1.0821
.4916	10	.4720	.8816	.5354	1.868	1.134	2.118	50	1.0792
.4945	20	.4746	.8802	.5392	1.855	1.136	2.107	40	1.0763
.4974	30	.4772	.8788	.5430	1.842	1.138	2.096	30	1.0734
.5003	40	.4797	.8774	.5467	1.829	1.140	2.085	20	1.0705
.5032	50	.4823	.8760	.5505	1.816	1.142	2.074	10	1.0676
.5061	**29°00′**	.4848	.8746	.5543	1.804	1.143	2.063	**61°00′**	1.0647
.5091	10	.4874	.8732	.5581	1.792	1.145	2.052	50	1.0617
.5120	20	.4899	.8718	.5619	1.780	1.147	2.041	40	1.0588
.5149	30	.4924	.8704	.5658	1.767	1.149	2.031	30	1.0559
.5178	40	.4950	.8689	.5696	1.756	1.151	2.020	20	1.0530
.5207	50	.4975	.8675	.5735	1.744	1.153	2.010	10	1.0501
.5236	**30°00′**	.5000	.8660	.5774	1.732	1.155	2.000	**60°00′**	1.0472
.5265	10	.5025	.8646	.5812	1.720	1.157	1.990	50	1.0443
.5294	20	.5050	.8631	.5851	1.709	1.159	1.980	40	1.0414
.5323	30	.5075	.8616	.5890	1.698	1.161	1.970	30	1.0385
.5352	40	.5100	.8601	.5930	1.686	1.163	1.961	20	1.0356
.5381	50	.5125	.8587	.5969	1.675	1.165	1.951	10	1.0327
.5411	**31°00′**	.5150	.8572	.6009	1.664	1.167	1.942	**59°00′**	1.0297
.5440	10	.5175	.8557	.6048	1.653	1.169	1.932	50	1.0268
.5469	20	.5200	.8542	.6088	1.643	1.171	1.923	40	1.0239
.5498	30	.5225	.8526	.6128	1.632	1.173	1.914	30	1.0210
.5527	40	.5250	.8511	.6168	1.621	1.175	1.905	20	1.0181
.5556	50	.5275	.8496	.6208	1.611	1.177	1.896	10	1.0152
.5585	**32°00′**	.5299	.8480	.6249	1.600	1.179	1.887	**58°00′**	1.0123
.5614	10	.5324	.8465	.6289	1.590	1.181	1.878	50	1.0094
.5643	20	.5348	.8450	.6330	1.580	1.184	1.870	40	1.0065
.5672	30	.5373	.8434	.6371	1.570	1.186	1.861	30	1.0036
.5701	40	.5398	.8418	.6412	1.560	1.188	1.853	20	1.0007
.5730	50	.5422	.8403	.6453	1.550	1.190	1.844	10	.9977
.5760	**33°00′**	.5446	.8387	.6494	1.540	1.192	1.836	**57°00′**	.9948
.5789	10	.5471	.8371	.6536	1.530	1.195	1.828	50	.9919
.5818	20	.5495	.8355	.6577	1.520	1.197	1.820	40	.9890
.5847	30	.5519	.8339	.6619	1.511	1.199	1.812	30	.9861
.5876	40	.5544	.8323	.6661	1.501	1.202	1.804	20	.9832
.5905	50	.5568	.8307	.6703	1.492	1.204	1.796	10	.9803
.5934	**34°00′**	.5592	.8290	.6745	1.483	1.206	1.788	**56°00′**	.9774
.5963	10	.5616	.8274	.6787	1.473	1.209	1.781	50	.9745
.5992	20	.5640	.8258	.6830	1.464	1.211	1.773	40	.9716
.6021	30	.5664	.8241	.6873	1.455	1.213	1.766	30	.9687
.6050	40	.5688	.8225	.6916	1.446	1.216	1.758	20	.9657
.6080	50	.5712	.8208	.6959	1.437	1.218	1.751	10	.9628
.6109	**35°00′**	.5736	.8192	.7002	1.428	1.221	1.743	**55°00′**	.9599
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.6109	**35°00′**	.5736	.8192	.7002	1.428	1.221	1.743	**55°00′**	.9599
.6138	10	.5760	.8175	.7046	1.419	1.223	1.736	50	.9570
.6167	20	.5783	.8158	.7089	1.411	1.226	1.729	40	.9541
.6196	30	.5807	.8141	.7133	1.402	1.228	1.722	30	.9512
.6225	40	.5831	.8124	.7177	1.393	1.231	1.715	20	.9483
.6254	50	.5854	.8107	.7221	1.385	1.233	1.708	10	.9454
.6283	**36°00′**	.5878	.8090	.7265	1.376	1.236	1.701	**54°00′**	.9425
.6312	10	.5901	.8073	.7310	1.368	1.239	1.695	50	.9396
.6341	20	.5925	.8056	.7355	1.360	1.241	1.688	40	.9367
.6370	30	.5948	.8039	.7400	1.351	1.244	1.681	30	.9338
.6400	40	.5972	.8021	.7445	1.343	1.247	1.675	20	.9308
.6429	50	.5995	.8004	.7490	1.335	1.249	1.668	10	.9279
.6458	**37°00′**	.6018	.7986	.7536	1.327	1.252	1.662	**53°00′**	.9250
.6487	10	.6041	.7969	.7581	1.319	1.255	1.655	50	.9221
.6516	20	.6065	.7951	.7627	1.311	1.258	1.649	40	.9192
.6545	30	.6088	.7934	.7673	1.303	1.260	1.643	30	.9163
.6574	40	.6111	.7916	.7720	1.295	1.263	1.636	20	.9134
.6603	50	.6134	.7898	.7766	1.288	1.266	1.630	10	.9105
.6632	**38°00′**	.6157	.7880	.7813	1.280	1.269	1.624	**52°00′**	.9076
.6661	10	.6180	.7862	.7860	1.272	1.272	1.618	50	.9047
.6690	20	.6202	.7844	.7907	1.265	1.275	1.612	40	.0918
.6720	30	.6225	.7826	.7954	1.257	1.278	1.606	30	.8988
.6749	40	.6248	.7808	.8002	1.250	1.281	1.601	20	.8959
.6778	50	.6271	.7790	.8050	1.242	1.284	1.595	10	.8930
.6807	**39°00′**	.6293	.7771	.8098	1.235	1.287	1.589	**51°00′**	.8901
.6836	10	.6316	.7753	.8146	1.228	1.290	1.583	00	.8872
.6865	20	.6338	.7735	.8195	1.220	1.293	1.578	40	.8843
.6894	30	.6361	.7716	.8243	1.213	1.296	1.572	30	.8814
.6923	40	.6383	.7698	.8292	1.206	1.299	1.567	20	.8785
.6952	50	.6406	.7679	.8342	1.199	1.302	1.561	10	.8756
.6981	**40°00′**	.6428	.7660	.8391	1.192	1.305	1.556	**50°00′**	.8727
.7010	10	.6450	.7642	.8441	1.185	1.309	1.550	50	.8698
.7039	20	.6472	.7623	.8491	1.178	1.312	1.545	40	.8668
.7069	30	.6494	.7604	.8541	1.171	1.315	1.540	30	.8639
.7098	40	.6417	.7585	.8591	1.164	1.318	1.535	20	.8610
.7127	50	.6539	.7566	.8642	1.157	1.322	1.529	10	.8581
.7156	**41°00′**	.6561	.7547	.8693	1.150	1.325	1.524	**49°00′**	.8552
.7185	10	.6583	.7528	.8744	1.144	1.328	1.519	50	.8523
.7214	20	.6604	.7509	.8796	1.137	1.332	1.514	40	.8494
.7243	30	.6626	.7490	.8847	1.130	1.335	1.509	30	.8465
.7272	40	.6648	.7470	.8899	1.124	1.339	1.504	20	.8436
.7301	50	.6670	.7451	.8952	1.117	1.342	1.499	10	.8407
.7330	**42°00′**	.6691	.7431	.9004	1.111	1.346	1.494	**48°00′**	.8378
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

32. Un hombre tiene un patio trasero rectangular de 50 pie de frente y 60 pie de fondo. Planea tener una piscina (o alberca) y un patio, como se muestra en la figura, y puede gastar cuando mucho \$12 000 (dólares) en el proyecto. El área del patio debe ser al menos tan grande como la de la piscina. El costo del área de ésta es de \$5.00 por pie cuadrado, y el del patio es de \$3.00 por pie cuadrado. Obtenga y grafique el sistema de desigualdades que describe las posibilidades para el ancho del patio y del área del tanque. (Véase figura en la página anterior.)

9.10 Programación lineal

Muchos problemas de aplicación implican la resolución particular de un sistema de desigualdades. Un problema común consiste en encontrar el valor máximo o mínimo de ciertas expresiones que involucran variables que están sujetas a diversas restricciones. Si todas las expresiones y desigualdades son lineales en las variables, entonces como ayuda para resolver tales problemas se puede usar una técnica llamada **programación lineal**. Esta técnica ha alcanzado una gran importancia en las empresas, donde se deben tomar decisiones acerca del mejor uso de los inventarios, refacciones o procesos de fabricación. Generalmente, el objetivo de una empresa es maximizar las ganancias o minimizar los costos. Como frecuentemente hay muchas alternativas, resulta muy difícil tomar una decisión acertada. La teoría matemática que respalda a la programación lineal puede simplificar considerablemente este proceso. El desarrollo lógico de los teoremas y técnicas necesarios están más allá de los objetivos de este texto, por lo que, nos limitaremos a presentar algunos ejemplos.

EJEMPLO 1 El fabricante de cierto producto tiene dos almacenes W_1 y W_2. En W_1 tiene almacenadas 80 unidades, y en W_2, 70. Dos clientes A y B le ordenan 35 y 60 unidades, respectivamente. El costo del flete desde cada almacén hasta A y B está determinado de acuerdo con la siguiente tabla. ¿Cuántas unidades, de cada almacén, se le deberán mandar a cada cliente, para minimizar el costo del flete?

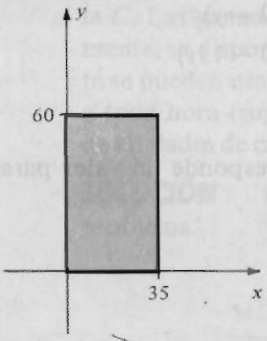
Almacén	Cliente	Costo del flete por unidad
W_1	A	\$ 8
W_1	B	12
W_2	A	10
W_2	B	13

SOLUCIÓN Sea

$x =$ número de unidades que se embarcan a A de W_1,

$y =$ número de unidades que se embarcan a B de W_1.

FIGURA 9.14



Entonces, para surtir los pedidos se necesitan

$35 - x =$ número enviado a A de W_2,

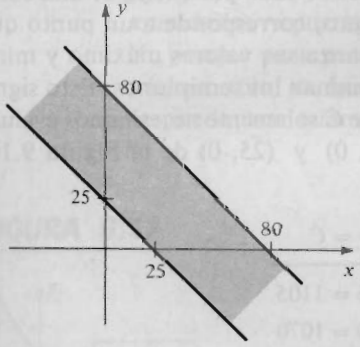
$60 - y =$ número enviado a B de W_2.

Debemos ahora determinar los valores de x y y que minimizan los costos totales de los fletes. En primer lugar, debemos notar que la pareja (x, y) debe ser una solución del siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 35 \\ 0 \leq y \leq 60. \end{cases}$$

La gráfica de este sistema es la región rectangular de la Figura 9.14.

FIGURA 9.15



Existen otras restricciones para x y y que hacen posible reducir el tamaño de la región anterior. Como el número total de unidades embarcadas desde W_1 y W_2 no puede exceder de 80 y 70 respectivamente, entonces la pareja (x, y) debe también satisfacer el sistema

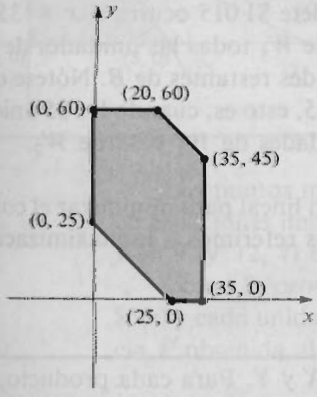
$$\begin{cases} x + y \leq 80 \\ (35 - x) + (60 - y) \leq 70. \end{cases}$$

Este sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x + y \leq 80 \\ x + y \geq 25. \end{cases}$$

Su gráfica es la región que está entre las rectas paralelas $x + y = 80$ y $x + y = 25$ (véase la Figura 9.15). Como la pareja (x, y) que estamos buscando debe ser una solución de este sistema y también del sistema $0 \leq x \leq 35$, $0 \leq y \leq 60$, entonces el punto correspondiente debe estar en la región de la Figura 9.16.

FIGURA 9.16



Sea C el costo total (en dólares) por embarcar la mercancía a A y B. Vemos en la tabla que enumera los costos por envío que lo que sigue es verdadero:

Costo por envío de 35 unidades a

$$A = 8x + 10(35 - x),$$

Costo por envío de 60 unidades a

$$B = 12y + 13(60 - y).$$

De ahí que, el costo total sea

$$C = 8x + 10(35 - x) + 12y + 13(60 - y)$$
$$= (8x + 350 - 10x) + (12y + 780 - 13y)$$

o bien $$C = 1130 - 2x - y.$$

A cada punto (x, y) de la región de la Figura 9.16 corresponde un valor para C. Por ejemplo, en (20, 40)

$$C = 1130 - 40 - 40 = 1050,$$

y en (10, 50) $$C = 1130 - 20 - 50 = 1060.$$

Como x y y son enteros, existe solamente un número finito de valores posibles de C. Al comprobar cada posibilidad, podemos encontrar la pareja (x, y) que produce el menor costo. Sin embargo, como existe un gran número de pares, la comprobación de cada uno de ellos es sumamente tediosa. Es en este punto que la teoría desarrollada en programación lineal tiene utilidad. Se puede demostrar que si estamos interesados en el valor C de una expresión lineal $ax + by + c$, donde cada par (x, y) es una solución del sistema de desigualdades lineales y por lo tanto, corresponde a un punto que está en la intersección de semiplanos, entonces C alcanza sus valores máximo y mínimo en un punto de intersección de las rectas que determinan los semiplanos. Esto significa que para determinar el valor mínimo (o máximo) de C solamente necesitamos evaluar en los puntos (0, 25), (0, 60), (20, 60), (35, 45), (35, 0) y (25, 0) de la Figura 9.16. En la siguiente tabla se muestran estos valores.

Punto	$1130 - 2x - y = C$
(0, 25)	$1130 - 2(0) - 25 = 1105$
(0, 60)	$1130 - 2(0) - 60 = 1070$
(20, 60)	$1130 - 2(20) - 60 = 1030$
(35, 45)	$1130 - 2(35) - 45 = 1015$
(35, 0)	$1130 - 2(35) - 0 = 1060$
(25, 0)	$1130 - 2(25) - 0 = 1080$

Conforme a estas observaciones, el mínimo costo del flete \$1 015 ocurre si $x = 35$ y $y = 45$. Por lo tanto, el fabricante debe embarcar desde W_1 todas las unidades de A, así como 45 de las unidades de B, y desde W_2 las unidades restantes de B. Nótese que el *máximo* costo del flete ocurre cuando $x = 0$ y $y = 25$, esto es, cuando las 35 unidades de A son embarcadas desde W_2 y B recibe 25 unidades de W_1 y 35 de W_2. ■

El ejemplo anterior ilustra el uso de la programación lineal para minimizar el costo en una situación específica. En el siguiente ejemplo nos referimos a la maximización de las ganancias.

EJEMPLO 2 Una empresa fabrica dos productos X y Y. Para cada producto, es necesario usar tres máquinas distintas, A, B y C. La fabricación de una unidad de X

requiere usar la máquina A durante 3 horas, la B por 1 hora y la C por 1 hora, mientras que para fabricar una unidad de Y se necesita usar 2 horas la A, 2 horas la B y 1 hora la C. Las ganancias por unidad de los productos X y Y son de \$500 y \$350, respectivamente; se dispone de la máquina A durante las 24 horas del día, sin embargo, solamente se pueden usar B por 16 horas y C por 9 horas. Si se puede disponer de las máquinas a toda hora (sujeto a las mencionadas restricciones de tiempo), determine el número de unidades de cada producto que se deberán fabricar para maximizar la ganancia diaria.

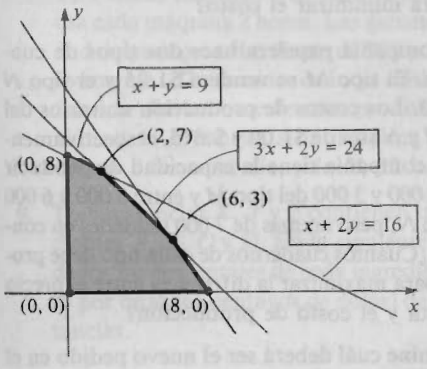
SOLUCIÓN En la siguiente tabla se sintetizan los datos dados en el enunciado del problema.

Máquina	Horas requeridas para 1 unidad de X	Horas requeridas para 1 unidad de Y	Horas disponibles
A	3	2	24
B	1	2	16
C	1	1	9

Sean x y y el número de unidades de X y Y, respectivamente, que se deben fabricar por día. Como cada unidad del producto X requiere 3 horas de la máquina A, entonces x unidades requieren $3x$ horas. Análogamente, y unidades de Y requieren $2y$ horas de A, porque para producir una unidad de Y se usa A durante 2 horas. De ahí que, el número total de horas por día que se debe usar la máquina A es $3x + 2y$. Como A se puede usar cuando mucho 24 horas al día, tenemos

$$3x + 2y \leq 24.$$

FIGURA 9.17



Haciendo el mismo tipo de razonamiento en los renglones dos y tres de la tabla obtenemos que

$$x + 2y \leq 16$$
$$x + y \leq 9.$$

este sistema de tres desigualdades lineales, así como las desigualdades evidentes

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

establecen, en forma matemática, las restricciones que ocurren en el proceso de fabricación. En la Figura 9.17, se muestra la gráfica del sistema anterior de cinco desigualdades lineales.

Los puntos marcados en la figura son los que se obtienen al resolver los sistemas de ecuaciones lineales. Específicamente, (6, 3) es una solución de $3x + 2y = 24$, $x + y = 9$ y (2, 7) es una solución del sistema $x + 2y = 16$, $x + y = 9$.

Como la producción de cada unidad del producto X conduce a una ganancia de \$500 y cada unidad de producto Y resulta en una ganancia de \$350, entonces la ganancia P obtenida al producir x unidades de X y y unidades de Y está dada por

$$P = 500x + 350y.$$

El valor máximo de P debe ocurrir en alguno de los puntos de la Figura 9.17. En la siguiente tabla se muestran los valores de P en cada uno de los puntos.

(x, y)	$500x + 350y = P$
$(0, 8)$	$500(0) + 350(8) = 2800$
$(2, 7)$	$500(2) + 350(7) = 3450$
$(6, 3)$	$500(6) + 350(3) = 4050$
$(8, 0)$	$500(8) + 350(0) = 4000$
$(0, 0)$	$500(0) + 350(0) = 0$

De la tabla vemos que la máxima ganancia de \$4 050 ocurre si hay una producción diaria de 6 unidades del producto X y 3 unidades de producto Y. ■

Los dos ejemplos que hemos dado en esta sección son problemas elementales de programación lineal que pueden ser resueltos por métodos rudimentarios. Los problemas prácticos más complicados se resuelven generalmente empleando técnicas matriciales que se adaptan a su resolución por computadora.

Ejercicios 9.10

1. Un fabricante de raquetas de tenis obtiene una ganancia de \$15 en cada raqueta Set Point y \$8 en cada raqueta Double Fault. Para satisfacer la demanda de sus distribuidores, la producción diaria de las Double Fault debe ser de entre 30 y 80, así como de entre 10 y 30 de las Set Point. Pero para mantener una buena calidad, no debe producir en total más de 80 por día. ¿Cuántas raquetas de cada tipo debe producir para maximizar su ganancia.

2. Un fabricante de radios de banda civil CB obtiene una ganancia de \$25 en el modelo de lujo y de \$30 en el estándar. La compañía desea producir un mínimo de 80 modelos de lujo y cuando menos 100 de tipo estándar por día. Para mantener una alta calidad, la producción total no debe exceder de 200 radios. ¿Cuántos debe producir diariamente de cada tipo para maximizar la ganancia?

3. Dos sustancias S y T contienen cada una dos tipos de ingredientes I y G. Una libra de S contiene 2 onzas de I y 4 onzas de G, y una libra de T contiene 2 onzas de I y 6 onzas de G. Se desea combinar las dos sustancias para obtener una mezcla cuyo contenido sea de al menos 9 onzas de I y 20 onzas de G. Si los costos respectivos de las sustancias S y T son de \$3.00 y \$4.00 por libra, ¿qué cantidad se debe usar de cada sustancia para minimizar el costo?

4. Una compañía papelera hace dos tipos de cuadernos. El tipo M se vende a \$1.25 y el tipo N a \$0.90. Los costos de producción unitarios del tipo M y N son de \$1.00 y \$.075, respectivamente. La compañía tiene la capacidad de producir entre 2 000 y 3 000 del tipo M y entre 3 000 y 6 000 del tipo N, pero no más de 7 000 unidades en conjunto. ¿Cuántos cuadernos de cada tipo debe producir para maximizar la diferencia entre el precio de venta y el costo de producción?

5. Determine cuál deberá ser el nuevo pedido en el Ejemplo 1 de esta sección, si se desea minimizar el costo total del flete y los costos de embarque de W_1 a A, de W_2 a A, de W_1 a B y de W_2 a B son de \$12, \$10, \$16 y \$12 por unidad, respectivamente.

6. Una compañía cafetalera compra lotes de una mezcla de distintos tipos de grados de café y luego los clasifica en supremo, regular e inservible. La compañía necesita cuando menos 280 toneladas del grado de suprema calidad y no menos de

200 toneladas del regular, y puede comprar cualquier cantidad de café no clasificado a dos proveedores A y B. En la siguiente tabla se indican los porcentajes de las clases suprema, regular e inservible que contienen las muestras que proporcionaron cada uno de los proveedores.

Proveedor	Supremo	Regular	Inservible
A	20%	50%	30%
B	40%	20%	40%

¿Qué cantidad le debe comprar a cada proveedor para satisfacer sus necesidades a un costo mínimo, si A vende a \$125 la tonelada y B a \$200?

7. Un granjero dispone de 100 acres para sembrar dos cultivos A y B. La semilla para el cultivo A cuesta \$4 por acre y para la B, \$6 por acre, y los costos totales de mano de obra respectivos son \$20 y \$10 por acre. El ingreso esperado es de \$110 por acre de la cosecha A y de \$150 por acre de la B. ¿Cuántos acres debe sembrar de cada cultivo para obtener la máxima ganancia, si no desea invertir más de \$480 en semilla, ni más de \$1 400 en mano de obra?

8. Una empresa emplea dos máquinas X y Y para fabricar dos productos A y B. La fabricación de A requiere usar la máquina X $\frac{1}{2}$ hora, y la de Y, 1 hora, mientras que para el producto B se usa cada máquina 2 horas. Las ganancias por unidad de producto A y B son de \$20 y \$50, respectivamente. Determine cuántas unidades debe fabricar diariamente de cada producto para maximizar la ganancia, si la máquina X se puede operar 8 horas al día, y la Y, 12 horas al día.

9. Tres sustancias X, Y y Z contienen cuatro ingredientes A, B, C y D. En la siguiente tabla están dados los porcentajes de cada ingrediente y el costo por onza (en centavos de dólar) de las tres sustancias.

Sustancia	A	B	C	D	Costo/Onza
X	20%	10%	25%	45%	25¢
Y	20%	40%	15%	25%	35¢
Z	10%	20%	25%	45%	50¢

¿Cuántas onzas se deben combinar de cada sustancia para obtener, con un costo mínimo, 20 onzas con un contenido de al menos 14% de A, 16% de B y 20% de C? ¿Con qué combinación se maximiza el costo?

10. Un hombre planea poner un puesto en una feria que dura un día y en el que venderá bolsas de cacahuates y de dulces. Dispone de \$100 para comprar su mercancía, cuyo costo es de \$0.10 por cada bolsa de cacahuates y de \$0.20 por cada bolsa de dulces. Los precios de venta serán de \$0.15 por bolsa de cacahuates y \$0.26 por bolsa de dulces. En el puesto se pueden acomodar 500 bolsas de cacahuates y 100 bolsas de dulces. Por sus experiencias en el pasado, sabe que no venderá más de 700 bolsas en total. Determine el número de bolsas que debe tener de cada producto para maximizar su ganancia. ¿Cuál es su ganancia máxima?

11. Una pequeña ciudad desea adquirir minibuses y autobuses medianos para su sistema de transporte público. La ciudad no puede gastar más de \$100 000 (dólares) en los vehículos ni más de \$500 mensuales en mantenimiento. El precio de los minibuses es de \$10 000 cada uno y su mantenimiento cuesta en promedio \$100 mensuales. Las estimaciones correspondientes a los costos de cada autobús son de \$20 000 y \$75 mensuales. Si cada minibús puede transportar 10 pasajeros y cada autobús 15, calcule el número de minibuses y de autobuses que se deben comprar para maximizar la capacidad de transporte de pasajeros del sistema.

12. Refiérase al Ejercicio 11. El costo mensual de combustible (tomando como base 5 000 millas de servicios) para cada minibús es de \$550 (dólares), mientras que cada autobús consume \$850 en combustible. Determine el número de minibuses y de autobuses que se deberían comprar para minimizar los costos mensuales de combustible si la capacidad de transporte de pasajeros del sistema debe ser cuando menos de 75.

13. Un piscicultor comprará no más de 5 000 truchas y lobinas jóvenes de un vivero y las alimentará durante un año, con una dieta especial. Cada trucha consume \$0.50 (de dólar) en alimento, mientras que cada lobina consume \$0.75. La cantidad total que puede gastarse en la dieta especial no debe exceder de \$3 000 (dólares). Al terminar el año una trucha típica pesará 2 libras y una lobina, 3 libras. ¿Cuántos peces de cada clase deben mantenerse en el estanque para que el número total de libras de pescado sea máximo al terminar el año?

14. El dietista de un hospital desea preparar un platillo de maíz y calabazas que proporcione al menos 3 g (gramos) de proteínas y no cueste más de 36 ¢ (de dólar) por ración. Una onza de maíz con crema proporciona 0.5 g de proteína y cuesta 4 ¢. Una onza de calabazas proporciona 0.25 g de proteínas y cuesta 3 ¢. Para un buen sabor se necesitan al menos 2 onzas de maíz y la misma cantidad de calabaza que de maíz. Es importante que el número de onzas por ración sea tan pequeño como sea posible. Halle la combinación de maíz y calabaza que hace mínimo el tamaño de la ración.

15. Un contratista desea convertir un edificio grande en una serie de espacios para almacenar objetos personales. Para ello construirá unidades básicas de 8 × 10 pies, y unidades de lujo de 12 × 10 pies, que contendrán anaqueles adicionales y un ropero. Las consideraciones del mercado indican que habrá al menos el doble de unidades pequeñas que grandes, y que las unidades pequeñas se pueden vender en \$40 (dólares) mensuales, y las de lujo en \$75. Hay cuando mucho 7 200 pie^2 para los compartimentos y no se pueden gastar más de \$30 000 en la construcción. Si el costo de construcción de cada unidad pequeña sería de \$300, mientras que cada unidad de lujo costaría \$600, ¿cuántas unidades de cada tipo se deben construir para maximizar los ingresos mensuales?

9.11 Repaso

Defina o discuta cada uno de los siguientes conceptos.

1. Sistema de ecuaciones.
2. Solución de un sistema de ecuaciones.
3. Sistemas de ecuaciones equivalentes.
4. Sistema de ecuaciones lineales.
5. Descomposición en fracciones parciales.
6. Matriz de $m \times n$.
7. Matriz cuadrada de orden n.
8. Matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales; matriz aumentada.
9. Transformaciones elementales de renglones.
10. Sistema de ecuaciones lineales homogéneo.
11. Suma y producto de dos matrices.
12. Matriz nula (o cero).
13. Matriz identidad.
14. Inversa de una matriz.
15. Determinante.
16. Menor.
17. Cofactor.
18. Propiedades de los determinantes.
19. Regla de Cramer.
20. Sistema de desigualdades.
21. Programación lineal.

Ejercicios 9.11

Halle las soluciones de los sistemas de ecuaciones de los Ejercicios 1 a 16.

1. $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y + 4 = x^2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 9x^2 + 16y^2 = 140 \\ x^2 - 4y^2 = 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x = y^2 + 3z \\ x = y^2 + z - 1 \\ x^2 = xz \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=7 \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{y}=1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2^x + 3^{y+1} = 10 \\ 2^{x+1} - 3^y = 5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 4x + 5y - z = -2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ y - 5z = 3 \\ 2x + z = -1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 4x - 3y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x + 2y - z = 1 \\ 3x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 3y = 17 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}=4 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{z}=1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x - y + 3z - w = -3 \\ 3x + 2y - z + w = 13 \\ x - 3y + z - 2w = -4 \\ -x + y + 4z + 3w = 0 \end{cases}$

Encuentre las soluciones y trace las gráficas de cada uno de los sistemas de los Ejercicios 17 a 20.

17. $\begin{cases} x^2 + y^2 < 16 \\ y - x^2 > 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} y - x \le 0 \\ y + x \ge 2 \\ x \le 5 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x - 2y \le 2 \\ y - 3x \le 4 \\ 2x + y \le 4 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2 - y < 0 \\ y - 2x < 5 \\ xy < 0 \end{cases}$

Obtenga los determinantes de las matrices de los Ejercicios 21 a 30.

21. $\begin{bmatrix} -6 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -4 \\ 7 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

31. Obtenga el determinante de la matriz (a_{ij}) de $n \times n$, en donde $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

32. Demuestre, sin hacer el desarrollo, que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0.$$

En los Ejercicios 33 a 36, determine la inversa de cada una de las matrices.

33. $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Exprese cada producto o suma de los Ejercicios 37 a 46 como una matriz única.

37. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

38. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

39. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

40. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 8 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$

41. $2\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

42. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ **43.** $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

44. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

45. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\right\}$

46. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

Verifique los Ejercicios 47 y 48 sin desarrollar los determinantes.

47. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

48. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & k \\ a & b & c \end{vmatrix}$

En los Ejercicios 49 y 50, encuentre las soluciones de la ecuación $|A - xI| = 0$, en la que x representa un número real.

49. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $I = I_2$

50. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $I = I_3$

51. Suponga que $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n tal que $a_{ij} = 0$ si $i < j$. Demuestre que

$$|A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

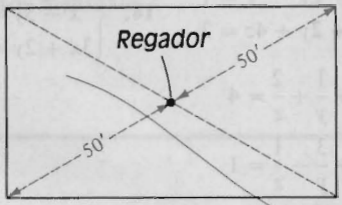
52. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cualquiera de 2×2 tal que $|A| \neq 0$, demuestre que A tiene inversa y encuentre una fórmula general para A^{-1}.

En los Ejercicios 53 y 54 encuentre la descomposición en fracciones parciales.

53. $\dfrac{4x^2 + 54x + 134}{(x + 3)(x^2 + 4x - 5)}$ **54.** $\dfrac{x^2 + 14x - 13}{x^3 + 5x^2 + 4x + 20}$

55. En el centro de un terreno rectangular se colocará un regador giratorio con un alcance de 55 pie (véase la figura). Calcule las dimensiones del terreno suponiendo que contiene 4 000 pie^2 y que el agua debe llegar a las esquinas del terreno.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 55



56. Encuentre las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y que pasan por el punto (0, 3). (*Sugerencia:* Considere $y = mx + 3$ y encuentre las condiciones que m debe cumplir para asegurar que el sistema tenga una solución única.

57. Un contador debe pagar impuestos y bonos sobre nóminas a los empleados a partir de las utilidades de la compañía, que fueron de $50 000 (dólares). El impuesto total es de 40% de la cantidad que queda una vez que se han pagado los bonos, y el total a pagar en bonos es el 10% de la cantidad que queda después de impuestos. Calcule el impuesto total y el importe total por bonos.

58. Una pista circular debe tener una anchura de 10 pie y la longitud total de la circunferencia interior debe ser el 90% de la circunferencia exterior. Encuentre las dimensiones de la pista.

59. Para llenar un tanque de almacenamiento de agua de 1 000 pie^3 se pueden utilizar tres tuberías de entrada A, B y C. Cuando las tres operan a su capacidad total, el tanque se puede llenar en 10 horas. Cuando sólo se utilizan A y B, el tiempo se incrementa a 20 horas. Las tuberías A y C pueden llenar el tanque en 12.5 horas. Obtenga las

intensidades de flujo (en pies cúbicos por hora) de cada una de las tuberías.

60. Un venado ocupa su día en tres actividades básicas: descansar, buscar alimento y pastar. Debe descansar al menos 6 horas diarias y el número de horas que dedica a buscar comida es al menos el doble de las que toma para pastar. Tomando el número de horas dedicadas a buscar comida como x y el número de horas dedicadas a pastar como y, determine y grafique el sistema de desigualdades que describe las posibles maneras de dividir el día.

61. Un fabricante produce una podadora de pasto con motor y una cortadora para orillas. Estos productos son de tan buena calidad que la compañía puede vender todos los que fabrica, pero su capacidad de producción en las áreas de maquinado, soldadura y ensamble es limitada. La compañía dispone de 600 horas semanales para maquinado, 300 horas para soldadura y 550 horas para ensamble. El número de horas que se requiere para producir un solo objeto se muestra en la tabla siguiente:

Producto	Maquinado	Soldadura	Ensable
Podadora	6	2	5
Cortadora	4	3	5

Las utilidades por la venta de una podadora y una cortadora son de \$100 (dólares) y \$80, respectivamente. ¿Cuántas podadoras y cortadoras se deben producir en una semana para que la ganancia sea máxima.

CAPÍTULO 10

Sucesiones, series y probabilidad

El método de demostración llamado ***inducción matemática****, considerado en la primera sección de este capítulo, es necesario para demostrar que ciertas proposiciones son verdaderas para cualquier número entero positivo.* ■ *A continuación se presenta material que contiene una discusión de las* ***sucesiones*** *y la* ***notación de sumatoria****.* ■ *De interés especial son las* ***sucesiones aritmética*** *y* ***geométrica*** *consideradas en las Secciones 10.3 y 10.4.* ■ *La última parte del capítulo contiene una discusión de* ***procesos de conteo*** *que surgen frecuentemente en las matemáticas y en la vida diaria.* ■ *Entre éstos están las nociones de* ***permutaciones****,* ***combinaciones*** *y* ***probabilidad****.*

10.1 Inducción matemática

Si n es un entero positivo, sea P_n el enunciado

$$(xy)^n = x^n y^n$$

en donde x y y son números reales. De esta manera P_1 representa el enunciado $(xy)^1 = x^1 y^1$, P_2 denota $(xy)^2 = x^2 y^2$, P_3 es $(xy)^3 = x^3 y^3$, etcétera. Es fácil demostrar que P_1, P_2 y P_3 son enunciados *verdaderos*. Sin embargo, puesto que el conjunto de los enteros positivos es infinito, es imposible verificar la validez de P_n para todo entero positivo n. Para dar una demostración se requiere del método de la inducción matemática. Este método se basa en el siguiente axioma fundamental.

AXIOMA DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Supóngase que un conjunto S de enteros positivos tiene las siguientes dos propiedades:

(i) S contiene al entero 1.
(ii) Siempre que S contenga a un entero positivo k, S también contiene $k + 1$.

Entonces S contiene a todo entero positivo.

Si S es un conjunto de enteros positivos que satisfacen la propiedad (ii) entonces siempre que S contenga un entero positivo arbitrario k, también debe contener el siguiente entero positivo $k + 1$. Si S también satisface la propiedad (i), entonces S contiene a 1 y por lo tanto por (ii), S contiene $1 + 1$, o sea 2. Aplicando de nuevo (ii), vemos que S contiene a $2 + 1$, o sea 3. Nuevamente S debe contener a $3 + 1$, o sea 4. Si continuamos de esta manera se puede argumentar que si n es cualquier entero positivo *específico*, entonces n está en S, puesto que paso a paso podemos, eventualmente, alcanzar n. Aunque este argumento no demuestra el axioma, ciertamente lo hace plausible.

Usaremos el axioma anterior para establecer el siguiente principio fundamental.

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Si a cada entero positivo n existe asociado un enunciado P_n, entonces todos los enunciados P_n son verdaderos, siempre que se cumplan las siguientes dos condiciones:

(i) P_1 es verdadero.

(ii) Siempre que k sea un entero positivo tal que P_k es verdadero, entonces P_{k+1} es también verdadero.

DEMOSTRACIÓN Supóngase que las condiciones (i) y (ii) del principio de inducción son válidas y sea S el conjunto de todos los enteros positivos n tal que P_n es verdade-

ro. Por hipótesis, P_1 es verdadero, y consecuentemente, 1 está en S. De esta manera S satisface la propiedad (i) del axioma de inducción matemática. Siempre que S contenga un entero positivo k entonces, por la definición de S, P_k es verdadero y por lo tanto de la condición (ii) del principio de inducción, P_{k+1} también es verdadero. Esto significa que S contiene a $k + 1$. Hemos demostrado que siempre que S contenga un entero positivo k entonces también contiene a $k + 1$. Consecuentemente, la propiedad (ii) del axioma de inducción matemática se verifica, y por lo tanto S contiene a todo entero positivo; esto es, P_n es verdadero para todo entero positivo n. □

Hay otras variaciones del principio de inducción matemática. Una está más adelante en esta sección. En la mayor parte de nuestro trabajo el enunciado P_n usualmente se dará en la forma de una ecuación que involucra al entero positivo arbitrario n, como en $(xy)^n = x^n y^n$.

Cuando apliquemos el principio de inducción matemática se deben seguir siempre los dos pasos siguienes:

Paso (i) Demostrar que P_1 es verdadero.

Paso (ii) Suponer que P_k es verdadero y demostrar que P_{k+1} se verifica.

El paso (ii) usualmente es el más confuso para el principiante. No *demostramos* que P_k es verdadero (excepto para $k = 1$). En vez de ello, demostramos que *si* P_k se verifica entonces el enunciado P_{k+1} es verdadero. Esto es todo lo que es necesario de acuerdo con el principio de inducción matemática. El supuesto de que P_k es verdadero se conoce como **hipótesis de inducción**.

EJEMPLO 1 Demostrar que para todo entero positivo n, la suma de los primeros n enteros positivos es

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

SOLUCIÓN Si n es cualquier entero positivo, sea P_n el enunciado

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Los siguientes son algunos casos especiales de P_n:

Si $n = 2$, entonces P_2 es

$$1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2} \quad \text{o bien} \quad 3 = 3.$$

Si $n = 3$, entonces P_3 es

$$1 + 2 + 3 = \frac{3(3+1)}{2} \quad \text{o bien} \quad 6 = 6.$$

Si $n = 5$, entonces P_5 es

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5(5+1)}{2} \quad \text{o bien} \quad 15 = 15.$$

Aunque es instructivo verificar la validez de P_n para diversos valores de n como lo hicimos antes, no es necesario hacerlo así. Únicamente se necesita aplicar los dos pasos del procedimiento señalado antes de este ejemplo. De manera que procedemos como sigue:

Paso (*i*): Si sustituimos $n = 1$ en P_n entonces, por convención, el lado izquierdo contiene sólo el número 1 y el lado derecho es $\frac{1(1+1)}{2}$, que también es 1. Esto demuestra que P_1 es verdadero.

Paso (*ii*): Supóngase que P_k se verifica. De esta manera, la hipótesis de inducción es

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Nuestro objetivo es demostrar que P_{k+1} es verdad, esto es,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.$$

Por la hipótesis de inducción tenemos ya una fórmula para la suma de los primeros k enteros positivos. Por lo tanto, una fórmula para la suma de los primeros $k + 1$ enteros positivos se puede encontrar sumando simplemente $(k + 1)$ en ambos lados. Haciéndolo así y simplificando obtenemos

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

Hemos demostrado que P_{k+1} es verdad y, por lo tanto, la demostración por inducción matemática está completa. ■

EJEMPLO 2 Demostrar que para cada entero positivo n,

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

SOLUCIÓN Para cada entero positivo n, sea P_n el enunciado dado. Nótese que ésta es una fórmula para la suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos impares. De nuevo seguiremos el procedimiento de dos pasos usado en el Ejemplo 1.

Paso (*i*): Sustituyendo n por 1 en P_n obtenemos

$$1^2 = \frac{(1)(2-1)(2+1)}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

lo cual muestra que P_1 es verdadero.

Paso (*ii*): Suponemos que P_k se verifica. De esta manera, la hipótesis de inducción es

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}.$$

Se desea demostrar que P_{k+1} es verdadero, esto es,

$$1^2 + 3^2 + \cdots + [2(k+1)-1]^2 = \frac{(k+1)[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}{3}.$$

Esta ecuación para P_{k+1} se simplifica a

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}.$$

Obsérvese que el antepenúltimo término (de derecha a izquierda) en el lado izquierdo de esta ecuación es $(2k-1)^2$. De manera análoga a la solución del Ejemplo 1, podemos obtener el lado izquierdo de P_{k+1} sumando $(2k+1)^2$ a ambos miembros de la ecuación establecida en la hipótesis de inducción P_k. Esto da.

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2.$$

Se deja como ejercicio demostrar que el lado derecho de la ecuación anterior se puede escribir en la forma del lado derecho de P_{k+1}. Esto demuestra que P_{k+1} es verdadero, y por lo tanto P_n que se verifica para todo n. ■

Considérese un entero positivo j y supóngase que a cada entero $n \geq j$ se asocia un enunciado P_n. Por ejemplo, si $j = 6$, entonces los enunciados se numeran P_6, P_7, P_8, ... El principio de inducción matemática se puede extender para cubrir esta situación. Tal como antes, se usan dos pasos. Específicamente, para demostrar que los enunciados S_n son verdaderos para $n \geq j$, se usan los dos pasos siguientes:

PRINCIPIO EXTENDIDO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA PARA P_k, $k \geq j$

(i′) Demostrar que P_j es verdadero.

(ii′) Suponga que P_k es verdadero para $k \geq j$ y demuestre que P_{k+1} es verdadero.

EJEMPLO 3 Sea a un número real no nulo tal que $a > -1$. Demostrar que $(1+a)^n > 1 + na$ para todo entero $n \geq 2$.

SOLUCIÓN Para cada entero positivo n, sea P_n la desigualdad $(1 + a)^n > 1 + na$. Nótese que P_1 es falso, puesto que $(1 + a)^1 = 1 + (1)(a)$. Sin embargo, podemos demostrar que P_n es cierto para $n \geq 2$ usando el principio ampliado con $j = 2$.

Paso (i'): Primero notamos que $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2$. Puesto que $a \neq 0$, tenemos $a^2 > 0$, y por lo tanto, $1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$. Esto da $(1 + a)^2 > 1 + 2a$, y por consiguiente, P_2 es verdadero.

Paso (ii'): Supóngase que P_k es verdadero para $k \geq 2$. De esta manera, la hipótesis de inducción es

$$(1 + a)^k > 1 + ka.$$

Deseamos demostrar que P_{k+1} se verifica, esto es,

$$(1 + a)^{k+1} > 1 + (k + 1)a.$$

Puesto que $a > -1$, tenemos $a + 1 > 0$, y por lo tanto multiplicar ambos lados de la hipótesis de inducción por $1 + a$ no cambiará el signo de la desigualdad. Consecuentemente,

$$(1 + a)^k(1 + a) > (1 + ka)(1 + a),$$

esto se puede volver a escribir como

$$(1 + a)^{k+1} > 1 + ka + a + ka^2$$

o como $$(1 + a)^{k+1} > 1 + (k + 1)a + ka^2.$$

Puesto que $ka^2 > 0$, tenemos

$$1 + (k + 1)a + ka^2 > 1 + (k + 1)a$$

y por lo tanto, $$(1 + a)^{k+1} > 1 + (k + 1)a.$$

De esta manera, P_{k+1} es verdadero y la demostración queda completa. ■

El Teorema del Binomio se enunció sin demostrarlo, en la Sección 1.5. Esta sección concluirá estableciendo de nuevo este importante resultado y efectuando la demostración mediante inducción matemática.

TEOREMA DEL BINOMIO

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

DEMOSTRACIÓN Para cada entero positivo n, sea P_n el enunciado dado en el Teoma del Binomio.

Paso (i): Si $n = 1$, el enunciado se reduce a $(a + b)^1 = a^1 + b^1$. Consecuentemente P_1 es verdadero.

Paso (ii): Supóngase que P_k se verifica. Entonces la hipótesis de inducción es

$$(a+b)^k = a^k + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}b^2 + \cdots + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}b^{r-1} + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)}{r!}a^{k-r}b^r + \cdots + kab^{k-1} + b^k.$$

en donde hemos demostrado tanto el término r-ésimo como el $(r + 1)$-ésimo en el desarrollo.

Si multiplicamos ambos lados de la ecuación por $(a + b)$ obtenemos

$$(a+b)^{k+1} = \left[a^{k+1} + ka^kb + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-1}b^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{r!}a^{k-r+1}b^r + \cdots + ab^k\right] + \left[a^kb + ka^{k-1}b^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}b^r + \cdots + kab^k + b^{k+1}\right]$$

en donde los términos en el primer paréntesis rectangular resultan de multiplicar por a el lado derecho de la hipótesis de inducción y los términos en el segundo paréntesis rectangular resultan de multiplicar por b. Al reordenar y combinar términos resulta

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + (k+1)a^kb + \left[\frac{k(k-1)}{2!} + k\right]a^{k-1}b^2 + \cdots + \left[\frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{r!} + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}\right]a^{k-r+1}b^r + \cdots + (1+k)ab^k + b^{k+1}.$$

Se puede demostrar que si se simplifican los coeficientes, obtenemos P_n con $k + 1$ en vez de n; entonces P_{k+1} es verdadero, y por lo tanto P_n se cumple para todo entero positivo n. Esto completa la demostración. □

Ejercicios 10.1

En los Ejercicios 1 a 18 demuestre que la fórmula dada es verdadera para todo entero positivo n.

1. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$

2. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

3. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

4. $3 + 9 + 15 + \cdots + (6n - 3) = 3n^2$

5. $2 + 7 + 12 + \cdots + (5n - 3) = \frac{1}{2}n(5n - 1)$

6. $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$

7. $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n - 1) \cdot 2^n$

8. $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^n = \dfrac{(-1)^n - 1}{2}$

9. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$

10. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n + 1)}{2}\right]^2$

11. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n + 1)} = \dfrac{n}{n + 1}$

12. $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n(n + 1)(n + 2)} = \dfrac{n(n + 3)}{4(n + 1)(n + 2)}$

13. $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$

14. $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

15. $n < 2^n$

16. $1 + 2n \leq 3^n$

17. $1 + 2 + 3 + \cdots + n < \frac{1}{8}(2n + 1)^2$

18. Si $0 < a < b$, entonces $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1} < \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

Demuestre que los enunciados en los Ejercicios 19 a 22 son verdaderos para todo entero positivo n.

19. 3 es un factor de $n^3 - n + 3$.

20. 2 es un factor de $n^2 + n$.

21. 4 es un factor de $5^n - 1$.

22. 9 es un factor de $10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5$.

23. Use la inducción matemática para demostrar que si a es cualquier número real mayor que 1, entonces $a^n > 1$ para todo entero positivo n.

24. Demuestre que

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

en donde n es cualquier entero positivo y a y r son números reales con $r \neq 1$.

25. Use inducción matemática para demostrar que $a - b$ es un factor de $a^n - b^n$ para todo entero positivo n. (*Sugerencia:* $a^{k+1} - b^{k+1} = a^k(a - b) + (a^k - b^k)b$.)

26. Demuestre que $a + b$ es un factor de $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ para todo entero positivo n.

27. Use inducción matemática para demostrar el teorema de De Moivre:

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n[\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta]$$

para todo entero positivo n.

28. Demuestre que para todo entero positivo $n \geq 3$, la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n - 2) \cdot 180°$.

Demuestre que las fórmulas en los Ejercicios 29 y 30 son verdaderas para todo entero positivo n.

29. $\operatorname{sen}(\theta + n\pi) = (-1)^n \operatorname{sen}\theta$.

30. $\cos(\theta + n\pi) = (-1)^n \cos\theta$.

10.2 Sucesiones infinitas y notación de sumatoria

Una función f de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asocia a cada elemento x de D un elemento único $f(x)$ de E. Hasta ahora el dominio D ha sido por lo general un conjunto de números reales. En esta sección consideraremos una clase diferente de funciones.

DEFINICIÓN

Una **sucesión infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos.

Por conveniencia, algunas veces nos referimos a las sucesiones infinitas simplemente como *sucesiones*. En este libro, el contradominio de una sucesión infinita será un conjunto de números reales.

Si f es una sucesión infinita, entonces a cada entero positivo n corresponde un número real $f(n)$. A estos números en el contradominio de f se les puede representar escribiendo

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$$

en donde los puntos al final indican que la sucesión no termina. Al número $f(1)$ se le llama **primer término** de la sucesión, a $f(2)$ el **segundo término**, y en general, $f(n)$ es el ***n*-ésimo término** de la sucesión. Es común usar notación de subíndice en vez de notación funcional y escribir estos números como

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

en donde se entiende que para cada entero positivo n, el símbolo a_n denota el número real $f(n)$. De esta manera obtenemos un conjunto infinito de números reales que está *ordenado* en el sentido de que existe un primer número, un segundo número, un cuadragésimo quinto número, y así sucesivamente. A pesar de que las sucesiones son funciones, un conjunto ordenado del tipo anterior también será llamado sucesión infinita. Si deseamos convertir el conjunto en una función f, hacemos $f(n) = a_n$ para todo entero positivo n.

De la definición de igualdad de funciones vemos que una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

es **igual** a una sucesión

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

si y sólo si $a_k = b_k$ para todo entero positivo k. A menudo se definen las sucesiones infinitas enunciando la fórmula del n-ésimo término como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 Enunciar los cuatro primeros términos y el décimo término de la sucesión cuyo n-ésimo término es como sigue:

(a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (b) $a_n = 2 + (0.1)^n$

(c) $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}$ (d) $a_n = 4$

SOLUCIÓN Para encontrar los cuatro primeros términos sustituimos sucesivamente $n = 1, 2, 3$ y 4 en la fórmula de a_n. El décimo término se encuentra al sustituir 10 en lugar de n. Al hacer esto y simplificar obtenemos lo siguiente:

Término n-ésimo	*Primeros cuatro términos*	*Décimo término*
(a) $\dfrac{n}{n+1}$	$\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}$	$\dfrac{10}{11}$

(b) $2 + (0.1)^n$	2.1, 2.01, 2.001, 2.0001	2.0000000001
(c) $(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}$	$\dfrac{1}{2}, -\dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{8}, -\dfrac{16}{11}$	$-\dfrac{100}{29}$
(d) 4	4, 4, 4, 4	4

Algunas secuencias infinitas se describen enunciando el primer término a_1 junto con una regla que muestra cómo obtener cualquier término a_{k+1} a partir del término anterior a_k, siempre que $k \geq 1$. A una descripción de este tipo se la llama **definición recursiva (o recurrente)** y se dice que la secuencia está definida **recursivamente**.

EJEMPLO 2 Hallar los cuatro primeros términos y el n-ésimo término de la sucesión infinita que se define como

$$a_1 = 3 \quad \text{y} \quad a_{k+1} = 2a_k, \quad \text{para} \quad k \geq 1.$$

SOLUCIÓN La definición de la sucesión es recursiva, ya que el primer término está dado, y además, siempre que se conozca un término a_k, se puede encontrar el siguiente término a_{k+1}. Entonces

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 3 = 6$$
$$a_3 = 2a_2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 12$$
$$a_4 = 2a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 = 24.$$

Hemos expresado los términos como productos para obtener información acerca de la naturaleza del n-ésimo término. Si continuamos, obtenemos $a_5 = 2^4 \cdot 3$ y $a_6 = 2^5 \cdot 3$ y se concluye que

$$a_n = 2^{n-1} \cdot 3$$

para todo entero positivo n. Demostraremos que esta conclusión es correcta, por medio de inducción matemática. Si P_n denota la expresión $a_n = 2^{n-1} \cdot 3$, entonces P_1 es verdadera porque $a_1 = 2^0 \cdot 3 = 3$. Ahora, *supóngase* que P_k es verdadera, esto es, $a_k = 2^{k-1} \cdot 3$. Entonces

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k && \text{(definición de } a_{k+1}\text{)} \\ &= 2 \cdot 2^{k-1} \cdot 3 && \text{(hipótesis de inducción)} \\ &= 2^k \cdot 3 && \text{(una ley de exponentes)} \\ &= 2^{(k+1)-1} \cdot 3. && \text{(que equivale a } 2^k \cdot 3\text{)} \end{aligned}$$

lo que demuestra que P_{k+1} es verdadera. Entonces $a_n = 2^{n-1} \cdot 3$ para todo entero positivo n. ■

Es importante observar que si sólo se conocen unos cuantos términos de una sucesión infinita, resulta imposible predecir otros términos. Por ejemplo, si se dan 3,

6, 9, ... y se pide encontrar el cuarto término, no es posible proceder sin información adicional. La sucesión infinita cuyo n-ésimo término es

$$a_n = 3n + (1 - n)^3(2 - n)^2(3 - n)$$

tiene los cuatro primeros términos 3, 6, 9 y 120. Es posible describir sucesiones cuyos tres primeros términos sean 3, 6 y 9, y el cuarto término sea *cualquier* número dado. Esto demuestra que cuando trabajamos con sucesiones infinitas es esencial tener información específica respecto al n-ésimo término o conocer un método general para obtener cada término a partir del que le precede.

A veces es necesario determinar la suma de muchos términos de una sucesión infinita. Para mayor facilidad al expresar tales sumas se utiliza la **notación de sumatoria** que se describe a continuación. Dada una sucesión infinita

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

el símbolo $\sum_{k=1}^{m} a_k$ representa la suma de los m primeros términos, esto es,

NOTACIÓN DE SUMATORIA

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m.$$

La letra griega mayúscula Σ (sigma) indica una suma y el símbolo a_k representa el k-ésimo término. A la letra k se la llama **índice de sumatoria**, o **variable de sumatoria**, y los números 1 y m indican los valores extremos de la citada variable de sumatoria.

EJEMPLO 3 Evaluar

$$\sum_{k=1}^{4} k^2(k - 3).$$

SOLUCIÓN En este caso $a_k = k^2(k - 3)$. Para determinar la suma indicada, simplemente sustituimos, sucesivamente, los enteros k por 1, 2, 3 y 4 y sumamos los términos resultantes. Así,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} k^2(k - 3) &= 1^2(1 - 3) + 2^2(2 - 3) + 3^2(3 - 3) + 4^2(4 - 3)\\ &= (-2) + (-4) + 0 + 16 = 10.\end{aligned}$$

■

La letra que designe la variable de sumatoria es arbitraria. Para ilustrar esto, si usamos j como variable de esa clase entonces

$$\sum_{j=1}^{m} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m,$$

que es lo mismo que $\sum_{k=1}^{m} a_k$. Otros símbolos se pueden usar de manera similar. Como ejemplo numérico, la sumatoria del Ejemplo 3 se puede escribir como

$$\sum_{j=1}^{4} j^2(j-3).$$

Si n es un entero positivo, la suma de los n primeros términos de una sucesión infinita se denota con S_n. Por ejemplo, dada $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$,

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

y en general,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Al número real S_n se le llama ***n*-ésima suma parcial** $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, y a la sucesión infinita

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

se le llama **sucesión de sumas parciales**. Las sucesiones de sumas parciales son muy importantes en cálculo, donde se estudia el concepto de *serie infinita*. Se describirán algunos tipos especiales de series infinitas en la Sección 10.4.

EJEMPLO 4 Determinar los cuatro primeros términos y el n-ésimo término de la sucesión de sumas parciales asociadas a la sucesión 1, 2, 3, ..., n, ... de enteros positivos.

SOLUCIÓN Los cuatro primeros términos de la sucesión de sumas parciales son

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + 2 = 3$$
$$S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$
$$S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Del Ejemplo 1 de la Sección 10.1 vemos que

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$ ■

Si a_k es la misma para todos los enteros positivos k, digamos $a_k = c$, donde c es un número real, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$
$$= c + c + c + \cdots + c = nc.$$

De aquí se obtiene el siguiente resultado.

TEOREMA

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc$$

El dominio de la variable de sumatoria no tiene que empezar en 1. Por ejemplo, lo siguiente se explica por sí mismo:

$$\sum_{k=4}^{8} a_k = a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8.$$

En otra variante, si el primer término de una sucesión infinita es a_0, como en

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

entonces se pueden considerar sumas de la forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Obsérvese que esta es la suma de los $(n + 1)$ primeros términos de la sucesión dada.

EJEMPLO 5 Evaluar

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{2^k}{(k+1)}.$$

SOLUCIÓN

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{2^k}{(k+1)} = \frac{2^0}{(0+1)} + \frac{2^1}{(1+1)} + \frac{2^2}{(2+1)} + \frac{2^3}{(3+1)}$$

$$= 1 + 1 + \frac{4}{3} + 2 = \frac{16}{3}.$$

■

Se puede usar la notación de suma para denotar polinomios en forma compacta. Por ejemplo, en lugar de

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

podemos escribir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k.$$

En otra aplicación, la prolija fórmula del teorema del binomio se puede expresar como

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

El siguiente teorema se refiere a sumas y tiene muchos usos en cursos avanzados de matemáticas.

TEOREMA DE LAS SUMAS

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, son sucesiones infinitas, entonces para todo entero positivo n,

(i) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

(ii) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

(iii) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ para todo número c.

DEMOSTRACIÓN Aunque se puede demostrar el teorema por inducción matemática, usaremos un argumento que hace transparente la veracidad de las fórmulas. Empezamos con lo siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n).$$

Si utilizamos muchas veces las propiedades conmutativa y asociativa, podemos reordenar los términos de la derecha para llegar a

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n).$$

La expresión del lado derecho en notación de sumatoria da la fórmula (i).

Para la fórmula (iii) tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (ca_k) &= ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n \\ &= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \\ &= c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right).\end{aligned}$$

La demostración de (ii) se deja como ejercicio. □

Ejercicios 10.2

En los Ejercicios 1 a 16 encuentre los cinco primeros términos y el octavo término de la sucesión de la que se da el n-ésimo término.

1. $a_n = 12 - 3n$

2. $a_n = \dfrac{3}{5n - 2}$

3. $a_n = \dfrac{3n - 2}{n^2 + 1}$

4. $a_n = 10 + \dfrac{1}{n}$

5. $a_n = 9$

6. $a_n = (n - 1)(n - 2)(n - 3)$

7. $a_n = 2 + (-0.1)^n$

8. $a_n = 4 + (0.1)^n$

9. $a_n = (-1)^{n-1} \dfrac{n + 7}{2n}$

10. $a_n = (-1)^n \dfrac{6 - 2n}{\sqrt{n + 1}}$

11. $a_n = 1 + (-1)^{n+1}$

12. $a_n = (-1)^{n+1} + (0.1)^{n-1}$

13. $a_n = \dfrac{2^n}{n^2 + 2}$ **14.** $a_n = \sqrt{2}$

15. a_n es el número de cifras decimales en $(0.1)^n$.

16. a_n es el número de enteros positivos menores que n^3.

Encuentre los cinco primeros términos de las sucesiones que se definen en forma recursiva en los Ejercicios 17 a 24.

17. $a_1 = 2,\ a_{k+1} = 3a_k - 5$

18. $a_1 = 5,\ a_{k+1} = 7 - 2a_k$

19. $a_1 = -3,\ a_{k+1} = a_k^2$

20. $a_1 = 128,\ a_{k+1} = a_k/4$

21. $a_1 = 5,\ a_{k+1} = ka_k$

22. $a_1 = 3,\ a_{k+1} = 1/a_k$

23. $a_1 = 2,\ a_{k+1} = (a_k)^k$

24. $a_1 = 2,\ a_{k+1} = (a_k)^{1/k}$

25. Una pregunta de un examen enuncia los cuatro primeros términos de una sucesión 2, 4, 6 y 8, y pide el quinto término. Demuestre que el citado quinto término puede ser cualquier número real a, encontrando el n-ésimo término de una sucesión que tenga como primeros cinco términos a 2, 4, 6, 8 y a.

26. El número de bacterias que hay en un cierto cultivo se duplica cada día. Si el número inicial de bacterias es 500, ¿cuántas hay al cabo de un día?, ¿de dos días?, ¿de tres días? Obtenga una fórmula para el número de bacterias después de n días.

Encuentre el número dado en cada uno de los Ejercicios 27 a 42.

27. $\sum_{k=1}^{5} (2k - 7)$ **28.** $\sum_{k=1}^{6} (10 - 3k)$

29. $\sum_{k=1}^{4} (k^2 - 5)$ **30.** $\sum_{k=1}^{10} [1 + (-1)^k]$

31. $\sum_{k=0}^{5} k(k - 2)$ **32.** $\sum_{k=0}^{4} (k - 1)(k - 3)$

33. $\sum_{k=3}^{6} \dfrac{k - 5}{k - 1}$ **34.** $\sum_{k=1}^{6} \dfrac{3}{k + 1}$

35. $\sum_{k=1}^{5} (-3)^{k-1}$ **36.** $\sum_{k=0}^{4} 3(2^k)$

37. $\sum_{k=1}^{100} 100$ **38.** $\sum_{k=1}^{1000} 5$

39. $\sum_{k=1}^{n} (k^2 + 3k + 5)$ (*Sugerencia:* Use el teorema de la sumas para expresar la suma como $\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 5$. A continuación utilice el Ejercicio 9 y el Ejemplo 1 de la Sección 10.1, junto con la fórmula para $\sum_{k=1}^{n} c$.)

40. $\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 2k + 1)$

41. $\sum_{k=1}^{n} (2k - 3)^2$

42. $\sum_{k=1}^{n} (k^3 + 2k^2 - k + 4)$

(*Sugerencia:* Véase el Ejercicio 10 de la Sección 10.1.)

Exprese las sumas de los Ejercicios 43 a 52 en términos de la notación de sumatoria.

43. $1 + 5 + 9 + 13 + 17$

44. $2 + 5 + 8 + 11 + 14$

45. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{4}{11}$

46. $\frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{3}{14} + \frac{4}{19}$

47. $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^6}{6} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2n}$

48. $2 - 4 + 8 - 16 + 32 - 64$

49. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$

50. $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{x^n}{n}$

51. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{99 \cdot 100}$

52. $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{98 \cdot 99 \cdot 100}$

53. Demuestre (ii) del teorema de las sumas.

54. Desarrolle (i) del teorema de las sumas hasta $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k + c_k)$.

55. Demuestre el teorema de las sumas por inducción matemática.

56. Demuestre $\sum_{k=1}^{n} c = nc$ por inducción matemática.

Ejercicios para Calculadora 10.2

1. Los términos de la sucesión, definida recursivamente mediante $a_1 = 5$, $a_{k+1} = \sqrt{a_k}$, pueden generarse ingresando 5 y oprimiendo la tecla de la raíz cuadrada repetidamente. Describa lo que ocurre a los términos de la sucesión conforme k aumenta.

2. Los términos de la sucesión definida recursivamente mediante $a_1 = 1$, $a_{k+1} = \cos a_k$ se pueden generar ingresando 1 y oprimiendo repetidamente la tecla del coseno (en el modo de radianes). Describa lo que ocurre a los términos de la sucesión conforme k aumenta.

3. A partir de la sucesión siguiente se pueden generar aproximaciones para π:

$$x_1 = 3,\ x_{k+1} = x_k - \tan x_k.$$

Encuentre los cinco primeros términos de esta sucesión. ¿Qué pasa a los términos de la sucesión cuando $x_1 = 6$?

4. Se pueden generar aproximaciones para $\sqrt{N}$ a partir de la sucesión

$$x_1 = \frac{N}{2},\ x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{N}{x_k}\right).$$

Determine x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 si $N = 10$.

5. La *sucesión de Bode*, definida por la ecuación $a_1 = \frac{4}{10}$ y $a_k = (3 \cdot 2^{k-2} + 4)/10$ para $k \geq 2$, puede emplearse para calcular las distancias de los planetas al Sol. El tercer término de la sucesión es $a_3 = 1$ *unidad astronómica* (que equivale a 92 900 000 millas) y corresponde a la Tierra. Aproxime los primeros cino términos de la sucesión. (El quinto término corresponde al planetoide (o asteroide) Ceres.)

6. La famosa *sucesión de Fibonacci* se define recursivamente mediante $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ con $a_1 = a_2 = 1$.
   (a) Encuentre los primeros diez términos de la sucesión.
   (b) Los términos de la sucesión $r_k = a_{k+1}/a_k$ dan progresivamente mejores aproximaciones de τ, la *razón de oro*. Aproxime los primeros diez términos de la sucesión.

7. La *sucesión logística discreta* es la sucesión definida recursivamente mediante

$$y_{k+1} = y_k + \frac{r}{K} y_k(K - y_k)$$

en la que r y K son constantes positivas. Esta sucesión se utiliza para modelar el crecimiento de una población que es fecundada estacionalmente en un entorno con recursos limitados.
   (a) Obtenga los términos de la sucesión si $y_1 = K$.
   (b) Aproxime los primeros diez términos de la sucesión si $y_1 = 400$, $r = 2$ y $K = 500$. Describa el comportamiento de esta sucesión que predice el número y_k en la población después de k años.

10.3 Sucesiones aritméticas

En esta sección y en la siguiente nos concentraremos en dos tipos especiales de sucesiones. Al primer tipo lo podemos definir como sigue.

DEFINICIÓN

Una **sucesión aritmética** es una sucesión cuyos términos consecutivos difieren en el mismo número real.

Las sucesiones aritméticas también se llaman **progresiones aritméticas**. Por definición, una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

es aritmética si y sólo si existe un número real d tal que

$$a_{k+1} - a_k = d$$

para todo entero positivo k. Al número d se le llama **diferencia común** asociada con la sucesión aritmética.

EJEMPLO 1 Demostrar que la sucesión

$$1, 4, 7, 10, \ldots, 3n - 2, \ldots$$

es aritmética y determinar la diferencia común.

SOLUCIÓN Si $a_n = 3n - 2$ entonces para todo entero positivo k,

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= [3(k + 1) - 2] - (3k - 2) \\ &= 3k + 3 - 2 - 3k + 2 = 3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por definición, la sucesión dada es aritmética con diferencia común 3. ■

Dada una sucesión aritmética sabemos que

$$a_{k+1} = a_k + d$$

para todo entero positivo k. Esto da una fórmula de recurrencia para obtener términos sucesivos. Si empezamos con cualquier número real a_1, podemos generar una sucesión aritmética con diferencia común d simplemente sumando d a a_1, después a $a_1 + d$ y así sucesivamente para obtener

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, \ldots$$

Es evidente que el n-ésimo término a_n de esta sucesión está dado por la siguiente fórmula.

n-ésimo TÉRMINO DE UNA SUCESIÓN ARITMÉTICA

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

EJEMPLO 2 Hallar el decimoquinto término de la sucesión aritmética cuyos tres primeros términos son 20, 16.5 y 13.

SOLUCIÓN La diferencia común es -3.5. Al sustituir $a_1 = 20$, $d = -3.5$ y $n = 15$ en la fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)d$ resulta

$$a_{15} = 20 + (15 - 1)(-3.5) = 20 - 49 = -29.$$ ■

EJEMPLO 3 Si el cuarto término de una sucesión aritmética es 5 y el noveno término es 20, obtener el sexto término.

9. Encuentre el decimosegundo término de la sucesión aritmética cuyos dos primeros términos son 9.1 y 7.5.

10. Halle el decimoprimer término de la sucesión aritmética cuyos dos primeros términos son $2 + \sqrt{2}$ y 3.

11. Los términos sexto y séptimo de una sucesión aritmética son 2.7 y 5.2. Obtenga el primer término.

12. Dada una sucesión aritmética con $a_3 = 7$ y $a_{20} = 43$, encuentre a_{15}.

En los Ejercicios 13 a 16 encuentre la suma S_n para la sucesión aritmética que satisface las condiciones dadas.

13. $a_1 = 40,\ d = -3,\ n = 30$

14. $a_1 = 5,\ d = 0.1,\ n = 40$

15. $a_1 = -9,\ a_{10} = 15,\ n = 10$

16. $a_7 = \frac{7}{3},\ d = -\frac{2}{3},\ n = 15$

Determine las sumas en los Ejercicios 17 a 20.

17. $\sum_{k=1}^{20} (3k - 5)$

18. $\sum_{k=1}^{12} (7 - 4k)$

19. $\sum_{k=1}^{18} \left(\frac{1}{2}k + 7\right)$

20. $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{4}k + 3\right)$

21. ¿Cuántos enteros entre 32 y 395 son divisibles entre 6? Encuentre la suma de ellos.

22. ¿Cuántos enteros negativos mayores que -500 son divisibles entre 33? Encuentre la suma de ellos.

23. ¿Cuántos términos hay en una sucesión aritmética con primer término -2, diferencia común $\frac{1}{4}$ y suma 21?

24. ¿Cuántos términos hay en una sucesión aritmética con sexto término -3, diferencia común 0.2 y suma -33?

25. Inserte cinco medias aritméticas entre 2 y 10.

26. Inserte tres medias aritméticas entre 3 y -5.

27. Una pila de troncos tiene 24 de ellos en la primera capa, 23 en la segunda, 22 en la tercera y así sucesivamente. La última capa contiene 10 maderos. Encuentre el número total de troncos de la pila.

28. En una sección de un estadio atlético hay 30 asientos en la primera fila, 32 asientos en la segunda, 34 en la tercera y así sucesivamente, hasta la décima, después de la cual hay 10 filas más, cada una con 50 asientos. Encuentre el número total de asientos en la sección.

29. Un hombre desea construir una escalera con nueve peldaños que disminuyen uniformemente desde 24 pulgadas en la base hasta 18 pulgadas en la parte superior. Determine la longitud de los siete peldaños intermedios.

30. Un joven que va cuesta abajo en su bicicleta recorre 4 pie en el primer segundo y en cada uno de los segundos siguientes recorre 5 pie más que en el segundo anterior. Si llega hasta abajo en 11 segundos, calcule la distancia total que recorre.

31. En un concurso habrá cinco premios que en total suman \$5000, y una diferencia de \$100 entre los premios sucesivos. Encuentre el primer término.

32. Una compañía debe distribuir \$46 000 en bonos entre sus diez mejores vendedores. La décima persona de la lista recibirá \$1 000 y la diferencia en dinero entre los bonos de los vendedores clasificados sucesivamente debe ser constante. Determine el bono de cada vendedor.

33. Algunos polígonos de n lados tienen la propiedad de que las medidas de los ángulos interiores se pueden disponer en una sucesión aritmética. Si en un polígono de este tipo, el ángulo más pequeño es de 20°, y el más grande, de 160°, calcule el número de lados del polígono. (*Sugerencia:* Obtenga una expresión para la suma de los ángulos interiores si el polígono tiene n lados.)

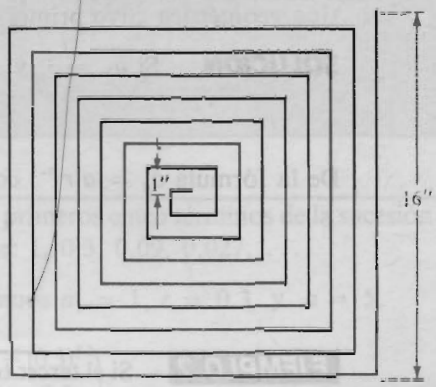
34. Si f es una función lineal, muestre que la sucesión cuyo n-ésimo término $a_n = f(n)$ es una sucesión aritmética.

35. La sucesión definida recursivamente por $x_{k+1} = x_k/(1 + x_k)$ aparece en genética en el estudio de la eliminación de un gene deficiente de una po-

blación. Demuestre que es aritmética la sucesión cuyo n-ésimo término es $1/x_n$.

36. Calcule la longitud total de la línea laberíntica de la figura, si el ancho del laberinto formado por la línea es de 16 pulg y los corredores del mismo tienen un ancho de 1 pulg. ¿Cuál sería la longitud si el ancho del laberinto fuera de 32 pulg?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 36



10.4 Sucesiones geométricas

A continuación se define otro tipo importante de sucesiones infinitas.

DEFINICIÓN

Una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ es una **sucesión geométrica** si y sólo si existe un número real $r \neq 0$ tal que

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$$

para todo entero positivo k.

A las sucesiones geométricas también se las denomina **progresiones geométricas**. Al número r de la definición se le llama **razón común** asociada a la sucesión geométrica. Entonces $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ es geométrica (con razón común r) si y sólo si

$$a_{k+1} = a_k r$$

para todo entero positivo k. Como en las sucesiones aritméticas, esto da un método recursivo para obtener términos. Si empezamos con cualquier número real a_1 diferente de cero y *multiplicamos* por el número r sucesivamente, obtenemos

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \ldots$$

El n-ésimo término a_n de esta sucesión está dado por la siguiente fórmula:

n-ésimo TÉRMINO DE UNA SUCESIÓN GEOMÉTRICA

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

EJEMPLO 1 Hallar los cinco primeros términos y el décimo término de la sucesión geométrica cuyo primer término es 3 y en la que la razón común es $-\frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN Si $a_1 = 3$ y $r = -\frac{1}{2}$, entonces los cinco primeros términos son

$$3, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{4}, -\tfrac{3}{8}, \tfrac{3}{16}.$$

De la fórmula $a_n = a_1 r^{n-1}$ con $n = 10$, obtenemos

$$a_{10} = 3(-\tfrac{1}{2})^9 = -\tfrac{3}{512}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Si el tercer término de una sucesión geométrica es 5 y el sexto término es -40, hallar el octavo término.

SOLUCIÓN Tenemos $a_3 = 5$ y $a_6 = -40$. Si sustituimos $n = 3$ y $n = 6$ en la fórmula $a_n = a_1 r^{n-1}$ llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5 = a_1 r^2 \\ -40 = a_1 r^5. \end{cases}$$

Como $r \neq 0$, la primera ecuación es equivalente a $a_1 = 5/r^2$. La sustitución de a_1 en la segunda ecuación da

$$-40 = \left(\frac{5}{r^2}\right) \cdot r^5 = 5r^3.$$

Por lo tanto, $r^3 = -8$ y $r = -2$. Si ahora sustituimos r por -2 en la ecuación $5 = a_1 r^2$, obtenemos $a_1 = \frac{5}{4}$. Finalmente, si $a_n = a_1 r^{n-1}$ con $n = 8$, tenemos que

$$a_8 = (\tfrac{5}{4})(-2)^7 = -160. \quad \blacksquare$$

Encontremos ahora una fórmula para S_n, la n-ésima suma parcial de una sucesión geométrica. Si el primer término es a_1 y la razón común es r, entonces

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}.$$

Si $r = 1$, esto da $S_n = n a_1$. Ahora supóngase que $r \neq 1$. Si multiplicamos por r ambos lados de la fórmula general de S_n, obtenemos

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n.$$

Si ahora se resta ésta de la ecuación de S_n, muchos de los términos del lado derecho se cancelan y queda

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n \quad \text{o bien} \quad (1 - r)S_n = a_1(1 - r^n).$$

Como $r \neq 1$, tenemos que $1 - r \neq 0$ y entonces podemos dividir ambos lados entre $1 - r$ para llegar a

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Hemos demostrado así el teorema siguiente.

TEOREMA La n-ésima suma parcial de una sucesión geométrica, cuyo primer término es a_1 y su razón común es $r \neq 1$, es

$$S_n = a_1 \frac{(1 - r^n)}{1 - r}.$$

EJEMPLO 3 Determinar la suma de los primeros cinco términos de la sucesión geométrica que empieza de la manera siguiente: 1, 0.3, 0.09, 0.027, ...

SOLUCIÓN Si en la fórmula de S_n hacemos $a_1 = 1$, $r = 0.3$ y $n = 5$,

$$S_5 = 1\left(\frac{1 - (0.3)^5}{1 - 0.3}\right).$$

Lo cual se reduce a $S_5 = 1.4251$. ■

EJEMPLO 4 Un hombre desea ahorrar dinero y guarda 1 centavo el primer día, 2 centavos el segundo día, 4 centavos el tercer día y así sucesivamente, duplicando la cantidad cada día. Si continúa así, ¿cuánto deberá guardar el decimoquinto día? Suponiendo que no se le acaba el dinero, ¿cuál es el total ahorrado a los 30 días?

SOLUCIÓN La cantidad (en centavos) guardada en días consecutivos constituye una sucesión geométrica

$$1, 2, 4, 8, \ldots$$

con primer término 1 y razón 2. La cantidad requerida en el decimoquinto día se encuentra mediante $a_n = a_1 r^{n-1}$ con $a_1 = 1$ y $n = 15$. Esto nos da $1 \cdot 2^{14}$, o sea \$163.84. Para determinar el total ahorrado al final de 30 días, utilizamos la fórmula para S_n con $n = 30$. Entonces

$$S_{30} = 1\frac{(1 - 2^{30})}{1 - 2},$$

que se simplifica a \$10 737 418.23. ■

Dada una serie geométrica con primer término a_1 y razón común $r \neq 1$, podemos expresar la fórmula para S_n que se dio en el teorema anterior en la forma

$$S_n = \frac{a_1}{1 - r} - \frac{a_1}{1 - r} r^n.$$

Aunque no lo haremos, puede demostrarse que si $|r| < 1$, entonces r^n *se acerca al número* 0 *cuando* n *crece*; esto es, podemos hacer r^n tan cercano a 0 como queramos, tomando n suficientemente grande. Se concluye que S_n se acerca a $a_1/(1 - r)$ cuando n crece indefinidamente. Si usamos la notación utilizada en el estudio de las funciones racionales en el Capítulo 4, esto se puede expresar simbólicamente como

$$S_n \to \frac{a_1}{1 - r} \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Al número $a_1/(1 - r)$ se le llama *suma de una serie geométrica infinita*

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1} + \cdots$$

Esto da el resultado siguiente.

TEOREMA

Si $|r| < 1$, la serie geométrica infinita

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1} + \cdots$$

tiene la suma $\dfrac{a_1}{1 - r}$.

Intuitivamente, el teorema anterior implica que si se suman más y más términos de la serie geométrica infinita indicada, las sumas se acercan más y más a $a_1/(1 - r)$. El siguiente ejemplo ilustra la forma de usar el teorema para demostrar que todo número real que se representa con un decimal que se repite, es racional.

EJEMPLO 5 Obtener el número racional que corresponde al número decimal repetitivo en forma infinita $5.4\overline{27}$, en donde la barra significa que el grupo de dígitos bajo ella se repite indefinidamente.

SOLUCIÓN A partir de la expresión decimal 5.4272727 . . . obtenemos la serie infinita

$$5.4 + 0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \cdots$$

La parte de la expresión que aparece después del primer término es

$$0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \cdots,$$

que tiene la forma dada en el último teorema, con $a_1 = 0.027$ y $r = 0.01$. Entonces la suma de esta serie geométrica infinita es

$$\frac{0.027}{1 - 0.01} = \frac{0.027}{0.99} = \frac{27}{990} = \frac{3}{110}.$$

Por lo tanto, el número deseado es $5.4 + \frac{3}{110}$, o sea $\frac{597}{110}$. Si se verifica mediante una división no abreviada, se demuestra que $\frac{597}{110}$ es igual al número repetitivo dado. ■

En general, dada cualquier sucesión infinita $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, a una expresión de la forma

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

se la llama **serie infinita**, o simplemente **serie**. En notación de sumatoria, esta serie se denota con

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

en donde la variable de sumatoria es k. A cada número a_k se le llama **término** de la serie y a a_n se le llama ***n*-ésimo término**. Como sólo las sumas finitas pueden sumarse algebraicamente, es necesario *definir* lo que significa suma infinita. Una forma natural de hacerlo es usar la sucesión de sumas parciales

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

Si existe un número S tal que $S_n \to S$ cuando $n \to \infty$, entonces, como en el estudio de series geométricas infinitas, llamamos a S la **suma** de la serie y escribimos

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Entonces en el Ejemplo 5 podemos escribir

$$\tfrac{597}{110} = 5.4 + 0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \cdots$$

El siguiente ejemplo ilustra una serie infinita no geométrica. Como un tratamiento completo está fuera del alcance de este texto, la solución se da de manera intuitiva.

EJEMPLO 6 Demostrar que la serie infinita

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

tiene suma.

SOLUCIÓN El n-ésimo término $a_n = 1/n(n+1)$ se puede descomponer en las fracciones parciales

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

En consecuencia, la n-ésima suma parcial de la serie se puede expresar como

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Como $1/(n+1) \to 0$ cuando $n \to \infty$, se concluye que $S_n \to 1$ y podemos escribir

$$1 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

Esto significa que a medida que sumamos más y más términos de la serie, la suma se acerca más y más a 1. ■

Si los términos de una sucesión infinita son positivos y negativos alternadamente y consideramos la expresión

$$a_1 + (-a_2) + a_3 + (-a_4) + \cdots + [(-1)^{n+1} a_n] + \cdots$$

donde todas las a_k son números positivos reales, entonces esta expresión se conoce como **serie infinita alternante**, y la expresamos como

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots$$

Ejemplos de series infinitas alternantes pueden obtenerse mediante series geométricas con razón común negativa.

Las series infinitas tienen muchas aplicaciones en matemáticas y en las ciencias naturales. El lector puede acudir a textos de cálculo para un estudio riguroso de este importante concepto.

Ejercicios 10.4

En cada uno de los Ejercicios 1 a 12 encuentre el quinto término, el octavo término y el n-ésimo término de la sucesión geométrica dada.

1. $8, 4, 2, 1, \ldots$

2. $4, 1.2, 0.36, 0.108, \ldots$

3. $300, -30, 3, -0.3, \ldots$

4. $1, -\sqrt{3}, 3, -\sqrt{27}, \ldots$

5. $5, 25, 125, 625, \ldots$

6. $2, 6, 18, 54, \ldots$

7. $4, -6, 9, -13.5, \ldots$

8. $162, -54, 18, -6, \ldots$

9. $1, -x^2, x^4, -x^6, \ldots$

10. $1, -\frac{x}{3}, \frac{x^2}{9}, -\frac{x^3}{27}, \ldots$

11. $2, 2^{x+1}, 2^{2x+1}, 2^{3x+1}, \ldots$

12. $10, 10^{2x-1}, 10^{4x-3}, 10^{6x-5}, \ldots$

13. Halle el sexto término de la sucesión geométrica cuyos dos primeros términos son 4 y 6.

14. Obtenga el séptimo término de la sucesión cuyos segundo y tercer términos son 2 y $-\sqrt{2}$, respectivamente.

15. En una sucesión geométrica $a_5 = 1/16$ y $r = 3/2$. Encuentre a_1 y S_5.

16. Dada una sucesión geométrica en la que $a_4 = 4$ y $a_7 = 12$, encuentre r y a_{10}.

Encuentre la suma en cada uno de los Ejercicios 17 a 20.

17. $\sum_{k=1}^{10} 3^k$

18. $\sum_{k=1}^{9} (-\sqrt{5})^k$

19. $\sum_{k=0}^{9} (-\frac{1}{2})^{k+1}$

20. $\sum_{k=1}^{7} (3^{-k})$

21. Una bomba de vacío extrae la mitad del aire de un recipiente en cada carrera. ¿Qué porcentaje del aire original queda en el recipiente después de 10 carreras?

22. La depreciación anual de una máquina es 25% de su valor al principio del año. Si el costo original de la máquina es \$20 000 (dólares), determine su valor al cabo de 6 años.

23. Un cultivo de bacterias se incrementa 20% cada hora. Si el cultivo original tenía 10 000 bacterias, obtenga una fórmula para determinar el número de bacterias que hay después de t horas. ¿Cuántos microorganismos habrá en el cultivo al cabo de 10 horas?

24. Si se deposita una cantidad P de dinero en una cuenta de ahorros que paga interés a una tasa de r por ciento anual capitalizable trimestralmente, y si el capital y el interés acumulado se deja en la cuenta, encuentre una fórmula para el monto total después de n años.

Determine las sumas de las series geométricas infinitas de los Ejercicios 25 a 30 siempre y cuando existan.

25. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$

26. $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots$

27. $1.5 + 0.015 + 0.00015 + \cdots$

28. $1 - 0.1 + 0.01 - 0.001 + \cdots$

29. $\sqrt{2} - 2 + \sqrt{8} - 4 + \cdots$

30. $250 - 100 + 40 - 16 + \cdots$

En los Ejercicios 31 a 38 encuentre el número racional representado por el número decimal repetitivo dado.

31. $0.\overline{23}$

32. $0.0\overline{71}$

33. $2.4\overline{17}$

34. $10.\overline{55}$

35. $5.1\overline{46}$

36. $3.2\overline{394}$

37. $1.\overline{6124}$

38. $123.6\overline{183}$

39. Se deja caer una pelota de goma desde una altura de 10 m. Si rebota aproximadamente la mitad de la distancia en cada caída, use una serie geométrica infinita para calcular aproximadamente la distancia total que recorre la pelota antes de detenerse.

40. El disco de un péndulo se balancea en un arco de 24 cm de largo en su primera oscilación. Si cada balanceo sucesivo es de aproximadamente cinco sextos de la longitud del anterior, use una serie geométrica para determinar la distancia total aproximada que recorre antes de detenerse.

41. En una pequeña ciudad se ha establecido recientemente una sucursal de una compañía manufacturera de ropa que pagará dos millones de dólares anuales en salarios. Se ha estimado que 60% de estos salarios se gastarán en el área local y de este dinero, otro 60% cambiará de manos dentro de la ciudad. Este proceso se repetirá *ad infinitum*. Al citado proceso se le conoce como el *efecto multiplicador*. Calcule el total de las erogaciones que serán generadas por los salarios de la compañía.

42. En un programa de erradicación de plagas, se sueltan cada día N moscas machos esterilizadas, en la población general, y 90% de ellas sobrevivirá un día dado.

(a) Muestre que el número de moscas esterilizadas en la población n días después del inicio del programa es

$$N + (0.9)N + (0.9)^2 N + \cdots + (0.9)^{n-1} N.$$

(b) Si el objetivo a *largo plazo* del programa es mantener en la población, 20 000 insectos machos esterilizados, ¿cuántas moscas deben soltarse cada día?

43. La semivida (o "vida media") en el torrente sanguíneo de cierto fármaco es de alrededor de 2 horas. Cada 4 horas se administrarán dosis de D mg, en donde D debe calcularse.

(a) Muestre que el número de miligramos del medicamento en el torrente sanguíneo, después de que se ha administrado la n-ésima dosis es

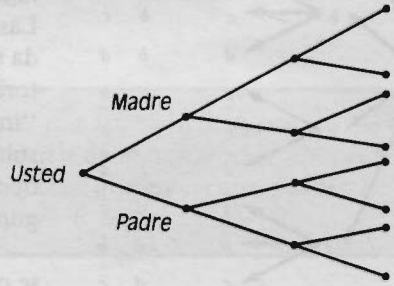
$$D + \tfrac{1}{4}D + \cdots + (\tfrac{1}{4})^{n-1} D$$

y que esta suma es aproximadamente $\frac{4}{3} D$ para valores grandes de n.

(b) Si se considera peligroso que haya más de 500 mg del fármaco en el torrente sanguíneo, encuentre la mayor dosis que se puede administrar repetidamente en un periodo largo.

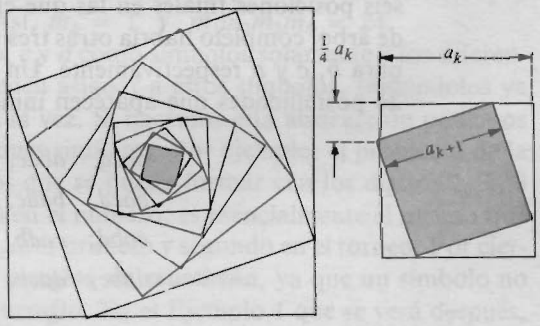
44. En la figura se indica un árbol genealógico que muestra tres generaciones anteriores y un total de 12 antecesores. Si usted tuviera que trazar su historia familiar hasta 10 generaciones atrás, ¿cuántos ancestros encontraría?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 44



45. En el primer croquis de la figura se muestra una sucesión anidada de cuadrados $S_1, S_2, \ldots, S_k$,

FIGURA PARA EL EJERCICIO 45



.... Sean a_k, A_k y P_k el lado, el área y el perímetro, respectivamente, del cuadrado S_k. El cuadrado S_{k+1} se construye a partir del S_k, seleccionando cuatro puntos en S_k que estén a una distancia de $\frac{1}{4}$ a_k de los vértices y uniéndolos luego (véase la segunda figura).

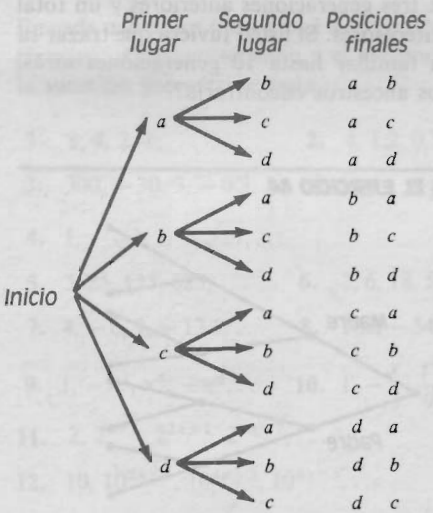
(a) Determine la relación entre a_{k+1} y a_k.

(b) Calcule a_n, A_n y P_n.

(c) Calcule $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$.

10.5 Permutaciones

FIGURA 10.1



Supongamos que en un torneo se van a determinar los lugares primero, segundo, tercero y cuarto entre los cuatro equipos participantes. Para propósitos de identificación, llamemos a los equipos *a*, *b*, *c* y *d*. Determinemos el número de formas diferentes en que se pueden decidir el primero y segundo lugares. Conviene usar un **diagrama de árbol** como el de la Figura 10.1. Si empezamos con la palabra "inicio", se listan las cuatro posibilidades para el primer lugar. A partir de cada una de ellas, una flecha señala un posible segundo lugar. En este problema la posición del segundo lugar está ocupada por un equipo diferente del que tiene la posición del primer lugar y por tanto se dibujan *tres* flechas desde cada posición. Las posiciones finales listan los resultados posibles, de izquierda a derecha. Estos se encuentran siguiendo todas las trayectorias diferentes (*ramas* del árbol) que van de la palabra "inicio" al equipo en segundo lugar. El número total de resultados es 12 y notamos que es el producto del número de opciones (4) para primer lugar y el de opciones (3) para segundo lugar (una vez que se ha determinado el primero).

Determinemos ahora el número total de formas en que se pueden ocupar las posiciones de primero, segundo, tercero y cuarto lugares. Para construir un diagrama de árbol podemos empezar dibujando flechas de la palabra "inicio" a cada uno de los posibles ocupantes del segundo lugar, como se hace en la Figura 10.1. A continuación, de cada posición de segundo lugar las flechas indican los posibles terceros lugares. Finalmente trazamos flechas hacia el equipo en cuarto lugar. Si consideramos sólo el caso en que el equipo *a* termina en primer lugar, tenemos el diagrama de la Figura 10.2. Note que existen seis posiciones finales en las que el equipo *a* ocupa el primer lugar. En un diagrama de árbol completo habría otras tres ramas de este tipo, correspondientes al primer lugar para *b*, *c* y *d* respectivamente. Un diagrama completo de posiciones finales daría las 24 posibilidades que aparecen inmediatamente a continuación de la Figura 10.2:

abcd, *abdc*, *acbd*, *acdb*, *adbc*, *adcb*,
bacd, *badc*, *bcad*, *bcda*, *bdac*, *bdca*,
cabd, *cadb*, *cbad*, *cbda*, *cdab*, *cdba*,
dabc, *dacb*, *dbac*, *dbca*, *dcab*, *dcba*.

Obsérvese que el número 24 es el producto del número de formas (4) en que puede ocu-

FIGURA 10.2



rrir el primer lugar, el número de posibilidades (3) para el segundo lugar (una vez que se ha decidido el primer lugar), el número de posibles resultados (2) para el tercer lugar (después de que se ha decidido el segundo lugar) y el número de formas (1) en que puede ocurrir el cuarto lugar (una vez que se han ocupado los tres primeros lugares).

Lo anterior ilustra la siguiente regla general, que aceptamos como un axioma básico de conteo.

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO

Sean $E_1, E_2, \ldots, E_k$ una sucesión de k eventos. Si para cada i, E_i puede ocurrir de m_i maneras, entonces el número total de maneras en que los eventos pueden ocurrir es el producto $m_1 m_2 \cdots m_k$.

En relación con la primera ilustración, si E_1 representa la determinación del equipo ganador del primer lugar, entonces $m_1 = 4$. Si E_2 indica la determinación del equipo en segundo lugar, $m_2 = 3$. Por lo tanto, el número de resultados para la sucesión E_1, E_2 es $4 \cdot 3 = 12$, que es igual al valor que encontramos por medio del diagrama de árbol. Si procedemos a E_3, la determinación del equipo en tercer lugar, entonces $m_3 = 2$ y entonces $m_1 m_2 m_3 = 24$. Finalmente, si ya han ocurrido E_1, E_2 y E_3, sólo hay una posibilidad para E_4. Así, $m_4 = 1$ y $m_1 m_2 m_3 m_4 = 24$.

En vez de equipos consideremos a, b, c y d como símbolos solamente y los diferentes *ordenamientos* o *arreglos* que se pueden asignar a estos símbolos, tomándolos ya sea dos a la vez, tres a la vez o cuatro a la vez. Si hacemos esta abstracción podemos aplicar nuestros métodos a otras situaciones similares. Por ejemplo, el problema de la determinación del número de dos dígitos que se puede formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4, de modo que ningún dígito se repita en el número, es esencialmente el mismo que el de nuestra ilustración de enlistar los lugares primero y segundo en el torneo. Por cierto, a los arreglos anteriores se les llama **arreglos sin repetición**, ya que un símbolo no puede ser utilizado dos veces en el miso arreglo. En el Ejemplo 1 que se verá después, consideramos arreglos en los que *sí* se permiten las repeticiones.

Anteriormente definimos pares (o díadas) ordenados y ternas (o tríadas) ordenadas. Similarmente, una **tétrada ordenada** es un conjunto de cuatro elementos x_1, x_2, x_3, x_4, en los que se ha especificado un ordenamiento tal que uno de los elementos puede considerarse como *primer elemento*, otro de ellos como *segundo elemento* y así sucesivamente. Se utiliza el símbolo (x_1, x_2, x_3, x_4) para la tétrada (cuarteta) ordenada que tiene el primer elemento x_1, segundo elemento x_2, tercer elemento x_3 y cuarto elemento x_4. En general, para cualquier entero positivo r, hablamos de la ***r*-ada ordenada**

$$(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$

para referirnos a un conjunto de elementos tales que a x_1 se le denomina primer elemento, a x_2 segundo elemento, y así sucesivamente hasta el r-ésimo.

EJEMPLO 1 ¿Cuántas tríadas ordenadas pueden obtenerse usando las letras a, b, c y d? ¿Cuántas tétradas ordenadas se pueden obtener? ¿Cuántas r-adas?

SOLUCIÓN Para dar respuesta a la primera pregunta debemos determinar el número de símbolos de la forma (x_1, x_2, x_3) que se pueden obtener usando sólo las letras a, b, c y d. Esto no es igual a enlistar primero, segundo y tercer lugar como en nuestra ilustración anterior, ya que no hemos descartado la posibilidad de tener repeticiones. Por ejemplo, (a, b, a), (a, a, b) y (b, a, a) son ternas diferentes del tipo deseado. Si hacemos que E_i represente la determinación de x_i en la terna (x_1, x_2, x_3), para $i = 1, 2, 3$, entonces, como se permiten repeticiones, hay cuatro posibilidades para cada uno de E_1, E_2 y E_3. Por lo tanto, por el Principio Fundamental del Conteo, el número total de tríadas ordenadas es $4 \cdot 4 \cdot 4$, o sea 64. Similarmente, el número de tétradas posibles (x_1, x_2, x_3, x_4) es $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$. Evidentemente, el número de r-adas es el producto $4 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 4$, en donde el 4 aparece r veces como factor. Este producto es 4^n. ■

EJEMPLO 2 En un salón de clases hay 60 alumnas y 40 alumnos. ¿De cuántas maneras pueden escogerse presidente, vicepresidente, tesorero y secretario si el tesorero debe ser mujer, el secretario debe ser varón y ningún estudiante puede ocupar más de un puesto?

SOLUCIÓN Si un evento está especializado de alguna manera (por ejemplo, el tesorero *debe* ser una alumna), entonces tal evento debe llevarse a cabo antes que cualquiera de los eventos no especializados. Si E_1 representa la selección de tesorero, E_2 la de secretario, y E_3 y E_4 la selección de presidente y vicepresidente respectivamente; como en el Principio Fundamental del Conteo, m_i denota el número de formas diferentes en que puede ocurrir E_i, para $i = 1, 2, 3$ y 4. Se ve entonces que $m_1 = 60$, $m_2 = 40$, $m_3 = 98$ y $m_4 = 97$. De acuerdo con el principio del conteo, el número total de posibilidades es

$$60 \cdot 40 \cdot 98 \cdot 97 = 22\,814\,400.$$ ■

Cuando hablamos de conjuntos, generalmente no nos preocupa el orden o arreglo de los elementos. Sin embargo, en el resto de esta sección, la principal preocupación

será el orden de los elementos. En la siguiente definición, S denota un conjunto de n elementos y r es un entero positivo tal que $r \leq n$.

DEFINICIÓN

> Una **permutación** de r elementos de un conjunto S, es un arreglo, sin repetición, de r elementos de S.

Usaremos el símbolo ${}_nP_r$ para denotar el número de permutaciones diferentes de r elementos que se pueden obtener a partir de un conjunto que contiene n elementos. También es común referirse a una permutación de r elementos de un conjunto de n elementos como **permutación de n elementos tomando r a la vez**. Como caso especial, ${}_nP_n$ denota el número de arreglos de los n elementos de S, esto es, ${}_nP_n$ es el número de maneras en que se pueden ordenar *todos* los elementos de S.

En nuestra primera ilustración, con los cuatro equipos a, b, c, d, teníamos ${}_4P_2 = 12$, ya que hay 12 formas diferentes de arreglas los cuatro equipos en grupos de dos. También se demostró que el número de formas en que se pueden arreglar todos los elementos a, b, c, d es 24. Con la notación presente, esto se escribiría ${}_4P_4 = 24$.

No es difícil encontrar una fórmula general para ${}_nP_r$. Si S denota un conjunto de n elementos, entonces el problema de determinar ${}_nP_r$ es equivalente a la determinación del número de r-adas diferentes $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, donde cada x_i es un elemento de S, y ningún elemento de S aparece dos veces en la misma r-ada. Encontraremos este número por medio del Principio Fundamental del Conteo. Para cada $i = 1, 2, \ldots, r$, E_i representa la determinación del elemento x_i y m_i es el número de formas diferentes de realizar E_i. Deseamos aplicar la sucesión $E_1, E_2, \ldots, E_r$. Hay n selecciones posibles para x_1 y consecuentemente tenemos que $m_1 = n$. Como no se permiten repeticiones, hay $n - 1$ posibilidades para x_2, de modo que $m_2 = n - 1$. Al continuar de esta manera, obtenemos sucesivamente $m_3 = n - 2$, $m_4 = n - 3$, y por último $m_r = n - (r - 1)$, o sea $m_r = n - r + 1$. Por lo tanto, por el Principio Fundamental del Conteo tenemos

$$ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) $$

en donde hay r factores en el lado derecho de la ecuación. Para mayor ilustración, si consideramos los casos especiales $r = 1$, 2, 3 y 4, entonces $n - r + 1$ es igual a n, $n - 1$, $n - 2$ y $n - 3$, respectivamente, y si usamos la fórmula para ${}_nP_r$ obtenemos

$$ {}_nP_1 = n $$
$$ {}_nP_2 = n(n-1) $$
$$ {}_nP_3 = n(n-1)(n-2) $$
$$ {}_nP_4 = n(n-1)(n-2)(n-3). $$

EJEMPLO 3 Determinar (a) ${}_5P_2$; (b) ${}_6P_4$; (c) ${}_5P_5$.

SOLUCIÓN Al usar la fórmula para ${}_nP_r$,

(a) ${}_5P_2 = 5 \cdot 4 = 20$

(b) ${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

(c) ${}_5P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$ ■

EJEMPLO 4 Un equipo de béisbol tiene nueve jugadores. Hallar el número de formas de asignar las cuatro primeras posiciones en el orden de bateo, si se excluye al lanzador.

SOLUCIÓN Se desea determinar el número de permutaciones de 8 objetos tomando 4 cada vez. La fórmula de ${}_nP_r$ con $n = 8$ y $r = 4$ nos da

$${}_8P_4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$$ ■

Si $r = n$ obtenemos el número de diferentes arreglos de *todos* los elementos de S. En este caso, $n - r + 1 = n - n + 1 = 1$ y entonces

$${}_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

En consecuencia, ${}_nP_n$ es el producto de los n primeros enteros positivos. También podemos obtener una expresión para ${}_nP_r$ con notación de factoriales. Si r y n son enteros positivos con $r \leq n$, entonces

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\cdot[(n-r)!]}{(n-r)!}$$

$$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

La comparación con la fórmula para ${}_nP_r$ da

$$\boxed{{}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}.}$$

Ejercicios 10.5

Resuelva los Ejercicios 1 a 14 mediante diagramas de árbol o el Principio Fundamental del Conteo.

1. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 si (a) no se permiten repeticiones, (b) se permiten repeticiones?
2. Repita el Ejercicio 1 para números de cuatro cifras.
3. ¿Cuántos números se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4 si no se permiten repeticiones? (*Nota:* 42 y 231 son ejemplos de tales números).
4. Repita el Ejercicio 3 si se permiten repeticiones.
5. Si en un torneo de baloncesto toman parte ocho equipos; determine el número de formas diferentes en que se pueden decidir los lugares primero, segundo y tercero, si los empates no son posibles.
6. Repita el Ejercicio 5 para doce equipos.
7. Una joven tiene cuatro faldas y seis blusas. ¿Cuántas combinaciones diferentes de falda y blusa puede vestir?
8. Si la joven del Ejercicio 7 también tiene tres sué-

teres, ¿en cuántas formas diferentes puede combinar las tres prendas de vestir?

9. Las placas de automóvil en un cierto lugar empiezan con una letra del alfabeto seguida por cinco números, usando los dígitos 0, 1, 2, ..., 9. Determine cuántas placas diferentes es posible tener si:
   (a) el primer dígito que sigue a la letra no puede ser 0;
   (b) la letra no puede ser *O* o *I*, y el primer dígito no puede ser 0.

10. Se tiran dos dados, uno después de otro. ¿De cuántas formas diferentes pueden caer? Enuncie el número de formas diferentes en que la suma de los puntos puede ser igual a: (a) tres, (b) cinco, (c) siete, (d) nueve, (e) once.

11. Se va a llenar una fila de seis asientos de un salón de clase, mediante la selección de personas de un grupo de diez estudiantes. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ocuparse los asientos? Si hay seis varones y cuatro mujeres en el grupo y se deben alternar los varones y las mujeres, determine el número de arreglos diferentes al sentarse.

12. Un estudiante puede tomar matemáticas a las 8, 10, 11 o 12 horas; literatura a las 9, 1 o 2 e historia a las 8, 11, 2 o 3. Determine el número de formas diferentes en que el estudiante puede arreglar su horario con los tres cursos.

13. De cuántas formas distintas puede contestarse un examen con diez preguntas que deben responderse verdadero o falso?

14. Un examen consta de seis preguntas de opción múltiple y el número de opciones por pregunta es cinco. ¿De cuántas maneras diferentes puede responderse la prueba?

En los Ejercicios 15 a 22 determine el número que se pide.

15. ${}_7P_3$ 16. ${}_8P_5$ 17. ${}_9P_6$

18. ${}_5P_3$ 19. ${}_5P_5$ 20. ${}_4P_4$

21. ${}_6P_1$ 22. ${}_5P_1$

Use permutaciones para resolver los Ejercicios 23 a 30.

23. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse ocho personas en una fila?

24. ¿De cuántas maneras diferentes pueden colocarse diez libros en un anaquel?

25. Un señalero tiene seis banderas. ¿Cuántas señales diferentes puede formar colocando tres banderas, una sobre otra en el asta?

26. ¿De cuántas formas distintas pueden seleccionarse cinco libros de un estante con doce libros diferentes?

27. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 2, 4, 6, 8 y 9 si (a) no se permiten repeticiones, (b) se permiten repeticiones?

28. Existen 24 letras en el alfabeto griego. ¿De cuántas formas se pueden escoger tres letras si: (a) no se permiten repeticiones, (b) se permiten repeticiones?

29. ¿Cuántos números de teléfono de siete dígitos se pueden formar con los números 0, 1, 2, 3, ..., 9 si el primer dígito no debe ser 0?

30. El manejador de un equipo de béisbol selecciona nueve jugadores y arregla el orden de bateo de modo que el lanzador es el último en el turno y el mejor bateador tiene el cuarto turno. ¿De cuántas maneras diferentes puede arreglarse el resto del orden de bateo?

10.6 Permutaciones distinguibles y combinaciones

En ciertos problemas se tienen que encontrar diferentes arreglos de objetos, algunos de los cuales son indistinguibles. Por ejemplo, supongamos que nos dan cinco discos del mismo tamaño y que tres son negros, uno es blanco y uno es rojo. Encontremos el número de maneras en que pueden colocarse en fila de modo que se obtengan diferentes arreglos de colores. Si los discos fueran todos diferentes, el número de arreglos

sería 5! o sea 120. Sin embargo, como algunos de los discos tienen la misma apariencia, no podemos obtener 120 arreglos diferentes. Para clarificar esto expresemos con

N N N B R

los arreglos con discos negros en las tres primeras posiciones de la fila, el blanco en la cuarta posición y el disco rojo en la quinta posición. Los tres primeros discos se pueden ordenar en 3! o sea 6 formas diferentes, pero esos arreglos no se pueden distinguir uno de otro porque los tres primeros discos se ven iguales. Decimos entonces que esas 3! permutaciones son **indistinguibles**. Del mismo modo, dado cualquier otro arreglo, digamos

N R N B N

hay 3! formas diferentes de ordenar los tres discos negros, pero nuevamente cada uno de esos arreglos es indistinguible de los otros. Llamaremos a dos arreglos de los cinco objetos **permutaciones distinguibles** si no se puede obtener un arreglo a partir de otro mediante una reordenación de los objetos iguales. Entonces N N N B R y N R N B N son permutaciones distinguibles. Sea n el número de permutaciones distinguibles. Como a cada uno de tales arreglos corresponden 3! permutaciones indistinguibles, debemos tener $3!n = 5!$, el número de permutaciones de cinco objetos *diferentes*. Por lo tanto $n = 5!/3! = 5 \cdot 4 = 20$. Por el mismo tipo de razonamiento podemos obtener la siguiente extensión del problema anterior:

TEOREMA

Si en un conjunto de n objetos r de ellos son iguales, y si el resto de los objetos son diferentes entre sí y también de los r objetos, entonces el número de permutaciones distinguibles de los n objetos es $n!/r!$.

Este teorema puede generalizarse al caso en que hay varios subconjuntos de objetos indistinguibles. Por ejemplo, si tenemos ocho discos, cuatro de ellos negros, tres blancos y uno rojo. En este caso, con cada arreglo como

N B N B N B N R,

hay 4! arreglos de los discos negros y 3! arreglos de los discos blancos que no afectan el arreglo de colores. Por lo tanto, hay 4!3! arreglos de discos posibles que no producen permutaciones distinguibles. Si n denota el número de permutaciones *distinguibles* de los objetos, entonces se concluye que $4!3!n = 8!$, ya que 8! es el número de permutaciones que obtendríamos si los objetos fueran todos diferentes. Esto nos da

$$n = \frac{8!}{4!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot \frac{4!}{4!} = 280.$$

Se puede demostrar el siguiente resultado general.

TEOREMA DE PERMUTACIONES DISTINGUIBLES

Si se tiene un conjunto de n objetos y n_1 de ellos son de un tipo, n_2 de otro tipo, ..., n_k de un tipo más, y

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k.$$

Entonces el número de permutaciones distinguibles de los n objetos es

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}.$$

EJEMPLO 1 Hallar el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra "MISSISSIPPI".

SOLUCIÓN En este ejemplo se da un conjunto de once objetos de los cuales cuatro son de un tipo (la letra S), cuatro de otro tipo (I), dos de un tercer tipo (P) y uno de un cuarto tipo (M). Por lo tanto, por el teorema anterior, el número de permutaciones distinguibles es

$$\frac{11!}{4!4!2!1!}$$

El lector debe demostrar que esto es igual a 34 650. ■

Cuando trabajamos con permutaciones, nuestra preocupación es con el ordenamiento o arreglo de los elementos. Ignoremos ahora el orden o arreglo de los elementos y considérese la siguiente pregunta: Dado un conjunto de n elementos distintos, ¿de cuántas maneras se puede escoger un subconjunto de r elementos, donde $r \leq n$? Antes de responder, enunciamos una definición.

DEFINICIÓN

Una **combinación** de r elementos de un conjunto S es un subconjunto de S que tiene r elementos distintos.

Usaremos el símbolo ${}_nC_r$ para denotar el número de combinaciones de r elementos que se pueden obtener de un conjunto de n elementos. La frase **una combinación de n elementos tomando r a la vez** se usa comúnmente para describir ${}_nC_r$.

Si S contiene n elementos, entonces para evaluar ${}_nC_r$ debemos encontrar el número total de subconjuntos de la forma

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$$

en donde las x_i son elementos diferentes de S. Como los elementos del subconjunto anterior se pueden arreglar en $r!$ formas diferentes, cada uno de los subconjuntos produce $r!$ r-adas diferentes. Por lo tanto, el número total de r-adas diferentes de $r!({}_nC_r)$. Sin embargo, en la sección anterior encontramos que el número de r-adas es

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Esto implica que

$$r!({}_nC_r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

y por lo tanto

$$\boxed{{}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}.}$$

Nótese que ${}_nC_r$ *es idéntica al coeficiente binomial* $\binom{n}{r}$ definido en la Sección 1.5.

EJEMPLO 2 En la lista de jugadores de un equipo de béisbol hay seis jardineros, siete jugadores de cuadro, cinco lanzadores y dos receptores. ¿De cuántas formas diferentes se puede escoger un equipo de nueve jugadores?

SOLUCIÓN El número de formas de seleccionar tres jardineros de los seis candidatos es

$${}_6C_3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)(3\cdot 2\cdot 1)} = 20.$$

El número de formas de seleccionar los cuatro jugadores de cuadro es

$${}_7C_4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{(7\cdot 6\cdot 5)4!}{4!3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35.$$

Hay cinco formas de escoger un lanzador y dos selecciones para receptor. Del Principio Fundamental del Conteo se concluye que el número total de formas de hacer un equipo es

$$20\cdot 35\cdot 5\cdot 2 = 7000.$$ ∎

Vale la pena notar que si $r = n$, el lado derecho de la fórmula de ${}_nC_r$ será

$${}_nC_n = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{n!}{0!n!} = 1.$$

Además, ${}_nC_n$ es el número de subconjuntos que contienen n elementos que se pueden obtener de un conjunto de n elementos. Esto es también igual a 1. Por lo tanto, la fórmula para ${}_nC_r$ es verdadera para $r = n$.

Es conveniente dar un sentido a ${}_nC_r$, cuando $r = 0$. Si la forma es verdadera en este caso, entonces

$${}_nC_0 = \frac{n!}{n!0!} = 1.$$

Por lo tanto, *definimos* ${}_nC_0 = 1$, que es igual a ${}_nC_n$. Finalmente, por consistencia, también *definimos* ${}_0C_0 = 1$. Entonces ${}_nC_r$ tiene sentido para todos los enteros no negativos n y r, con $r \leq n$.

EJEMPLO 3 Si un conjunto S contiene n elementos, hallar el número de subconjuntos diferentes de S.

SOLUCIÓN Sea r cualquier entero no negativo tal que $r \leq n$. De lo anterior sabemos que el número de subconjuntos de S que contienen r elementos es ${}_nC_r$, o sea, $\binom{n}{r}$. Por lo tanto, para encontrar el número total de subconjuntos hacemos la suma

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Esto es precisamente el desarrollo binomial de $(1 + 1)^n$. Entonces, existen 2^n subconjuntos de un conjunto de n elementos. En particular, un conjunto de 3 elementos tiene 2^3 o sea 8 subconjuntos diferentes. Un conjunto de 4 elementos tiene 2^4 o sea 16 subconjuntos. Un conjunto de 10 elementos tiene 2^{10}, o sea 1 024 subconjuntos. ■

Ejercicios 10.6

En los Ejercicios 1 a 8 encuentre el número que se pide.

1. ${}_7C_3$
2. ${}_8C_4$
3. ${}_9C_8$
4. ${}_6C_2$
5. ${}_nC_{n-1}$
6. ${}_nC_1$
7. ${}_7C_0$
8. ${}_5C_5$

9. Si se arreglan en fila cinco discos negros, tres rojos, dos blancos y dos verdes, encuentre el número de arreglos de discos de color posibles.

10. Resuelva el Ejercicio 9 si hay tres discos negros, tres rojos, tres blancos y tres verdes.

11. Realice la determinación del número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra "BOOKKEEPER".

12. Encuentre el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra "MOON". Liste todas las permutaciones.

13. Diez muchachos desean jugar un partido de baloncesto. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden hacer dos equipos de cinco jugadores cada uno?

14. A un estudiante se le da la opción de responder a sólo seis de las diez preguntas de un examen. ¿De cuántas maneras puede hacer una selección? ¿Cuántas posibilidades hay si debe contestar las dos primeras preguntas?

15. ¿Cuántas líneas rectas están determinadas por ocho puntos, si no hay tres de ellos que sean colineales? ¿Cuántos triángulos quedan determinados?

16. Un comité de cinco personas va a ser constituido en un grupo de doce hombres y ocho mujeres. Si el comité debe incluir tres hombres y dos mujeres, determine el número de maneras de seleccionar el comité.

17. Un estudiante tiene cinco libros de matemáticas, cuatro de historia y ocho de literatura. ¿De cuántas maneras puede arreglarlos en un estante si los de la misma materia deben estar juntos?

18. La lista de jugadores de un equipo de basquetbol contiene doce personas. Sin considerar posiciones, ¿de cuántas maneras puede escogerse un equipo de cinco? Si el centro del equipo sólo puede ser ocupado por dos jugadores específicos de la lista y los otros cuatro miembros del equipo pueden ser cualesquiera de los diez jugadores restantes, encuentre el número posible de equipos diferentes.

19. La lista de jugadores de un equipo de fútbol americano incluye tres centros, diez hombres de línea que pueden jugar como *guards* o *tackles*, tres *quarterbacks*, seis *half-backs*, cuatro extremos o alas y cuatro *fullbacks*. ¿De cuántas maneras pue-

de escogerse un equipo que incluya un centro, dos guardias, dos apoyadores, dos alas, dos medios, un mariscal de campo y un corredor?

20. ¿De cuántas formas diferentes pueden disponerse siete llaves en un llavero, si las llaves pueden deslizarse completamente alrededor del llavero?

10.7 Probabilidad

Si se tiran dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que salga 7? Si una persona recibe cinco cartas de una baraja de tipo francés de 52 naipes, ¿cuán factible es que reciba tres ases? Preguntas como éstas, acerca de juegos de azar, llevaron, en el siglo XVII, al estudio de lo que actualmente se conoce como *probabilidad*. A partir de esa época, la teoría de la probabilidad ha crecido y se ha ampliado mucho. Actualmente se usa para predecir lo que pasará en una gran variedad de situaciones que se presentan en las ciencias naturales y sociales.

Cualquier proceso de azar, como tirar al aire una moneda, tirar un dado, repartir cartas de una baraja, determinar si un objeto manufacturado está defectuoso o no, o determinar la presión sanguínea de una persona, se llamará un **experimento**. Al resultado de un experimento se le llama **resultado**. La presente discusión se centrará en los experimentos cuyos resultados son **igualmente** probables. Esto significa, por ejemplo, que cuando se lanza una moneda, se supone que la posibilidad de que salga cara es la misma que la de que salga cruz. De la misma manera, si se tira un dado se supone que el mismo es regular o *no cargado*, en el sentido de que se tiene la misma posibilidad de que salga un 1, 2, 3, 4, 5 o 6. El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento se conoce como el **espacio muestra** del experimento. Así, si el experimento consiste en lanzar una moneda y si H o T representan el resultado de obtener una cara (o anverso) o una cruz (o reverso), respectivamente, entonces el espacio muestra S se puede representar mediante

$$S = \{H, T\}.$$

Si se tira un dado regular, entonces el conjunto S de todos los posibles resultados (el espacio muestra) es

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

La siguiente definición expresa, en términos matemáticos, la noción de obtener resultados *particulares* de un experimento:

DEFINICIÓN

Sea S el espacio muestra de un experimento. Cualquier subconjunto E de S se conoce como un **evento** asociado al experimento.

Considérese el experimento de tirar un dado, de modo que el espacio muestra es $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si $E = \{4\}$, entonces el evento E asociado al experimento con-

siste en que resulte un 4 de la tirada. Al mismo experimento se le pueden asociar diferentes eventos. Por ejemplo, si se toma $E = \{1, 3, 5\}$, entonces este evento consiste en la obtención de un número impar en una tirada del dado.

A manera de otra ilustración, supóngase el experimento que consiste en lanzar dos monedas, una después de la otra. Si representamos por HH el resultado de dos caras, HT una cara en la primera moneda y una cruz en la segunda, y así sucesivamente, el espacio muestra S del experimento puede representarse por

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

Si se toma $E = \{HT, TH\}$

entonces el evento E consiste en una cara en una de las monedas y una cruz en la otra.

En seguida definiremos lo que quiere decir la *probabilidad* de un evento. En toda la discusión se supone que el espacio muestra S de un experimento contiene únicamente un número finito de elementos. Si e es un evento, los símbolos $n(E)$ y $n(S)$ denotarán al número de elementos en E y en S, respectivamente.

DEFINICIÓN

Sea S el espacio muestra de un experimento y E un evento. La **probabilidad** de E está dada por

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}.$$

Puesto que E es un subconjunto de S, se sigue que $0 \leq n(E) \leq n(S)$ y por lo tanto

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

Nótese que $P(E) = 1$ si $E = S$, mientras que $P(E) = 0$ si E no contiene elementos.

El siguiente ejemplo muestra varias aplicaciones de la definición anterior para el caso en el que E contiene exactamente un elemento.

EJEMPLO 1

(a) Si se lanza una moneda (se tira un volado), encontrar la probabilidad de que caiga cara.

(b) Si se tira un dado regular, encontrar la probabilidad de obtener un 4.

(c) Si se lanzan dos monedas, obtener la probabilidad de que salgan dos caras.

SOLUCIÓN Para cada experimento se indicarán los conjuntos S y E, y después se usará la definición para encontrar $P(E)$:

(a) $S = \{H, T\}$, $E = \{H\}$, $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{2}$

(b) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad E = \{4\}, \quad P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{6}$

(c) $S = \{HH, HT, TH, TT\}, \quad E = \{HH\}, \quad P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{4}$ ■

En la parte (a) del Ejemplo 1 se encontró que es $\frac{1}{2}$ la probabilidad de que caiga cara en el volado o tirada de una moneda. Esto significa que si se vuela una moneda muchas veces, el número de caras que aparecerán será aproximadamente la mitad del número total de volados. Así, para 100 tiradas debería caer cara aproximadamente 50 veces. Por supuesto, no es improbable que este número sea *exactamente* 50. Una probabilidad de $\frac{1}{2}$ implica que si se aumenta el número de tiradas, entonces el número de caras se *acercará a* $\frac{1}{2}$ del número total de volados. Los mismos comentarios se pueden hacer acerca de las partes (b) y (c) del Ejemplo 1.

En los dos ejemplos que siguen se consideran experimentos en los cuales un evento contiene más de un elemento.

EJEMPLO 2 Si se tiran dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que la tirada sume (a) 7, (b) 9?

SOLUCIÓN

(a) Podemos referirnos a un dado como "el primer dado", y al otro, como "el segundo dado". Se utilizarán parejas ordenadas para representar los resultados como sigue: (2, 4) denota el resultado en el que se obtiene 2 en el primer dado y 4 en el segundo; (5, 3) representa un 5 con el primer dado y un 3 con el segundo, y así sucesivamente. Puesto que hay seis diferentes posibilidades para el primer número de la pareja ordenada, y con cada una de éstas, seis posibilidades para el segundo número, el número total de parejas ordenadas es 36. Por lo tanto, si S es el espacio muestra, entonces $n(S) = 36$. El evento E correspondiente a que caiga una suma de 7 está dado por

$$E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

y en consecuencia

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

(b) Si E es el evento correspondiente a caer una suma de 9 entonces

$$E = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$$

y

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$ ■

En el siguiente ejemplo (y en los ejercicios), cuando se exprese que se sacan varias cartas de una baraja, querrá decir que cada naipe se saca del mazo y que *no* se repone o regresa antes de sacar la siguiente carta.

EJEMPLO 3 Suponga que se sacan cinco cartas de una baraja estándar de 52 cartas. Encuentre la probabilidad de que las cinco sean corazones.

SOLUCIÓN El espacio muestra S del experimento es el conjunto de todas las manos de cinco cartas que pueden formarse a partir de los 52 naipes de una baraja francesa. De la Sección 10.6 se sigue que $n(S) = {}_{52}C_5$.

Puesto que hay 13 cartas del palo de corazones, el número de maneras diferentes de obtener una mano que contenga cinco cartas de corazones es ${}_{13}C_5$. Por lo tanto, si E representa este evento, entonces

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{{}_{13}C_5}{{}_{52}C_5}$$

$$= \frac{13!}{5!8!} \div \frac{52!}{5!47!} = \frac{13!47!}{8!52!}.$$

Se deja al lector verificar que

$$P(E) = \frac{1287}{2{,}598{,}960} \approx 0.0005$$

o bien

$$P(E) \approx \frac{5}{10{,}000} \approx \frac{1}{2000}.$$

Esto implica que si el experimento se lleva a cabo muchas veces, entonces se obtendrá una mano de cinco naipes de corazones aproximadamente una de cada 2000 veces. ■

Supóngase que S es el espacio muestra de un experimento, y que E_1 y E_2 son dos eventos asociados al experimento. Considérese además que E_1 y E_2 no tienen elementos en común, es decir, que E_1 y E_2 son conjuntos *ajenos* o *disjuntos*. Si $E = E_1 \cup E_2$, entonces

$$n(E) = n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2)$$

y por lo tanto,

$$P(E) = \frac{n(E_1) + n(E_2)}{n(S)} = \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)},$$

es decir,

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2).$$

Entonces, la probabilidad de E es la suma de las probabilidades E_1 y E_2.

El siguiente teorema establece que este resultado se puede extender a cualquier número de eventos $E_1, E_2, \ldots, E_k$ que sean ***mutuamente excluyentes***, en el sentido de que si $i \neq j$, entonces E_i y E_j no tienen elementos en común.

TEOREMA

Sean $E_1, E_2, \ldots, E_k$ eventos mutuamente excluyentes asociados con el mismo experimento. Si

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k,$$

entonces $P(E) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_k)$.

El teorema se puede demostrar por inducción matemática.

EJEMPLO 4 Si se tiran dos dados, hallar la probabilidad de que una tirada sume 7 o 9.

SOLUCIÓN Sea E_1 el evento de tirar un 7, y E_2 el evento de tirar 9. Se desea encontrar la probabilidad del evento $E = E_1 \cup E_2$. Del Ejemplo 3, $P(E_1) = \frac{1}{6}$ y $P(E_2) = \frac{1}{9}$. Por lo tanto, por el teorema anterior,

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{3+2}{18} = \frac{5}{18}.$$

■

Los resultados de esta sección dan solamente una introducción a la teoría de la probabilidad. Existen muchos otros tipos de problemas que pueden ser considerados. Por ejemplo, dados dos eventos E_1 y E_2 no se ha discutido cómo encontrar $P(E_1 \cup E_2)$ si E_1 y E_2 tienen elementos en común, o cómo encontrar $P(E_2)$ *después de que* haya ocurrido E_1. Tales problemas se dejan para un estudio independiente o para cursos futuros.

Ejercicios 10.7

1. Se saca una sola carta de una baraja francesa de 52 naipes. Encuentre la probabilidad de que la carta sea (a) un rey, (b) un rey o una reina, (c) un rey, una reina o una sota (*jack*).
2. Se saca una carta de una baraja de 52 naipes. Encuentre la probabilidad de que la carta sea (a) una de corazones, (b) una de corazones o una de diamantes, (c) una de corazones, una de diamantes o una de tréboles.
3. Si se tira un solo dado, halle la probabilidad de obtener (a) un 4, (b) un 6, (c) un 4 o un 6.
4. Una urna contiene cinco bolas rojas, seis verdes y cuatro blancas. Si se saca solamente una bola, halle la probabilidad de que sea (a) roja, (b) verde, (c) roja o verde.
5. Si se tiran dos dados, determine la probabilidad de que el tiro sume (a) 11, (b) 8, (c) 11 u 8.
6. Si se tiran dos dados, determine la probabilidad de que la suma de los puntos sea mayor que 5.
7. Si se tiran tres dados, calcule la probabilidad de que la suma de los puntos sea 5.
8. Si se tiran tres dados, calcule la probabilidad de que salga un 6 exactamente en un dado.
9. Si se vuelan tres monedas, encuentre la probabilidad de que salgan exactamente dos caras.
10. Si se vuelan cuatro monedas, encuentre la probabilidad de obtener dos caras y dos cruces.

En los Ejercicios 11 a 16 supóngase que se sacan cinco cartas de una baraja de 52 naipes. Encuentre la probabilidad de obtener las cartas que se indican.

11. Cuatro de un mismo tipo (como cuatro ases o cuatro reyes).
12. Tres ases y dos reyes.
13. Cuatro de diamantes y una de espadas.
14. Cinco cartas de casa (rey, reina o sota).
15. Una "flor" (cinco cartas del mismo palo).
16. Una "flor imperial" (as, rey, reina, sota y el diez del mismo palo).
17. Una prueba en la que se debe responder verdadero o falso contiene ocho preguntas. Si un estudiante adivina la respuesta de cada pregunta, encuentre la probabilidad de que:
    (a) 8 respuestas sean correctas,
    (b) 7 respuestas sean correctas y 1 incorrecta,
    (c) 6 respuestas sean correctas y 2 incorrectas,
    (d) al menos 6 respuestas sean correctas.
18. Se elegirá un comité de seis miembros sacando de un sombrero papeletas con los nombres de las personas. Si el sombrero contiene los nombres

de ocho varones y catorce mujeres, encuentre la probabilidad de que el comité consista de tres varones y tres mujeres.

19. (a) Si S es el espacio muestra de un experimento y E es un evento, denótese por E' los elementos de S que no están en E. Demuestre que $P(E') = 1 - P(E)$.
    (b) Si se sacan cinco cartas de una baraja de 52 naipes, utilice (a) para hallar la probabilidad de obtener por lo menos un as.

20. Si se sacan cinco cartas de una baraja de 52 naipes, use la parte (a) del Ejercicio 19 para encontrar la probabilidad de obtener al menos una de corazones.

21. En el juego de dados llamado *craps*, el tirador echa dos dados y gana en la primera tirada si obtiene una suma de 7 o de 11. El tirador pierde automáticamente si el primer tiro resulta en una suma de 2, 3 o 12. Encuentre la probabilidad de (a) ganar en la primera tirada; (b) perder en el primer tiro.

22. Una máquina tragamonedas contiene tres carretes y cada uno de ellos tiene 20 símbolos. Si el primer carrete tiene cinco campanas, el de enmedio, cuatro campanas, y el último, dos campanas, encuentre la probabilidad de obtener tres campanas en fila.

23. Suponiendo que los nacimientos de niño o niña son equiprobables, encuentre la probabilidad de que una familia con cinco niños tenga (a) solamente niños, (b) al menos una niña. (Véase el Ejercicio 19(b).)

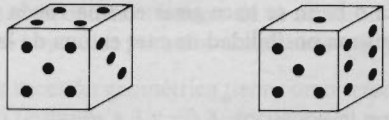
24. Se colocan tres cartas dentro de un sombrero. Una carta es roja por ambos lados, la segunda es negra en ambos lados y la última es roja en un lado y negra en el otro. Se saca una carta del sombrero y se coloca sobre una mesa. Si la carta muestra el lado rojo, ¿cuál es la probabilidad de que el otro lado sea también rojo?

25. En un experimento sencillo diseñado para una prueba de percepción extrasensorial (PES), se barajan cuatro cartas (sota, reina, rey y as) y se colocan boca abajo sobre una mesa. El sujeto intenta identificar cada una de las cuatro cartas, dando un nombre diferente a cada carta. Si el individuo está adivinando, encuentre la probabilidad de identificar correctamente (a) las cuatro cartas, (b) exactamente dos de las cuatro cartas.

26. Si se tiran tres dados, ¿cuál es la probabilidad de que
    (a) todos los dados muestren el mismo número?
    (b) los números en los dados sean todos diferentes?
    (c) Responda (a) y (b) para el caso de n dados.

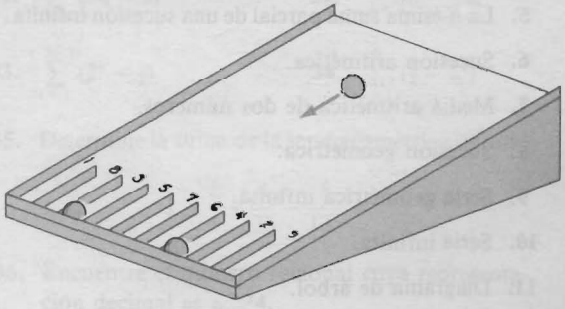
27. Cuando se mira un dado en un cierto ángulo, sólo tres de sus seis caras son visibles. Este hecho se ha utilizado para construir los dados de truco conocidos como "topes y fondos". En la figura se muestran dos de esos dados. En cada par de caras opuestas hay el mismo número de puntos. Encuentre la probabilidad de (a) tirar una suma de 7, (b) tirar una suma de 8.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 27



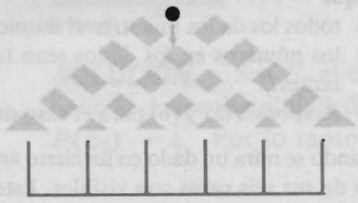
28. En un juego común de feria se hacen rodar tres bolas por un plano inclinado hacia casillas o ranuras numeradas del 1 al 9 (véase la figura 7). Los jugadores no tienen control sobre dónde caerán las bolas debido a que las ranuras son muy estrechas. Si la suma de los números resultantes es menor que 7, se obtiene el mayor premio. Encuentre la probabilidad de este evento.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 28



29. En la figura se indica una pequeña versión de un aparato de demostración de la probabilidad. Se deja caer una bolilla desde la parte superior del laberinto y se tambalea hacia el fondo. Cada vez que la bola pega a un obstáculo, hay un 50% de probabilidad de que la misma se mueva a la iz-

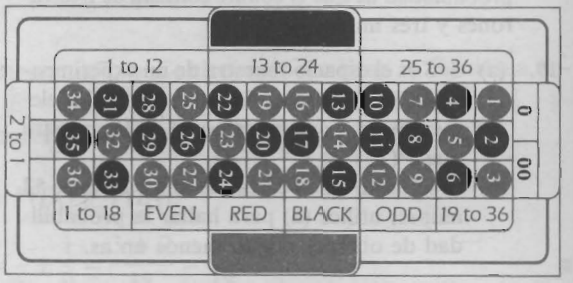
FIGURA PARA EL EJERCICIO 29



quierda. Encuentre la probabilidad de que la bola termine en la casilla (a) del extremo izquierdo, (b) en la del centro.

30. En la versión norteamericana de la ruleta, la bola o balín se hace girar en una rueda y tiene la misma posibilidad de caer en una de las 38 casillas numeradas 0, 00, 1, 2, . . . , 36. En la figura se muestra la disposición para las apuestas en la ruleta. Encuentre la probabilidad de que la bola quede (a) en una casilla negra, (b) dos veces sucesivamente en una casilla negra.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 30



10.8 Repaso

Defina o explique cada uno de los conceptos siguientes:

1. Axioma de la Inducción Matemática.
2. Principio de la Inducción Matemática.
3. Sucesión infinita.
4. Notación de sumatoria.
5. La n-ésima suma parcial de una sucesión infinita.
6. Sucesión aritmética.
7. Media aritmética de dos números.
8. Sucesión geométrica.
9. Serie geométrica infinita.
10. Serie infinita.
11. Diagrama de árbol.
12. Principio Fundamental del Conteo.
13. r-ada ordenada.
14. Permutación.
15. ${}_nP_r$.
16. Permutaciones indistinguibles.
17. Permutaciones distinguibles.
18. Combinación.
19. ${}_nC_r$.
20. Espacio muestra.
21. Evento.
22. Probabilidad de un evento.

Ejercicios 10.8

Demuestre que los enunciados de los Ejercicios 1 a 5 son verdaderos para todo entero positivo n.

1. $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1) = \dfrac{n(3n + 1)}{2}$

2. $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = \dfrac{2n(2n+1)(n+1)}{3}$

3. $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

4. $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

5. 3 es un factor de $n^3 + 2n$.

6. Demuestre que $2^n > n^2$ para todo entero positivo $n \geq 5$.

En los Ejercicios 7 a 10 encuentre los cuatro primeros términos y el séptimo término de la sucesión cuyo n-ésimo término se da.

7. $a_n = \dfrac{5n}{3 - 2n^2}$ **8.** $a_n = (-1)^{n+1} - (0.1)^n$

9. $a_n = 1 + (-\frac{1}{2})^{n-1}$

10. $a_n = \dfrac{2^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

Encuentre los cinco primeros términos de la sucesión infinita que se define en los Ejercicios 11 a 14 en forma recursiva.

11. $a_1 = 10,\ a_{k+1} = 1 + (1/a_k)$

12. $a_1 = 2,\ a_{k+1} = a_k!$

13. $a_1 = 9,\ a_{k+1} = \sqrt{a_k}$

14. $a_1 = 1,\ a_{k+1} = (1 + a_k)^{-1}$

Halle los números representados por las sumas en los Ejercicios 15 a 18.

15. $\sum_{k=1}^{5} (k^2 + 4)$ **16.** $\sum_{k=2}^{6} \dfrac{2k-8}{k-1}$

17. $\sum_{k=1}^{100} 10$ **18.** $\sum_{k=1}^{4} (2^k - 10)$

En los Ejercicios 19 a 22 use notación de sumatoria para representar las sumas.

19. $3 + 6 + 9 + 12 + 15$

20. $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$

21. $100 - 95 + 90 - 85 + 80$

22. $a_0 + a_4x^4 + a_8x^8 + \cdots + a_{100}x^{100}$

23. Halle el décimo término y la suma de los diez primeros términos de la sucesión aritmética cuyos dos primeros términos son $4 + \sqrt{3}$ y 3.

24. Encuentre la suma de los ocho primeros términos de una sucesión aritmética en la que el cuarto término es 9 y la diferencia común es -5.

25. Los términos quinto y el decimotercero de una sucesión aritmética son 5 y 77, respectivamente. Encuentre el primer término y el décimo término.

26. Inserte cuatro medias aritméticas entre 20 y -10.

27. Obtenga el décimo término de la sucesión geométrica cuyos dos primeros términos son $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{4}$.

28. Si una sucesión geométrica tiene como tercero y cuarto términos a 3 y -0.3, encuentre el octavo término.

29. Encuentre un número positivo c tal que 4, c, 8 son términos sucesivos de una sucesión geométrica.

30. En una sucesión geométrica el octavo término es 100 y la razón común es $-\frac{3}{2}$. Halle el primer término.

Calcule las sumas de los Ejercicios 31 a 34.

31. $\sum_{k=1}^{15} (5k - 2)$ **32.** $\sum_{k=1}^{10} (6 - \frac{1}{2}k)$

33. $\sum_{k=1}^{10} (2^k - \frac{1}{2})$ **34.** $\sum_{k=1}^{8} (\frac{1}{2} - 2^k)$

35. Determine la suma de la serie geométrica infinita

$$1 - \frac{2}{5} + \frac{4}{25} - \frac{8}{125} + \cdots$$

36. Encuentre el número racional cuya representación decimal es $0.\overline{774}$.

37. Unos maderos de 2 × 2 pulgadas de diez pies de longitud, se deben cortar en cinco trozos para hacer bloques de construcción para niños. Las longitudes de los cinco bloques deben formar una sucesión aritmética.

(a) Demuestre que la diferencia d de las longitudes debe ser menor que 1 pie.

(b) Si el bloque más pequeño debe tener 6 pulg de longitud, encuentre las longitudes de las otras cuatro piezas.

38. Cuando se deja caer una pelota desde una altura de h pies le toma $\sqrt{h}/4$ segundos llegar hasta el suelo. Después la pelota tarda $\sqrt{d}/4$ segundos en rebotar a una altura de d pies. Si se deja caer una pelota de goma desde una altura de 10 pie y rebota a tres cuartos de la altura después de cada caída, ¿cuántos segundos pasarán hasta que la pelota se detenga?

39. Cada uno de dos niños tira al aire una moneda. Encuentre la probabilidad de que caiga lo mismo en ambas monedas. Si cada uno de tres niños vuela una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que en todas las monedas salga lo mismo?

40. Si se toman cuatro cartas de una baraja de 52 naipes, halle la probabilidad de que (a) las cuatro cartas sean del mismo color; (b) las cartas se alternen en el orden rojo-negro-rojo-negro?

41. ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse trece cartas de una baraja de 52? ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse trece cartas si se desea obtener cinco de espadas, tres de corazones, tres de tréboles y dos de diamantes?

42. ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 si (a) no se permiten repeticiones?; (b) se permiten repeticiones?

43. Si un estudiante debe responder ocho de doce preguntas en un examen, ¿de cuántas maneras puede hacer su selección? ¿Cuántas selecciones son posibles si debe responder las tres primeras preguntas?

44. Si se ordenan en fila seis discos negros, cinco rojos, cuatro blancos y dos verdes, encuentre el número de arreglos de color posibles.

45. Si se venden 1000 boletos para una rifa, encuentre la probabilidad de ganar si un individuo compra (a) un boleto, (b) 10 boletos, (c) 50 boletos.

46. Si se lanzan al aire cuatro monedas, encuentre la probabilidad de obtener una cara y tres cruces.

47. Una prueba consta de seis preguntas que deben responderse falso o verdadero. Para pasar de grado se requieren al menos cuatro respuestas correctas. Si un estudiante adivina cada respuesta, ¿cuál es la probabilidad de que (a) sea aprobado, (b) sea reprobado?

48. Si se tira un solo dado y después se saca una carta de una baraja de 52 naipes, ¿cuál es la probabilidad de obtener

(a) un 6 en el dado y el rey de corazones?

(b) *uno u otro* de los siguientes dos resultados: un 6 en el dado o el rey de corazones?

CAPÍTULO 11

Temas de geometría analítica

La geometría plana incluye el estudio de figuras tales como rectas, círculos y triángulos que están en un plano. ■ Los teoremas son demostrados por medio de razonamientos deductivos a partir de ciertos postulados. ■ En la ***geometría analítica****, se estudian las figuras geométricas planas introduciendo un sistema coordenado y usando ecuaciones y fórmulas de varios tipos. ■ Si el estudio de la geometría analítica se pudiera resumir en una sola frase quizá la siguiente sería la apropiada: "Dada una ecuación, hallar su gráfica, y recíprocamente, dada una gráfica, hallar su ecuación". ■ En este capítulo aplicaremos métodos analíticos a varias figuras planas importantes.*

11.1 Rectas

Se presentarán en primer lugar algunos conceptos fundamentales en relación con las líneas rectas. Todas las rectas mencionadas se consideran en el plano coordenado.

DEFINICIÓN

Si l es una recta no paralela al eje y, y si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son puntos diferentes en l, entonces la **pendiente** (o **inclinación**) m de l está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Si l es paralela al eje y, entonces la pendiente no está definida.

Al numerador $y_2 - y_1$ en la fórmula para m, en ocasiones se le llama **desnivel** de P_1 a P_2. Mide el cambio vertical de dirección al avanzar de P_1 a P_2, y puede ser positivo, negativo o cero. El denominador $x_2 - x_1$ se llama **corrimiento** de P_1 a P_2. Mide el cambio de dirección horizontal al recorrer de P_1 a P_2. El corrimiento puede ser positivo o negativo, pero nunca cero, porque l no es paralela al eje y. Usando esta terminología,

$$\text{pendiente de } l = \frac{\text{desnivel de } P_1 \text{ a } P_2}{\text{corrimiento de } P_1 \text{ a } P_2}.$$

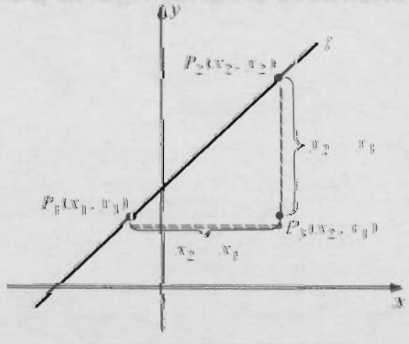
Cuando se determina la pendiente o inclinación de una recta l es irrelevante cual punto se denominará P_1, y cual, P_2, pues

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

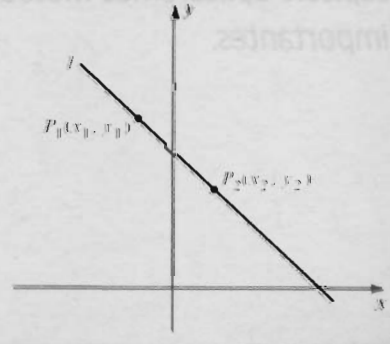
En consecuencia, puede suponerse que los puntos se denominan de modo que $x_1 < x_2$, como se ve en la Figura 11.1. En este caso, $x_2 - x_1 > 0$, y por consiguiente, la pen-

FIGURA 11.1

(i) Pendiente positiva



(ii) Pendiente negativa



diente es positiva, negativa o cero, dependiendo de si $y_2 > y_1$, $y_2 < y_1$ o bien $y_2 = y_1$. La pendiente de la recta mostrada en (i) de la Figura 11.1 es positiva, en tanto que es negativa la pendiente de la recta mostrada en (ii) de la citada figura.

Una **recta horizontal** es una recta paralela al eje x. Obsérvese que la recta es horizontal si y sólo si su inclinación vale 0. Una **recta vertical** es una recta paralela al eje y. La inclinación de una recta vertical es indefinida.

EJEMPLO 1 Trazar las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos y determinar sus pendientes.

(a) $A(-1, 4)$ y $B(3, 2)$ (b) $A(2, 5)$ y $B(-2, -1)$

(c) $A(4, 3)$ y $B(-2, 3)$ (d) $A(4, -1)$ y $B(4, 4)$

SOLUCIÓN Las rectas se presentan en la Figura 11.2. Usando la definición de pendiente tenemos

(a) $$m = \frac{2-4}{3-(-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

(b) $$m = \frac{5-(-1)}{2-(-2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

(c) $$m = \frac{3-3}{-2-4} = \frac{0}{-6} = 0$$

(d) La pendiente es indefinida porque la recta es vertical. Esto también se puede ver observando que si se usa la fórmula para m, el denominador es cero.

FIGURA 11.2

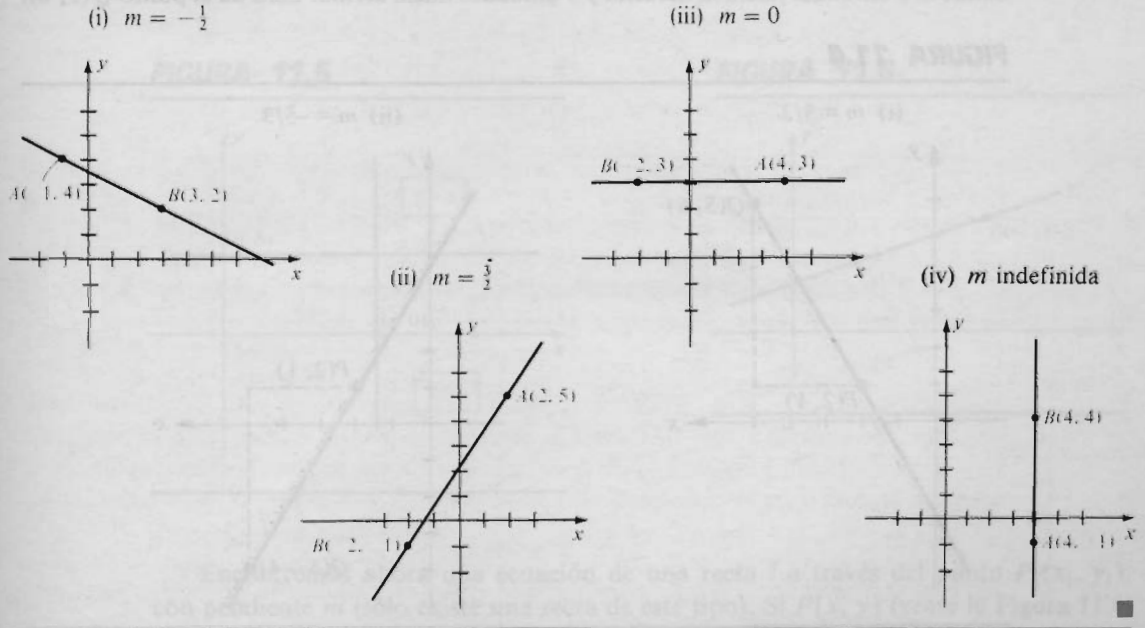
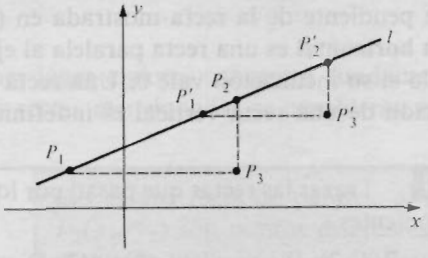


FIGURA 11.3



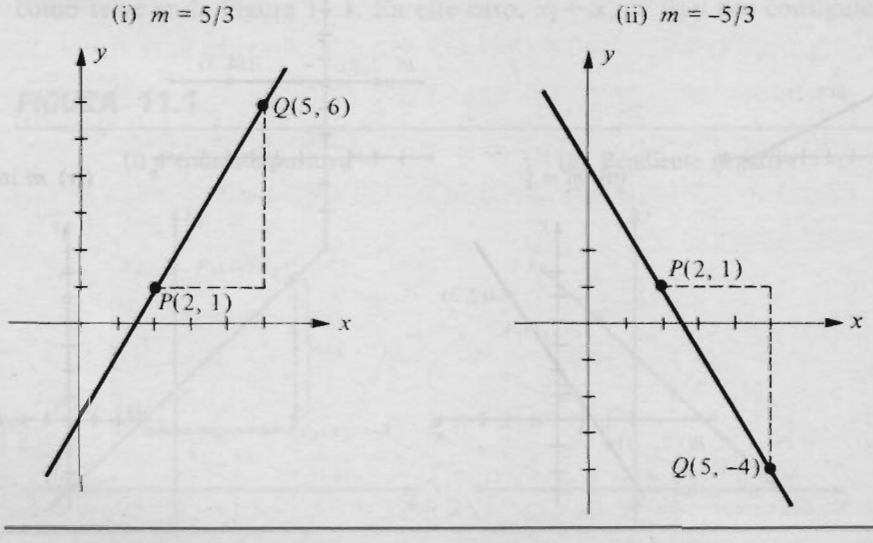
Es importante advertir que la definición de pendiente no depende de los dos puntos que se eligen en l, pues si se usan otros puntos $P_1'(x_1', y_1')$ y $P_2'(x_2', y_2')$, entonces, como se ve en la Figura 11.3, el triángulo con vértices P_1', P_2' y $P_3'(x_2', y_1')$ es semejante al triángulo cuyos vértices son P_1, P_2, $P_3(x_2, y_1)$. Como las razones de los lados correspondientes son iguales,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}.$$

EJEMPLO 2 Trazar una recta a traves de $P(2, 1)$ y cuya pendiente sea (a) $\frac{5}{3}$; (b) $-\frac{5}{3}$

SOLUCIÓN Si la pendiente de una recta es a/b, en donde b es positivo, para cualquier cambio de b unidades en la dirección horizontal, la recta sube o baja $|a|$ unidades, dependiendo de si a es positivo o negativo, respectivamente. Si $P(2, 1)$ está sobre la recta y $m = \frac{5}{3}$, podemos obtener otro punto en la recta partiendo de P y desplazándose 3 unidades hacia la derecha y 5 unidades hacia arriba. Esto da el punto $Q(5, 6)$,

FIGURA 11.4



y la recta está así determinada (véase (i) de la Figura 11.4). De manera similar, si $m = -\frac{5}{3}$, se desplaza 3 unidades hacia la derecha y 5 unidades hacia abajo, obteniendo entonces $Q = (5, -4)$, como se ve en (ii) de la misma Figura 11.4. ■

TEOREMA

(i) La gráfica de la ecuación $x = a$ es una recta vertical con intercepción x igual a a.

(ii) La gráfica de la ecuación $y = b$ es una recta horizontal con intercepción y igual a b.

DEMOSTRACIÓN La ecuación $x = a$, en donde a es un número real, puede ser considerada como una ecuación en dos variables x y y, ya que se puede escribir en la forma

$$x + (0)y = a.$$

Algunas soluciones típicas de la ecuación son $(a, -2)$, $(a, 1)$ y $(a, 3)$. Evidentemente, todas las ecuaciones consisten en pares de la forma (a, y), en donde y puede tener cualquier valor y a es fijo. Se deduce que la gráfica de $x = a$ es una recta paralela al eje y, con intercepción x (abscisa en el origen) igual a a, como se ilustra en la Figura 11.5. Esto demuestra (i). Se puede usar un razonamiento similar para demostrar que la gráfica de $y = b$ es una recta paralela al eje x, cuya intercepción y (ordenada en el origen) es igual a b, como se muestra en la Figura 11.5. ■

FIGURA 11.5

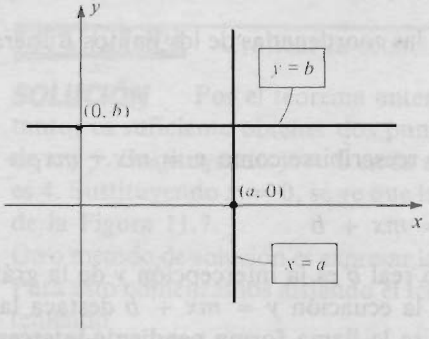
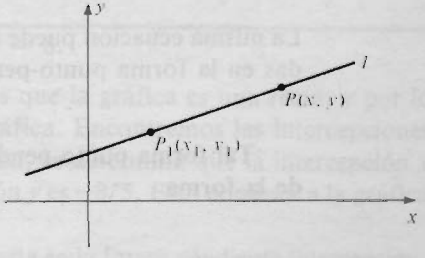


FIGURA 11.6



Encontremos ahora una ecuación de una recta l a través del punto $P_1(x_1, y_1)$, con pendiente m (sólo existe una recta de este tipo). Si $P(x, y)$ (véase la Figura 11.6)

es cualquier punto donde $x \neq x_1$, entonces P está sobre l si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P_2 es m; esto es, si y sólo si

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Esta ecuación puede ser escrita en la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Obsérvese que (x_1, y_1) es también una solución de la última ecuación; por consiguiente, los puntos sobre l son precisamente los puntos que corresponden a las soluciones. Esta ecuación para l se denomina la **forma punto-pendiente**. La discusión puede resumirse como sigue

FORMA PUNTO-PENDIENTE PARA LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Una ecuación para la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ con pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

EJEMPLO 3 Hallar una ecuación para la recta que pasa por los puntos $A(1, 7)$ y $B(-3, 2)$.

SOLUCIÓN La pendiente m de la recta es

$$m = \frac{7 - 2}{1 - (-3)} = \frac{5}{4}.$$

Usando las coordenadas de A en la forma punto-pendiente, obtenemos

$$y - 7 = \frac{5}{4}(x - 1)$$

lo cual es equivalente a

$$4y - 28 = 5x - 5 \quad \text{o bien} \quad 5x - 4y + 23 = 0.$$

La misma ecuación puede obtenerse si las coordenadas de los puntos B fueran sustituidas en la forma punto-pendiente. ■

Tal forma punto-pendiente puede reescribirse como $y = mx - mx_1 + y_1$, que es de la forma

$$y = mx + b$$

en donde $b = -mx_1 + y_1$. El número real b es la intercepción y de la gráfica, como se puede ver haciendo $x = 0$. Como la ecuación $y = mx + b$ destaca la pendiente m y la intercepción y, o sea, b, de l, se la llama **forma pendiente-intercepción** de la ecuación de una recta. Por lo contrario, si se parte de $y = mx + b$, podemos escribir

$$y - b = m(x - 0).$$

Comparando con la forma punto-pendiente es posible ver que la gráfica es una recta con pendiente m y pasa por el punto $(0, b)$. Esto da el siguiente resultado

FORMA PENDIENTE-INTERCEPCIÓN PARA LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

La gráfica de la ecuación $y = mx + b$ es una recta que tiene pendiente m e intercepción y igual a b.

El trabajo que hemos realizado demuestra que toda recta es la gráfica de una ecuación de la forma

$$ax + by + c = 0$$

en donde a, b y c son números reales, y a y b no son nulos ambos. A una ecuación de este tipo se la llama **ecuación lineal** en x y y. Demostremos, recíprocamente, que la gráfica de $ax + by + c = 0$, en donde a y b no son ambos cero, es siempre una recta. Por un lado, si $b \neq 0$, se despeja y obteniendo

$$y = (-a/b)x + (-c/b)$$

la cual, por la forma pendiente-intercepción, es la ecuación de una recta con pendiente $-a/b$ y con intercepción y igual a $-c/b$. Por otra parte, si $b = 0$ pero $a \neq 0$, entonces se despeja x, obteniendo $x = -c/a$, la cual es la ecuación de una recta vertical con intercepción x igual a $-c/a$. Esto establece el siguiente teorema importante.

TEOREMA

La gráfica de una ecuación lineal $ax + by + c = 0$ es una recta, y por lo contrario, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

Para simplificar, se usará con frecuencia la terminología *la recta* $ax + by + c = 0$, en vez de la frase más precisa *una recta con ecuación* $ax + by + c = 0$.

EJEMPLO 4 Graficar la ecuación $2x - 5y = 8$.

SOLUCIÓN Por el teorema anterior sabemos que la gráfica es una recta, y por lo tanto, es suficiente obtener dos puntos en la gráfica. Encontremos las intercepciones de x y y. Sustituyendo $y = 0$ en la ecuación dada, se determina que la intercepción x es 4. Sustituyendo $x = 0$, se ve que la intercepción y es $-8/5$. Esto conduce a la gráfica de la Figura 11.7.

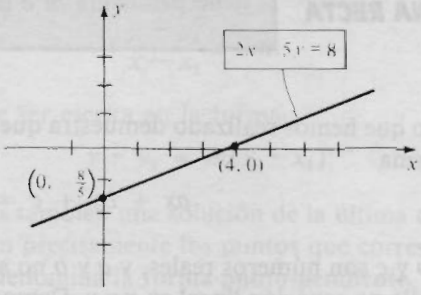
Otro método de solución es expresar la ecuación dada en la forma pendiente-intercepción. Para esto comenzamos aislando el término involucrado y a un lado del signo igual, obteniendo

$$5y = 2x - 8.$$

Luego, dividiendo ambos lados entre 5 obtenemos

$$y = \frac{2}{5}x + \left(\frac{-8}{5}\right)$$

FIGURA 11.7



que es de la forma $y = mx + b$. Así, la pendiente vale $m = \frac{2}{5}$ y la intercepción y es $b = -\frac{8}{5}$. Luego se puede trazar una recta a través del punto $(0, -\frac{8}{5})$ con pendiente $\frac{2}{5}$. ■

En la siguiente sección se demostrará que *dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente*. Usaremos este hecho en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Hallar la ecuación de una recta que pasa por los puntos $(5, -7)$, y que es paralela a la recta $6x + 3y - 4 = 0$.

SOLUCIÓN Expresemos la ecuación dada en la forma pendiente-intercepción. Se empieza escribiendo

$$3y = -6 + 4$$

y luego dividimos ambos miembros entre 3,

$$y = -2x + \frac{4}{3}.$$

La última ecuación está en la forma pendiente-intercepción con $m = -2$, y por lo tanto, la inclinación vale -2. Como las rectas paralelas tienen la misma pendiente, la recta requerida debe tener una inclinación de -2. Aplicando la forma punto-pendiente resulta

$$y + 7 = -2(x - 5)$$

o, de manera equivalente,

$$y + 7 = -2x + 10 \quad \text{o bien} \quad 2x + y - 3 = 0.$$ ■

Ejercicios 11.1

En cada uno de los Ejercicios 1 a 6, ubique los puntos A y B, y calcule la pendiente de la recta que pasa por A y B.

1. $A(-3, 8)$, $B(-2, 16)$.
2. $A(7, -1)$, $B(-4, 9)$.
3. $A(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $B(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.
4. $A(-5, -2)$, $B(6, 4)$
5. $A(5, 0)$, $B(-3, 2)$

6. $A(0, -4)$, $B(8, 3)$

7. Use las pendientes para demostrar que $A(-4, -1)$, $B(2, 3)$, $C(1, -3)$ y $D(7, 1)$ son los vértices de un paralelogramo.

8. Use las pendientes para demostrar que $A(-3, -9)$, $B(1, -1)$ y $C(4, 5)$ están sobre una recta.

En cada uno de los Ejercicios 9 a 22 obtenga la ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas:

9. A través de $A(5, -2)$; pendiente, $1/3$.

10. A través de $B(-3, 7)$; pendiente, -2.

11. A través de $A(-8, -3)$ y $B(2, -5)$.

12. A través de $P(4, -1)$ y $Q(-6, 3)$.

13. Pendiente, -4; intercepción y, 7.

14. Pendiente, $3/4$; intercepción x, 5.

15. Intercepción x, -3; intercepción y, 7.

16. A través de $A(-7, -8)$; intercepción y, 0.

17. A través de $A(7, -3)$; paralela (a) al eje x; (b) al eje y.

18. A través de $A(-8, 2)$; perpendicular (a) al eje y; (b) al eje x.

19. Biseca el segundo y cuarto cuadrantes.

20. Coincidente con el eje y.

21. A través de $A(-4, 10)$; paralela a la recta que pasa por $B(0, 5)$ y $C(-8, -8)$.

22. A través de $P(3/2, -1/4)$; paralela a la recta con ecuación $2x + 4y = 5$.

23. Encuentre las ecuaciones para las medianas del triángulo con vértices en $A(-4, -3)$, $B(2, 3)$ y $C(5, -1)$.

24. Si $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ y $D(x_4, y_4)$ son vértices de un cuadrilátero arbitrario, demuestre que los segmentos de recta que unen los puntos medios de los lados adyacentes forman un paralelogramo.

En cada uno de los Ejercicios 25 a 34, use la forma pendiente-intercepción para calcular la pendiente y la intercepción y de la recta que tiene la ecuación dada y trace la gráfica.

25. $2x - 5y + 10 = 0$
26. $2y - 3x = 4$
27. $3x + 5y = 0$
28. $6x = 1 - 2y$
29. $y + 2 = 0$
30. $3y = 8$
31. $5x = 20 - 6y$
32. $9x - 4y = 0$
33. $y = 0$
34. $x = (2/3)y + 4$

35. Si una recta l tiene intercepciones x y y (no nulas) a y b, respectivamente, demuestre que una ecuación de l es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

(Ésta se llama **forma de intercepciones** para la ecuación de una recta). Exprese la ecuación $4x - 2y = 6$ en la forma de intercepciones.

36. Demuestre que una ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1).$$

(A ésta se le llama **forma de dos puntos para la** ecuación de una recta.) Use la forma de dos puntos para encontrar la ecuación de una recta que pasa por los puntos $A(7, -1)$ y $B(4, 6)$.

11.2 Otras propiedades de las rectas

El concepto de *ángulo de inclinación* presentado en la siguiente definición, es fundamental en los estudios de la recta.

DEFINICIÓN Si l es una recta que no es paralela al eje x, y si P_1 es el punto de intersección de l y el eje x, entonces el **ángulo**

de inclinación de l es el ángulo mínimo α que debe girar el eje x en sentido opuesto al de las manecillas del reloj y hacia P_1, para coincidir con l. Si l es paralela al eje x, entonces $\alpha = 0$.

Si l no es horizontal entonces $0° < \alpha < 180°$. La recta mostrada en (i) de la Figura 11.8 ilustra el caso en que $0° < \alpha < 90°$, y en (ii) se ilustra el de $90° < \alpha < 180°$. Se desprende por geometría plana que dos rectas son paralelas si y sólo si tienen el mismo ángulo de inclinación.

TEOREMA Si una recta tiene pendiente m y un ángulo de inclinación α, entonces $m = \tan\alpha$.

DEMOSTRACIÓN Si la recta es horizontal, entonces $m = 0$, $\alpha = 0°$ y, como $0 = \tan 0°$, el teorema se verifica.

Si la recta no es horizontal, sea x_1 la intercepción x y considere cualquier punto $P_2(x_2, y_2)$ sobre la recta, en donde $y_2 > 0$. Si $x_1 < x_2$, entonces, refiriéndose al triángulo en (i) de la Figura 11.8,

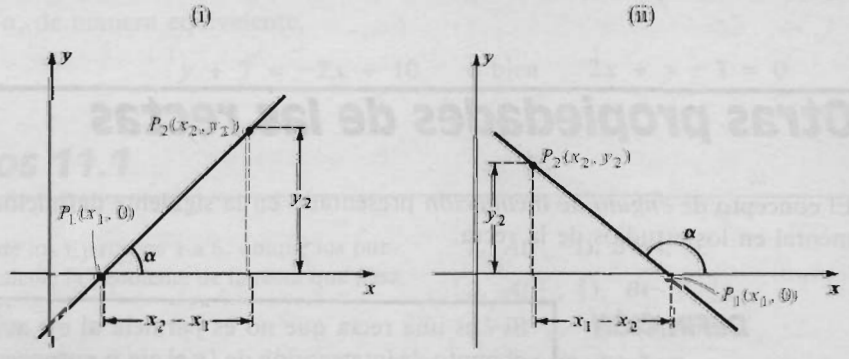
$$\tan\alpha = \frac{y_2}{x_2 - x_1} = m.$$

Si $x_2 < x_1$, entonces de (ii) de la citada Figura 11.8,

$$\tan(180° - \alpha) = \frac{y_2}{x_1 - x_2}.$$

Sin embargo, por el Ejercicio 35 de la Sección 3.6, $\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$, y por consiguiente, obtenemos nuevamente $\tan\alpha = m$. Esto completa la demostración. □

FIGURA 11.8



Aplicando la fórmula de sustracción para la función tangente

$$\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_1 \tan\alpha_2}$$

o bien

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

Por definición, las rectas son perpendiculares si y sólo si $\theta = 90°$, o, en forma equivalente, $\tan\theta$ es indefinida. No obstante, por la fórmula anterior $\tan\theta$ es indefinida si y sólo si $1 + m_1 m_2 = 0$, o bien $m_1 m_2 = -1$, que es lo que queríamos comprobar. Si bien nos hemos referido a la Figura 11.9, se puede usar un razonamiento similar sin considerar las magnitudes de α_1 y α_2, o donde se cortan las rectas. □

Otra forma de establecer este teorema es decir que l_1 y l_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1 = 1/m_2$; esto es, m_1 y m_2 son recíprocos negativos uno del otro.

EJEMPLO 2 Demostrar que un triángulo con vértices $A(-1, -3)$, $B(6, 1)$ y $C(2, -5)$ es un triángulo rectángulo.

SOLUCIÓN Si m_1 designa la pendiente de una recta que pasa por B y C, y si m_2 señala la pendiente de una recta a través de A y C, entonces

$$m_1 = \frac{1 - (-5)}{6 - 2} = \frac{3}{2}, \qquad m_2 = \frac{-3 - (-5)}{-1 - 2} = -\frac{2}{3}.$$

Como $m_1 m_2 = -1$, el ángulo en C es un ángulo recto. ■

EJEMPLO 3 Obtener una ecuación para la perpendicular bisectriz l del segmento de recta que va de $A(1, 7)$ a $B(-3, 2)$.

SOLUCIÓN Los puntos dados y la perpendicular bisectriz se muestran en la Figura 11.10. La pendiente de la recta a través de A y B es

$$m = \frac{7 - 2}{1 - (-3)} = \frac{5}{4}$$

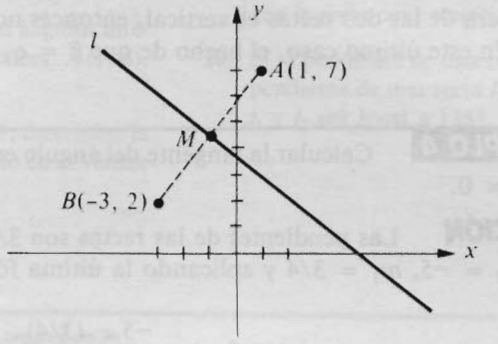
y por lo tanto, por el último teorema, la pendiente de l es $-4/5$. Aplicando la fórmula del punto medio, vemos que el punto medio de AB es $(-1, 9/2)$. Con la forma de punto-pendiente, la ecuación para l es

$$y - \frac{9}{2} = -\frac{4}{5}(x + 1).$$

Multiplicando ambos lados por 10 y simplificando, obtenemos

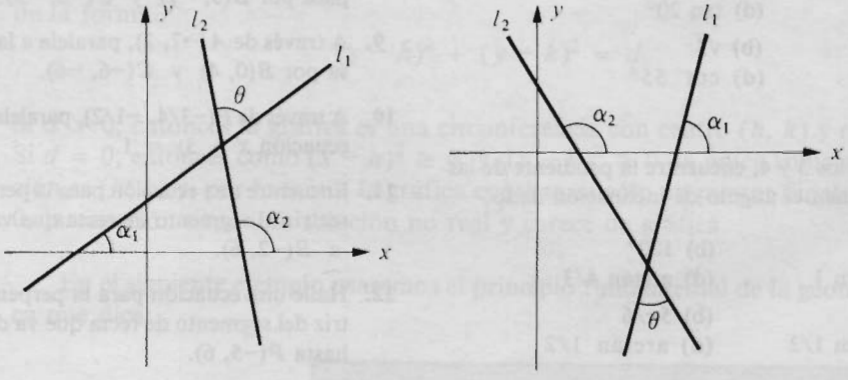
$$8x + 10y - 37 = 0.$$

FIGURA 11.10



Concluiremos esta sección deduciendo una fórmula que sirve para encontrar el ángulo entre dos rectas en un plano coordenado. Si las rectas son paralelas, entonces por definición el ángulo entre ellas es 0°. Si las rectas se cortan, desígnese la recta con mayor inclinación como l_2, y la recta con menor inclinación como l_1. Representando los ángulos de inclinación de l_1 y l_2 por α_1 y α_2, respectivamente, se desprende que $\alpha_2 > \alpha_1$. El ángulo θ entre l_1 y l_2 se define por $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$, como se ilustra en la Figura 11.11.

FIGURA 11.11



Suponiendo que ninguno de los ángulos es recto,

$$\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \tan\alpha_1}$$

o bien

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

en donde m_1 y m_2 son las pendientes de l_1 y l_2, respectivamente. Si $\theta = 90°$, las rectas son perpendiculares, lo cual, para rectas no verticales, es equivalente a $m_1m_2 = -1$. Si cualquiera de las dos rectas es vertical, entonces no se puede emplear la fórmula para $\tan\theta$. En este último caso, el hecho de que $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$, puede usarse para evaluar θ.

EJEMPLO 4 Calcular la tangente del ángulo entre las rectas $3x - 4y = 8$ y $5x + y - 7 = 0$.

SOLUCIÓN Las pendientes de las rectas son $3/4$ y -5. (¿Por qué?) Estableciendo que $m_2 = -5$, $m_1 = 3/4$ y aplicando la última fórmula, obtenemos

$$\tan\theta = \frac{-5 - (3/4)}{1 + (-5)(3/4)} = \frac{23}{11}.$$

Se puede encontrar una aproximación a θ por medio de la Tabla 2. Redondeando a grados, $\theta \approx 64°$. ■

Ejercicios 11.2

En los Ejercicios 1 y 2 determine el ángulo de inclinación de las rectas que tienen las pendientes dadas:

1. (a) -1 (b) $\sqrt{3}/3$
(c) 2 (d) $\tan 20°$

2. (a) 1 (b) $\sqrt{3}$
(c) -4 (d) $\cot 55°$

En los Ejercicios 3 y 4, encuentre la pendiente de las rectas que tienen el ángulo de inclinación dado.

3. (a) $0°$ (b) $120°$
(c) arctan 1 (d) arctan 4/3

4. (a) $135°$ (b) $5\pi/6$
(c) arcsen 1/2 (d) arctan 1/2

5. Demuestre que los puntos siguientes son vértices de un rectángulo: $A(6, 15)$, $B(11, 12)$, $C(-1, -8)$, $D(-6, -5)$.

6. Demuestre que los puntos $A(1, 4)$, $B(6, -4)$, $C(-15, -6)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

En cada uno de los Ejercicios 7 a 10 obtenga una ecuación para las rectas que satisfaga las condiciones dadas.

7. A través de $A(7, -3)$, perpendicular a la recta con ecuación $2x - 5y = 8$.

8. A través de $A(-4, 8)$, perpendicular a la recta que pasa por $B(5, -1)$ y $C(-2, -3)$.

9. A través de $A(-7, 2)$, paralela a la recta que pasa por $B(0, 4)$ y $C(-6, -6)$.

10. A través de $P(-3/4, -1/2)$, paralela a la recta con ecuación $x + 3y = 1$.

11. Encuentre una ecuación para la perpendicular bisectriz al segmento de recta que va de $A(3, -1)$ a $B(-2, 6)$.

12. Halle una ecuación para la perpendicular bisectriz del segmento de recta que va desde el origen hasta $P(-5, 6)$.

13. Obtenga las ecuaciones de las alturas del triángulo con vértices $A(-3, 2)$, $B(5, 4)$ y $C(3, -8)$. Determine el punto de intersección de dichas alturas.

14. Halle las ecuaciones de las medianas del triángulo del Ejercicio 13 y encuentre su punto de intersección.

15. Encuentre la tangente del ángulo entre las rectas cuyas pendientes son (a) 4 y 2/3, (b) -3 y -5.

16. Calcule, redondeando a grados, el ángulo entre

las rectas con ecuaciones $6x - 2y - 3 = 0$ y $3x + 8y + 1 = 0$.

17. Calcule, al grado más cercano, los ángulos interiores de un triángulo con vértices $A(1, 6)$, $B(-3, -2)$ y $C(4, 4)$.

18. Dado el triángulo del Ejercicio 17, determine la pendiente de la bisectriz del ángulo en el vértice A.

19. Encuentre la pendiente de una recta que pasa por el punto $P(4, -5)$, y que forma un ángulo de 30° con la recta cuya ecuación es $3x + y - 18 = 0$.

20. Si la pendiente de una recta l_1 es $1/2$, calcule la pendiente de una recta l_2 tal que el ángulo entre l_1 y l_2 sea igual a 135°.

11.3 Circunferencias

En la Sección 3.2, comprobamos que la circunferencia en un plano coordenado con centro $C(h, k)$ y radio r es la gráfica de la ecuación

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

Elevando al cuadrado y simplificando, obtenemos una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

donde a, b y c son números reales. Recíprocamente, si comenzamos con tal ecuación, casi siempre es posible completar los cuadrados en x y y y obtener así una ecuación de la forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = d.$$

Si $d > 0$, entonces la gráfica es una circunferencia con centro (h, k) y radio $r = \sqrt{d}$. Si $d = 0$, entonces como $(x - h)^2 \geq 0$ y $(y - k)^2 \geq 0$, la única solución de la ecuación es (h, k) y, por lo tanto, la gráfica consiste en sólo un punto. Finalmente, si $d < 0$, la ecuación tiene una solución no real y carece de gráfica.

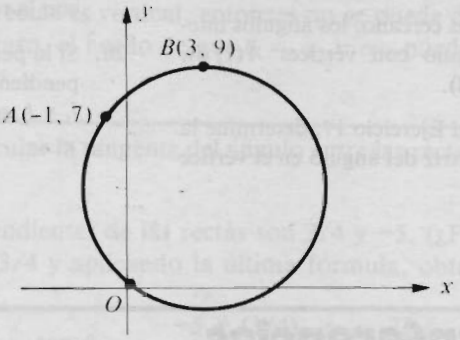
En el siguiente ejemplo usaremos el principio fundamental de la geometría analítica que dice:

> Un punto $P(x_1, y_1)$ está en la gráfica de una ecuación en x y y si y sólo si el par (x_1, y_1) es una solución de la ecuación.

EJEMPLO 1 Obtener una ecuación de la circunferencia que contenga los puntos $A(-1, 7)$, $B(3, 9)$ y el origen $O(0, 0)$. ¿Cuáles son el centro y el radio de tal circunferencia?

SOLUCIÓN La curva se ilustra en la Figura 11.12. Si elegimos a, b y c apropiada-

FIGURA 11.12



mente, la ecuación tiene la forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Más aún, como la circunferencia pasa por el origen, (0, 0) es una solución. Esto es,

$$0^2 + 0^2 + a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0$$

y en consecuencia $c = 0$. Por lo tanto, una ecuación para la circunferencia tiene la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by = 0.$$

Como A y B están en la circunferencia, $(-1, 7)$ y $(3, 9)$ son soluciones para esta ecuación; esto es,

$$1 + 49 - a + 7b = 0 \quad \text{y} \quad 9 + 81 + 3a + 9b = 0.$$

Simplificando, vemos que el par (a, b) debe ser la solución de las *dos* ecuaciones siguientes:

$$a - 7b = 50 \quad \text{y} \quad a + 3b = -30.$$

Resolviendo la primera ecuación para evaluar a y sustituyendo en la segunda, obtenemos $(7b + 50) + 3b = -30$, o bien $10b = -80$. En consecuencia, $b = -8$. Como $a = 7b + 50$, entonces $a = 7(-8) + 50 = -6$. La sustitución de estos números en vez de a y b en $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ da

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0.$$

Completando los cuadrados obtenemos

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) = 9 + 16$$
$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

Por lo tanto, el centro es $C(3, 4)$ y el radio vale 5. ■

Ejercicios 11.3

En cada uno de los Ejercicios 1 a 6, encuentre la ecuación de la circunferencia que satisface las condiciones enunciadas.

1. Centro $C(3, -4)$, radio 2.
2. Centro $C(5, 0)$, radio 5.
3. Centro $C(6, -2)$, tangente a la recta $x = 3$.
4. Extremos de su diámetro: $A(-1, 1)$, $B(4, -6)$.

5. Circunscrita alrededor del triángulo rectángulo con vértices $A(-1, 2)$, $B(2, -3)$ y $C(7, 0)$. (*Sugerencia:* el centro de la curva es el punto medio de la hipotenusa.)

6. Pasa por los tres puntos $A(-2, 1)$, $B(5, 1)$ y $C(5, -3)$.

En cada uno de los Ejercicios 7 a 16 determine el centro y el radio de la circunferencia que tiene la ecuación dada.

7. $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 10 = 0$

8. $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 15 = 0$

9. $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$

10. $x^2 + y^2 + 14x + 46 = 0$

11. $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$

12. $x^2 + y^2 + 2y = 0$

13. $4x^2 + 4y^2 + 8x - 8y + 7 = 0$

14. $2x^2 + 2y^2 + 8x + 7 = 0$

15. $3x^2 + 3y^2 - 3x + 2y + 1 = 0$

16. $9x^2 + 9y^2 + 12x - 6y + 4 = 0$

En los Ejercicios 17 y 18, utilice el método del Ejemplo 1 para encontrar una ecuación de la circunferencia que circunscribe el triángulo con los vértices dados:

17. $A(-2, 1)$, $B(-4, -1)$, $C(1, 2)$

18. $A(-3, 1)$, $B(5, 5)$, $C(-3, 9)$

19. Demuestre que el centro de una circunferencia dada por $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ están sobre la recta $y = x$ si y sólo si $a = b$.

20. Demuestre que la gráfica de $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ contiene el origen si y sólo si $c = 0$.

11.4 Secciones cónicas

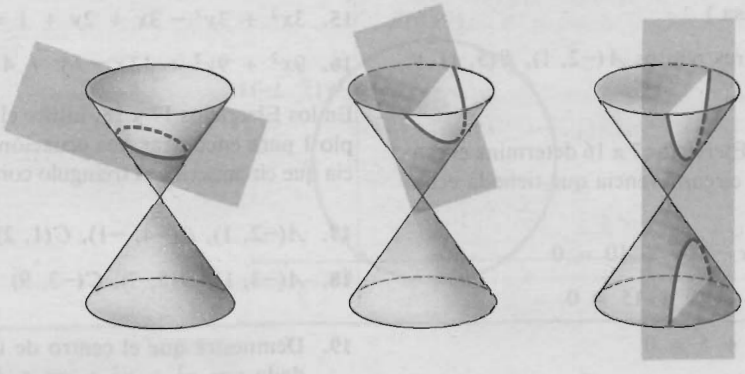
Las figuras geométricas consideradas en las cuatro secciones siguientes, 11.5 a 11.8, se pueden obtener por el corte con un plano de un cono circular recto doble. Por esta razón se llaman **secciones cónicas**, o simplemente **cónicas**. Si, como en la Figura 11.13(i) un plano, no perpendicular al eje del cono, atraviesa completamente una porción de éste, se obtiene una curva de intersección llamada **elipse**. Si el plano es perpendicular al eje del cono, se tiene una **circunferencia**. Si el plano no pasa a través completamente de uno de los mantos del cono y no secciona a ambos, como se ilustra en la Figura 11.13(ii), la curva de intersección es una **parábola**. Si el plano secciona a ambos mantos del cono, como en (iii), la figura resultante es una **hipérbola**.

Las cónicas pueden variar considerablemente, cambiando la posición del plano de sección y la forma del cono. Para algunas posiciones del plano, resultan las llamadas **cónicas degradadas** (o **degeneradas**). Por ejemplo, si el plano corta al cono sólo en el vértice, la cónica consta de un solo punto. Si el eje del cono coincide con el plano, se obtiene un par de rectas que se cortan. Finalmente, si comenzamos con el caso parabólico, como en la Figura 11.13(ii), y movemos el plano paralelamente a su posición inicial hasta que coincida con una de las generatrices del cono, obtenemos una línea recta.

Las secciones cónicas fueron estudiadas extensamente por los antiguos matemáticos griegos, quienes descubrieron las propiedades que permiten definir a las cónicas en términos de puntos (focos) y rectas (directrices) en el plano de la cónica. Un hecho notable acerca de las secciones cónicas es que aunque se estudiaron hace miles de años, están muy lejos de ser obsoletas; son herramientas importantes para las investigaciones espaciales de hoy en día y para el estudio del comportamiento de las partículas atómicas. En física se demuestra que si una partícula se mueve bajo la influencia de lo que se llama un *campo de fuerza que varía con el inverso del cuadrado de la distancia*, en-

FIGURA 11.13

(i) Elipse (ii) Parábola (iii) Hipérbola



tonces la trayectoria se puede describir por medio de una sección cónica, por ejemplo los campos gravitacionales y electromagnéticos. Las órbitas de los planetas son elípticas. Si la elipse es muy "aplanada", la curva se parece a la trayectoria de un cometa. La hipérbola se utiliza para describir la trayectoria de una partícula alfa en el campo eléctrico producido por el núcleo de un átomo. Para captar la energía solar se usan a veces espejos parabólicos. La persona interesada puede encontrar muchas más aplicaciones de las secciones cónicas.

11.5 Parábolas

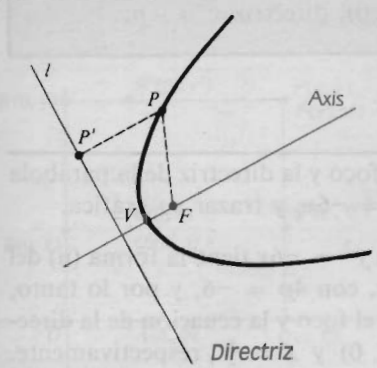
En la Sección 4.1 se discutieron las parábolas; sin embargo, no se dio en ese momento la definición. Aún más, se concentró la atención en las curvas parabólicas de eje vertical. Ahora se definirá a la *parábola* y se deducirán las ecuaciones para las parábolas que tienen eje vertical u horizontal.

DEFINICIÓN

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos de un plano que son equidistantes de un punto fijo F (llamado **foco**) y de una recta fija l (denominada **directriz**) situados en el plano.

Supondremos que F no está en l, pues entonces, la parábola quedaría reducida a una recta. Si P es cualquier punto del plano y P' es el punto de l que determina la recta que pasa por P y es perpendicular a l, entonces por definición, P está sobre la parábola si y sólo si $d(P, F) = d(P, P')$. En la Figura 11.14 se ilustra un caso típico, en donde la línea curva indica las posibles posiciones de P. La recta que pasa por F y es per-

FIGURA 11.14

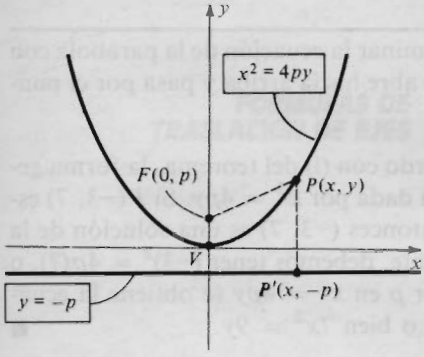


pendicular a la directriz, es el **eje** de la parábola. El punto V sobre el eje y que está a la mitad de F y l, es el **vértice** de la parábola.

Con el objeto de determinar una ecuación sencilla para la parábola, consideramos el caso donde el eje y coincide con el eje de la parábola y el origen con el vértice, como se ilustra en la Figura 11.15. Dadas estas condiciones, las coordenadas del foco son $(0, p)$ para un número real $p \neq 0$, y la ecuación de la directriz está dada por $y = -p$. Por la fórmula de la distancia, un punto $P(x, y)$ está sobre la parábola si y sólo si

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}.$$

FIGURA 11.15



Elevando al cuadrado ambos lados,

$$(x-0)^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2,$$

o bien

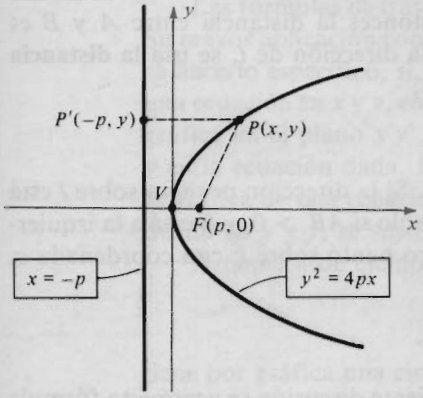
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2.$$

y después de simplificar,

$$x^2 = 4py.$$

Se ha demostrado que las coordenadas de todo punto (x, y) sobre la parábola satisfacen $x^2 = 4py$. Recíprocamente, si (x, y) es una solución de esta ecuación, entonces, invirtiendo los pasos anteriores se ve que el punto (x, y) está sobre la parábola. Si $p > 0$ la parábola *abre hacia arriba*, como en la Figura 11.15, mientras que si $p < 0$, la parábola *abre hacia abajo*. Nótese que la gráfica es simétrica con respecto al eje y, puesto que las soluciones de la ecuación $x^2 = 4py$ no cambian si se reemplaza x por $-x$.

FIGURA 11.16



Existe una situación análoga cuando el eje de la parábola coincide con el eje x. Si el vértice es $V(0, 0)$, el foco $F(p, 0)$ y la ecuación de la directriz $x = -p$ (véase la Figura 11.16) entonces, con el mismo tipo de razonamiento obtenemos la **forma canónica** de la ecuación, $y^2 = 4px$. Si $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha, como en la Figura 11.16; si $p < 0$, abre hacia la izquierda. En este caso, la gráfica es simétrica con respecto al eje x.

El siguiente teorema resume esta discusión.

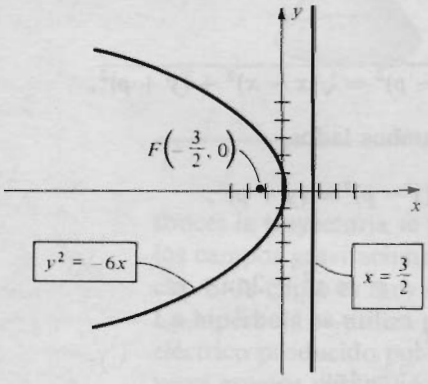
TEOREMA

La gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una parábola cuyo vértice está en el origen y que tiene el foco y la directriz indicadas.

(i) $x^2 = 4py$: foco $F(0, p)$, directriz $y = -p$.
(ii) $y^2 = 4px$: foco $F(p, 0)$, directriz $x = -p$.

EJEMPLO 1 Hallar el foco y la directriz de la parábola que tiene por ecuación $y^2 = -6x$, y trazar su gráfica.

FIGURA 11.17



SOLUCIÓN La ecuación $y^2 = -6x$ tiene la forma (ii) del teorema anterior $y^2 = 4px$, con $4p = -6$, y por lo tanto, $p = -\frac{3}{2}$. En consecuencia, el foco y la ecuación de la directriz están dados por $F(-\frac{3}{2}, 0)$ y $x = \frac{3}{2}$, respectivamente. En la Figura 11.17 se tiene la gráfica de la parábola. ■

EJEMPLO 2 Determinar la ecuación de la parábola con vértice en el origen, que abre hacia arriba y pasa por el punto $P(-3, 7)$.

SOLUCIÓN De acuerdo con (i) del teorema, la forma general de la ecuación está dada por $x^2 = 4py$. Si $P(-3, 7)$ está sobre la parábola, entonces $(-3, 7)$ es una solución de la ecuación. Por consiguiente, debemos tener $(-3)^2 = 4p(7)$, o sea $p = \frac{9}{28}$. Al sustituir p en $x^2 = 4py$ se obtiene la ecuación deseada $x^2 = \frac{9}{7}y$, o bien $7x^2 = 9y$. ■

Para manejar el caso en que el vértice no está en el origen se puede usar una técnica conocida como **traslación de ejes**. Recuérdese que si a y b son las coordenadas de dos puntos A y B sobre una recta coordenada l, entonces la distancia entre A y B es $d(A, B) = |b - a|$. Si se desea tener en cuenta la dirección de l, se usa la **distancia dirigida** $\overline{AB}$ de A hacia B, que es, por definición,

$$\overline{AB} = b - a.$$

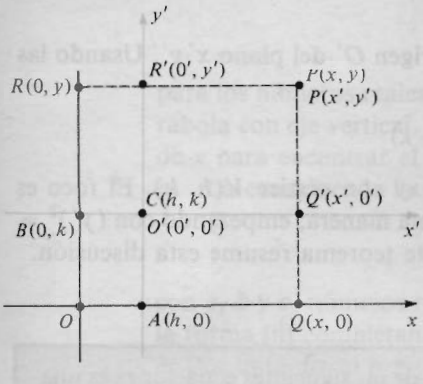
Puesto que $\overline{BA} = a - b$, se tiene que $\overline{AB} = -\overline{BA}$. Si la dirección positiva sobre l está a la derecha, entonces B está a la derecha de A si y sólo si $\overline{AB} > 0$, y B está a la izquierda de A si y sólo si $\overline{AB} < 0$. Si C es cualquier otro punto sobre l; con coordenada c, se deduce que

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC},$$

puesto que $c - a = (b - a) + (c - b)$. En la siguiente discusión se usará esta fórmula para determinar las expresiones para la traslación de ejes.

Supóngase que $C(h, k)$ es un punto arbitrario en un plano coordenado xy. Introduzcamos ahora un nuevo sistema coordenado $x'y'$, cuyo origen O' está en C, de tal modo que los ejes x' y y' sean paralelos y tengan las mismas unidades de longitud y la misma dirección positiva que los ejes x y y, respectivamente. En la Figura 11.18 se

FIGURA 11.18



ilustra una situación típica, en la que, por simplicidad se ha colocado C en el primer cuadrante. Para representar las coordenadas de los puntos en el sistema de coordenadas $x'y'$, se usarán letras con primas para distinguirlas de las coordenadas con respecto al sistema coordenado xy. Así, el punto $P(x, y)$ en el sistema xy se representará mediante $P(x', y')$ en el sistema $x'y'$. Si se marcan las proyecciones de P sobre los distintos ejes, como en la Figura 11.18, y se denota por A y B las proyecciones de C sobre los ejes x y y, respectivamente, entonces, usando distancias dirigidas se obtiene

$$x = \overline{OQ} = \overline{OA} + \overline{AQ} = \overline{OA} + \overline{O'Q'} = h + x'$$
$$y = \overline{OR} = \overline{OB} + \overline{BR} = \overline{OB} + \overline{O'R'} = k + y'.$$

Esto demuestra el siguiente resultado.

FÓRMULAS DE TRASLACIÓN DE EJES

Si (x, y) son las coordenadas de un punto P con respecto a un sistema coordenado xy y si (x', y') son las coordenadas de P respecto a un sistema coordenado $(x'y')$ con origen en el punto $C(h, k)$ del sistema $x\ y$, entonces

$$\text{(i)}\ x = x' + h, \quad y = y' + k$$
$$\text{(ii)}\ x' = x - h, \quad y' = y - k.$$

Las fórmulas de traslación de ejes permiten pasar de un sistema coordenado a otro. Su mayor aplicación consiste en cambiar la forma de las ecuaciones de las gráficas. Para hacerlo específico, si, en el plano xy, una colección dada de puntos es la gráfica de una ecuación en x y y, entonces para obtener una ecuación en x' y y' que tenga la misma gráfica en el plano $x'y'$, se debe sustituir $x' + h$ en lugar de x y $y' + k$ en lugar de y en la ecuación dada. Recíprocamente, si un conjunto de puntos en el plano $x'y'$ es la gráfica de una ecuación en x' y y', entonces, para encontrar la ecuación correspondiente en x y y, se sustituye $x - h$ en vez de x', y $y - k$ en vez de y'.

A manera de ejemplo sencillo, la ecuación

$$(x')^2 + (y')^2 = r^2$$

tiene por gráfica una circunferencia en el plano $x'y'$, con radio r y centro en el origen O'. Usando las fórmulas de traslación de ejes, la ecuación para esta circunferencia en el plano xy es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2,$$

que está de acuerdo con la fórmula para una circunferencia de radio r y centro en $C(h, k)$ en el plano xy.

Como otra ilustración se sabe que

$$(x')^2 = 4py'$$

es la ecuación de una parábola con vértice en el origen O' del plano $x'y'$. Usando las fórmulas de traslación de ejes se ve que

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

es la ecuación de la misma parábola en el plano xy con vértice $V(h, k)$. El foco es $F(h, k + p)$ y la directriz es $y = k - p$. De la misma manera, empezando con $(y')^2 = 4px'$ se obtiene $(y - k)^2 = 4p(x - h)$. El siguiente teorema resume esta discusión.

TEOREMA

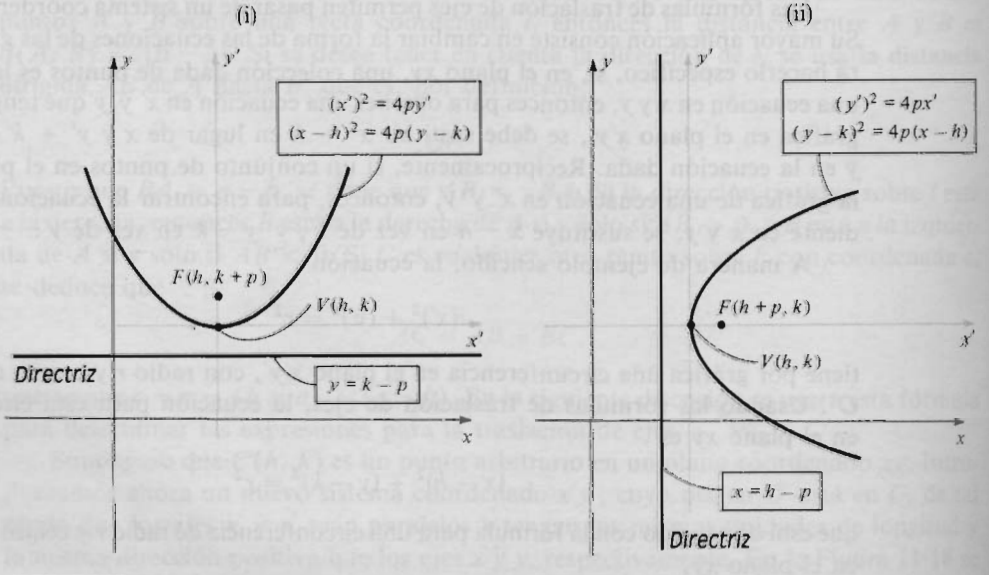
La gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una parábola con vértice en $V(h, k)$, y que tiene el foco y la directriz indicados.

(i) $(x - h)^2 = 4p(y - k)$: foco $F(h, k + p)$, directriz $y = k - p$.

(ii) $(y - k)^2 = 4p(x - h)$: foco $F(h + p, k)$, directriz $x = h - p$.

En cada caso el eje de la parábola es paralelo a un eje coordenado. La parábola que tiene la ecuación (i) abre hacia arriba o hacia abajo, mientras que la parábola en (ii) abre hacia la derecha o hacia la izquierda. En la Figura 11.19 se muestran algunas gráficas típicas.

FIGURA 11.19



Elevando al cuadrado el lado izquierdo de la ecuación en la parte (i) del teorema y simplificando, se llega a una ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

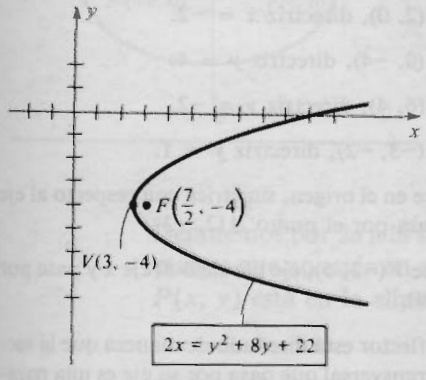
para los números reales a, b y c. Recíprocamente, la gráfica de tal ecuación es una parábola con eje vertical. Al igual que en la Sección 4.1, se puede completar el cuadrado de x para encontrar el vértice (véanse los Ejemplos 3 y 4 de la Sección 4.1.).

La ecuación de la parte (ii) del teorema se puede escribir

$$x = ay^2 + by + c$$

con a, b y c, números reales. Recíprocamente, la última ecuación puede expresarse en la forma (ii) completando el cuadrado en y, como se ilustra en seguida, en el Ejemplo 3. Por lo tanto, si $a \neq 0$, la gráfica de $x = ay^2 + by + c$ es una parábola con eje horizontal.

FIGURA 11.20



EJEMPLO 3 Analizar la ecuación siguiente y representarla gráficamente

$$2x = y^2 + 8y + 22.$$

SOLUCIÓN Por las observaciones anteriores sabemos que la gráfica de la ecuación es una parábola con eje horizontal. A partir de

$$y^2 + 8y = 2x - 22$$

completamos el cuadrado en el miembro de la izquierda sumando 16 a ambos lados. Esto da

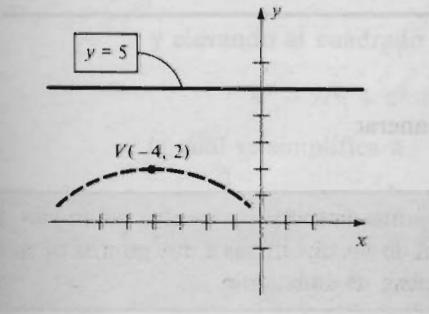
$$y^2 + 8y + 16 = 2y - 6.$$

Esta ecuación se puede escribir

$$(y + 4)^2 = 2(x - 3)$$

que es la forma (ii) del teorema con $h = 3$, $k = -4$ y $4p = 2$, o sea $p = \frac{1}{2}$. Por consiguiente, el vértice es $V(3, -4)$. Como $p = \frac{1}{2} > 0$, la parábola abre hacia la derecha con foco en $F(h + p, k)$, esto es, $F(\frac{7}{2}, -4)$. La ecuación de la directriz está dada por $x = h - p$, o sea, $x = \frac{5}{2}$. La Figura 11.20 representa la parábola. ■

FIGURA 11.21



EJEMPLO 4 Hallar la ecuación de la parábola con vértice $V(-4, 2)$ y directriz $y = 5$.

SOLUCIÓN En la Figura 11.21 se muestran el vértice y

la directriz. La línea punteada indica una posible posición para la curva. Por consiguiente, una ecuación para la parábola es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

en la que $h = -4$, $k = 2$ y $p = -3$. Esto da

$$(x + 4)^2 = -12(y - 2).$$

La última ecuación puede expresarse en la forma $y = ax^2 + bx + c$ como sigue:

$$x^2 + 8x + 16 = -12y + 24$$

$$12y = -x^2 - 8x + 8$$

$$y = -\tfrac{1}{12}x^2 - \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3}$$ ■

Ejercicios 11.5

En los Ejercicios 1 a 16, encuentre el vértice, el foco y la directriz de la parábola dada y trace su gráfica.

1. $x^2 = -12y$
2. $y^2 = \frac{1}{2}x$
3. $2y^2 = -3x$
4. $x^2 = -3y$
5. $8x^2 = y$
6. $y^2 = -100x$
7. $y^2 - 12 = 12x$
8. $y = 40x - 97 - 4x^2$
9. $y = x^2 - 4x + 2$
10. $y = 8x^2 + 16x + 10$
11. $y^2 - 4y - 2x - 4 = 0$
12. $y^2 + 14y + 4x + 45 = 0$
13. $4x^2 + 40x + y + 106 = 0$
14. $y^2 - 20y + 100 = 6x$
15. $x^2 + 20y = 10$
16. $4x^2 + 4x + 4y + 1 = 0$

En los Ejercicios 17 a 22, encuentre la ecuación de la parábola que satisface las condiciones dadas.

17. Foco (2, 0), directriz $x = -2$.
18. Foco (0, −4), directriz $y = 4$.
19. Foco (6, 4), directriz $y = -2$.
20. Foco (−3, −2), directriz $y = 1$.
21. Vértice en el origen, simétrica con respecto al eje y y pasa por el punto $A(2, -3)$.
22. Vértice $V(-3, 5)$, eje paralelo al eje x y pasa por $A(5, 9)$.
23. Un reflector está diseñado de manera que la sección transversal que pasa por su eje es una parábola con foco en la fuente de luz. Si el reflector mide 3 pie de ancho en la abertura y 1 pie de profundidad, localice el foco.
24. Encuentre la ecuación de una parábola que tenga eje horizontal y que pase por los puntos $A(2, 1)$, $B(6, 2)$ y $C(12, -1)$.

11.6 Elipses

Podemos definir a una elipse de la siguiente manera:

DEFINICIÓN

Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos en un plano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos en el plano (los **focos**), es constante.

FIGURA 11.22

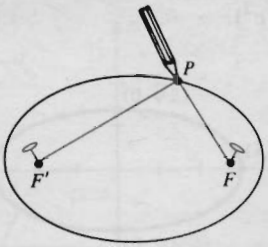
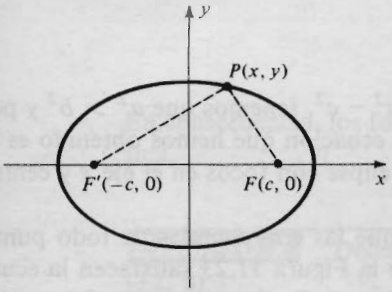


FIGURA 11.23



Se sabe que las órbitas de los planetas del sistema solar son elípticas, con el Sol en uno de sus focos. Esta es sólo una de las muchas aplicaciones importantes de las elipses.

Existe una forma sencilla para dibujar una elipse en un papel: Se empieza por clavar dos tachuelas en los puntos F y F' del papel y se atan los extremos de un hilo a las tachuelas. Si se estira el hilo con la punta de una lápiz hasta el punto P, como en la Figura 11.22, al mover el lápiz manteniendo tenso el hilo, la suma de las distancias $d(F, P)$ y $d(F', P)$ es constante, puesto que corresponde a la longitud del hilo. Por consiguiente, el lápiz trazará una figura semejante a la de una elipse con focos en F y F'. La forma de la elipse puede cambiar considerablemente al variar las posiciones de F y F' aunque se mantenga fija la longitud del hilo. Si F y F' están separados de tal forma que $d(F, F')$ es casi igual a la longitud del hilo, entonces la elipse será muy aplanada. Por otro lado, si $d(F, F')$ es cercana a cero, la elipse será una curva casi circular. En realidad, si $F = F'$, se obtendrá una circunferencia.

Tomando sistemas coordenados apropiados se obtienen ecuaciones simples para las elipses. Tomemos la recta que pasa por los dos focos F y F' como eje x y el punto medio del segmento $F'F$ como origen; este punto es el **centro** de la elipse. Si las coordenadas de F son $(c, 0)$, donde $c > 0$, entonces, como se muestra en la Figura 11.23, F tiene coordenadas $(-c, 0)$, y por consiguiente, la distancia entre F y F' es $2c$. Denotemos por $2a$ a la suma constante de las distancias de F y F' a P, donde para tener puntos que no estén en el eje x, debemos tener $2a > 2c$, es decir, $a > c$. Por definición, $P(x, y)$ está en la elipse si y sólo si

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a$$

o, por la fórmula de distancia,

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

Esta ecuación se puede escribir

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

y elevando al cuadrado ambos lados, obtenemos

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2,$$

la cual se simplifica a

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Elevando al cuadrado ambos lados, tenemos

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$$

que podemos escribir

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Dividiendo ambos lados entre $a^2(a^2 - c^2)$, obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Por conveniencia, hacemos

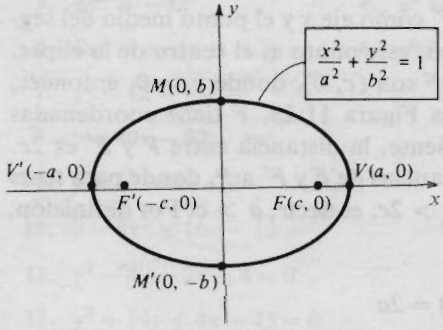
$$b^2 = a^2 - c^2 \qquad \text{en donde } b > 0$$

para obtener la siguiente ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Como $c > 0$ y $b^2 = a^2 - c^2$, tenemos que $a^2 > b^2$ y por consiguiente $a > b$. La ecuación que hemos obtenido es la **forma canónica** de una elipse con focos en el eje x y centro en el origen.

FIGURA 11.24



Se ha demostrado que las coordenadas de todo punto (x, y) sobre la elipse de la Figura 11.23 satisfacen la ecuación $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$. Recíprocamente, si (x, y) es una solución de la ecuación, entonces, invirtiendo los pasos anteriores se puede ver que el punto (x, y) está sobre la elipse.

Las intersecciones de la gráfica con el eje x se pueden determinar haciendo $y = 0$, obteniendo así $x^2/a^2 = 1$ o sea $x^2 = a^2$; por consiguiente, las intercepciones x son a y $-a$. Los puntos $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ sobre la gráfica son los **vértices** de la elipse. (Véase la Figura 11.24.) El segmento $V'V$ es el **eje mayor**. De la misma manera, haciendo $x = 0$ en la ecuación de la elipse, obtenemos $y^2/b^2 = 1$ o sea $y^2 = b^2$. Así, las intercepciones y son b y $-b$. El segmento de $M'(0, -b)$ a $M(0, b)$ es el **eje menor** de la elipse. Nótese que el eje mayor es más grande que el eje menor, puesto que $a > b$.

Las pruebas de simetría muestran que la elipse es simétrica con respecto al eje x y al eje y. Es también simétrica con respecto al origen, puesto que la ecuación no cambia si sustituimos x por $-x$ y y por $-y$.

La discusión anterior se puede resumir de la siguiente manera:

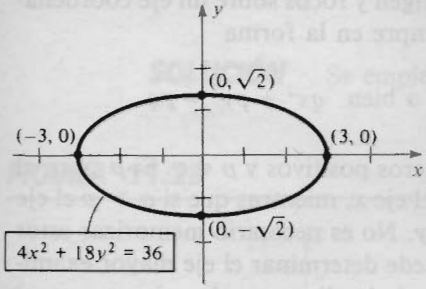
TEOREMA

La gráfica de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

para $a^2 > b^2$ es una elipse con vértices en $(\pm a, 0)$. Los extremos del eje menor son $(0, \pm b)$. Los focos son $(\pm c, 0)$, en donde $c^2 = a^2 - b^2$.

FIGURA 11.25



EJEMPLO 1 Estudiar la ecuación siguiente y representarla gráficamente

$$4x^2 + 18y^2 = 36.$$

SOLUCIÓN Para obtener la forma canónica del teorema tenemos que dividir ambos lados de la ecuación dada entre 36 y simplificar. Se obtiene así

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1,$$

la cual está en la forma citada con $a^2 = 9$ y $b^2 = 2$. Así, $a = 3$, $b = \sqrt{2}$; por consiguiente, los extremos del eje mayor son $(\pm 3, 0)$ y los del eje menor $(0, \pm\sqrt{2})$. Como

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 2 = 7 \quad \text{o bien} \quad c = \sqrt{7}.$$

En consecuencia, los focos están en $(\pm\sqrt{7}, 0)$. En la Figura 11.25 hemos trazado la gráfica. ■

EJEMPLO 2 Determinar la ecuación de la elipse con vértices en $(\pm 4, 0)$ y focos en $(\pm 2, 0)$.

SOLUCIÓN Usando la notación del teorema, $a = 4$ y $c = 2$. Como $c^2 = a^2 - b^2$, se tiene que $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$. Al sustituir estos valores se obtiene

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

Multiplicando ambos lados por 48 queda la ecuación $3x^2 + 4y^2 = 48$. ■

Algunas veces es conveniente tomar el eje mayor de la elipse sobre el eje y. Si los focos están en $(0, \pm c)$ con un razonamiento similar al anterior obtenemos el siguiente.

TEOREMA

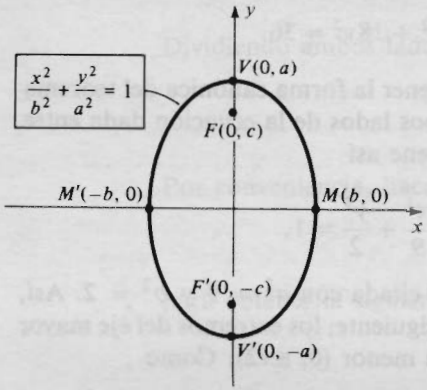
La gráfica de la ecuación

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

para $a^2 > b^2$, es una elipse con vértices $(0, \pm a)$. Los extremos del eje menor son $(\pm b, 0)$. Los focos son $(0, \pm c)$, en donde $c^2 = a^2 - b^2$.

En la Figura 11.25 hemos trazado una gráfica de este tipo.

FIGURA 11.26



El razonamiento anterior muestra que la ecuación de una elipse con centro en el origen y focos sobre un eje coordenado se puede escribir siempre en la forma

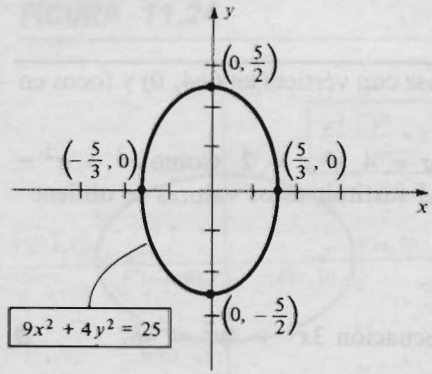
$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1 \quad \text{o bien} \quad qx^2 + py^2 = pq$$

en donde p y q son números positivos y $p \neq q$. Si $p > q$, el eje mayor coincide con el eje x, mientras que si $q > p$ el eje mayor está sobre el eje y. No es necesario memorizar estos hechos puesto que se puede determinar el eje mayor examinando las intersecciones de la elipse con los ejes x y y.

EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de la ecuación $9x^2 + 4y^2 = 25$.

SOLUCIÓN La gráfica es una elipse con centro en el origen y focos sobre uno de los ejes coordenados. Para encontrar las intersecciones con el eje x, hacemos $y = 0$ y obtenemos $9x^2 = 25$, o bien $x = \pm \frac{5}{3}$. Análogamente, para determinar las intersecciones con el eje y se hace $x = 0$ en la ecuación de la elipse y obtenemos $4y^2 = 25$, o sea $y = \pm \frac{5}{2}$. Estos resultados permiten trazar la elipse (véase la Figura 11.27). Como $\frac{5}{3} < \frac{5}{2}$, el eje mayor coincide con el eje y. ■

FIGURA 11.27



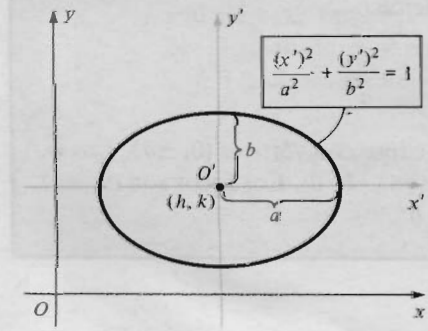
Utilizando las fórmulas de traslación de ejes se puede extender el estudio a la elipse con centro en un punto $C(h, k)$ en el plano xy. Por ejemplo, puesto que la gráfica de

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

es una elipse con centro en O' en un plano $x'y'$ (véase la Figura 11.28), su ecuación respecto al sistema coordenado xy es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

FIGURA 11.28



Elevando al cuadrado los términos indicados en la última ecuación y simplificando se obtiene una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en la que los coeficientes son números reales y A y C son ambos positivos. De manera recíproca, si se empieza con una ecuación de este tipo, completando cuadrados se puede obtener una forma que muestre el centro de la elipse y las longitudes de los ejes mayor y menor. Esta técnica se ilustra en el ejemplo siguiente.

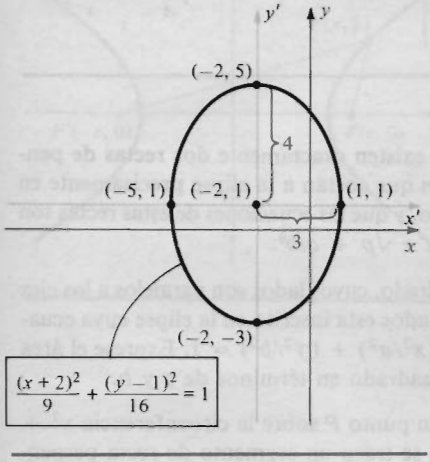
EJEMPLO 4 Analizar y trazar la gráfica de la ecuación

$$16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0.$$

SOLUCIÓN Se empieza escribiendo la ecuación en la forma

$$16(x^2 + 4x) + 9(y^2 - 2y) = 71.$$

FIGURA 11.29



En seguida, se completan los cuadrados de las expresiones entre paréntesis obteniéndose

$$16(x^2 + 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = 71 + 64 + 9.$$

Nótese que sumando 4 a la expresión que está dentro del primer paréntesis se ha sumado 64 al lado izquierdo de la ecuación, y por ello hay que compensar sumando 64 al lado derecho. De la misma manera, aumentando en 1 la expresión dentro del segundo paréntesis, se agrega 9 al lado izquierdo y, por consiguiente, se debe sumar también 9 al lado derecho. La última ecuación se puede escribir como

$$16(x + 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 144.$$

Dividiendo entre 144, se obtiene

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1,$$

que es de la forma $\dfrac{(x')^2}{9} + \dfrac{(y')^2}{16} = 1$

con $x' = x + 2$ y $y' = y - 1$. Esto corresponde a hacer $h = -2$ y $k = 1$ en las fórmulas de traslación de ejes. Puesto que la gráfica de la ecuación $(x')^2/9 + (y')^2/16 = 1$ es una elipse con centro en el origen O' en el plano $x'y'$, se deduce que la gráfica de la ecuación dada es una elipse con centro $C(-2, 1)$ en el plano xy y con ejes paralelos a los ejes coordenados. La gráfica se muestra en la Figura 11.29. ■

Ejercicios 11.6

En los Ejercicios 1 a 14, trace la gráfica de la ecuación y determine las coordenadas de los vértices y los focos.

1. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$
2. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$
3. $4x^2 + y^2 = 16$
4. $y^2 + 9x^2 = 9$
5. $5x^2 + 2y^2 = 10$
6. $\frac{1}{2}x^2 + 2y^2 = 8$
7. $4x^2 + 25y^2 = 1$
8. $10y^2 + x^2 = 5$
9. $4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y + 64 = 0$
10. $x^2 + 2y^2 + 2x - 20y + 43 = 0$
11. $9x^2 + 16y^2 + 54x - 32y - 47 = 0$
12. $4x^2 + 9y^2 + 24x + 18y + 9 = 0$
13. $25x^2 + 4y^2 - 250x - 16y + 541 = 0$
14. $4x^2 + y^2 = 2y$

En los Ejercicios 15 a 20 encuentre la ecuación de la elipse que satisface las condiciones dadas.

15. Vértices $V(\pm 8, 0)$, focos $F(\pm 5, 0)$.
16. Vértices $V(0, \pm 7)$, focos $F(0, \pm 2)$.
17. Vértices $V(0, \pm 5)$, longitud del eje menor 3.

18. Focos $F(\pm 3, 0)$, longitud del eje menor 2.

19. Vértices $V(0, \pm 6)$, pasa por $(3, 2)$.

20. Centro en el origen, simétrica con respecto a ambos ejes y pasa por $A(2, 3)$ y $B(6, 1)$.

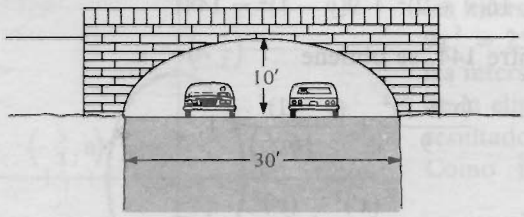
En los Ejercicios 21 y 22 encuentre los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones dadas. Trace ambas gráficas tomando los mismos ejes coordenados y muestre los puntos de intersección.

21. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 20 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 36 \\ x^2 + y^2 = 12 \end{cases}$

23. El arco de un puente es semielíptico, con eje mayor horizontal. La base del arco tiene 30 pie de longitud y su parte más alta con respecto al suelo mide 10 pie (véase la figura). Determine la altura del arco a 6 pie del centro de la base.

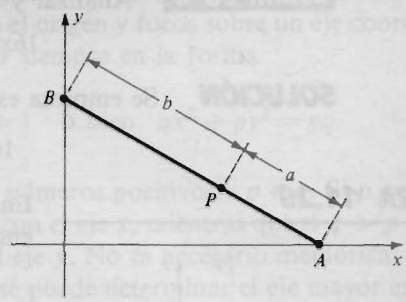
FIGURA PARA EL EJERCICIO 23



24. La **excentricidad** de una elipse se define como la razón $(\sqrt{a^2 - b^2})/a$. Si el valor de a es fijo y el de b varía, describa la forma general de la elipse cuando la excentricidad es cercana a 1 y cuando su valor es próximo a cero.

25. Un segmento de recta de longitud $a + b$ se mueve con sus extremos A y B fijos a los ejes coordenados, como se ilustra en la figura. Muestre que si $a \neq b$, entonces el punto P describe una elipse.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 25

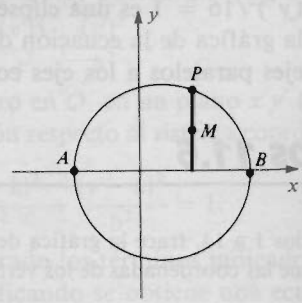


26. Considere la elipse $px^2 + qy^2 = pq$, en la que $p > 0$ y $q > 0$. Demuestre que si m es un número real, existen exactamente dos rectas de pendiente m que cortan a la elipse precisamente en un punto, y que las ecuaciones de estas rectas son $y = mx \pm \sqrt{p + qm^2}$.

27. Un cuadrado, cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados está inscrito en la elipse cuya ecuación es $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$. Exprese el área A del cuadrado en términos de a y b.

28. Desde un punto P sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, se traza un segmento de recta perpendicular al diámetro AB y se determina el punto medio M (véase la figura). Obtenga la ecuación de todos esos puntos medios M y trace la gráfica.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 28



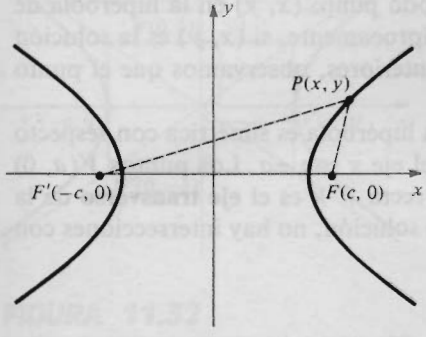
11.7 Hipérbolas

La definición de la hipérbola es similar a la de la elipse. La única diferencia es que en lugar de considerar la *suma* de las distancias a dos puntos fijos, se toma la *diferencia*.

DEFINICIÓN

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos en un plano, tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano (llamados **focos**) es una constante positiva.

FIGURA 11.30



Para obtener una ecuación simple para la hipérbola, elijamos un sistema coordenado con focos en $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ y denotemos a la distancia (constante) por $2a$. Si hacemos referencia a la Figura 11.30, vemos que el punto $P(x, y)$ está sobre la hipérbola si y sólo si se cumple cualquiera de las siguientes igualdades:

$$d(P, F') - d(P, F) = 2a$$

$$d(P, F) - d(P, F') = 2a.$$

En el caso de las hipérbolas (a diferencia de las elipses) debe verificarse que $a < c$ para obtener puntos de la hipérbola que no estén sobre el eje x, pues si P es uno de esos puntos, en la Figura 11.30 vemos que

$$d(P, F) < d(F', F) + d(P, F'),$$

ya que la longitud de un lado del triángulo es siempre menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados. De la misma manera,

$$d(P, F') < d(F', F) + d(P, F).$$

Desigualdades equivalentes a las dos anteriores son

$$d(P, F) - d(P, F') < d(F', F)$$

$$d(P, F') - d(P, F) < d(F', F).$$

Puesto que las diferencias de la izquierda son ambas iguales a $2a$ y el hecho de que $d(F', F) = 2c$, implican que en las últimas desigualdades se cumpla $2a < 2c$, o bien $a < c$.

Las ecuaciones $d(P, F') - d(P, F) = 2a$ y $d(P, F) - d(P, F') = 2a$ se pueden reemplazar por

$$|d(P, F) - d(P, F')| = 2a.$$

por la fórmula de distancia se obtiene ahora la ecuación de la hipérbola:

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a.$$

Empleando el mismo procedimiento de simplificación que para la ecuación de una elipse, llegamos a la ecuación equivalente

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Por simplicidad, consideremos

$$b^2 = c^2 - a^2 \text{ en donde } b > 0$$

en la ecuación anterior, obteniendo así

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hemos demostrado que las coordenadas de todo punto (x, y) en la hipérbola de la Figura 11.30 satisfacen la última ecuación. Recíprocamente, si (x, y) es la solución de tal ecuación, entonces, invirtiendo los pasos anteriores, observamos que el punto (x, y) está sobre la hipérbola.

Mediante las pruebas de simetría vemos que la hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes y al origen. Las intersecciones con el eje x son $\pm a$. Los puntos $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ se llaman **vértices** y el segmento de recta $V'V$ es el **eje transverso** de la hipérbola. Como la ecuación $-y^2/b^2 = 1$ no tiene solución, no hay intersecciones con el eje y.

Lo anterior se resume como sigue:

TEOREMA

La gráfica de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es una hipérbola con vértices $(\pm a, 0)$. Los focos son $(\pm c, 0)$, en donde $c^2 = a^2 + b^2$.

Si en la ecuación $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ despejamos y, obtenemos

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

De aquí que no existan puntos (x, y) sobre la gráfica cuando $x^2 - a^2 < 0$, es decir, cuando $-a < x < a$. Sin embargo, *hay* puntos $P(x, y)$ sobre la gráfica si $x \geq a$ o bien $x \leq -a$. Si $x \geq a$, podemos escribir la última ecuación en la forma

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)} = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

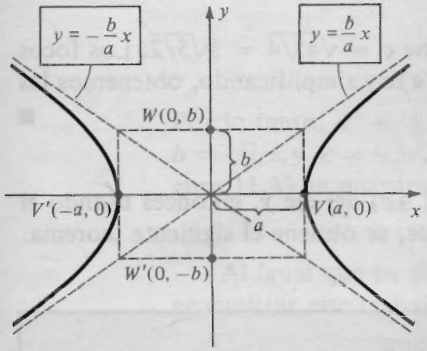
De donde se deduce que si x toma un valor grande (en comparación con a), el radicando es cercano a 1, y entonces la ordenada y del punto $P(x, y)$ sobre la hipérbola está próxima a $(b/a)x$ o bien a $-(b/a)x$. Esto significa que el punto $P(x, y)$ está cerca de la recta cuya ecuación es $y = (b/a)x$ cuando y es positiva, o cerca de la recta $y = -(b/a)x$ cuando y es negativa. A medida que x crece, decimos que el punto $P(x, y)$ se *aproxima* a una de estas rectas. Existe una situación similar cuando $x \leq -a$. Las rectas con ecuaciones

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

se llaman **asíntotas** de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$.

FIGURA 11.31

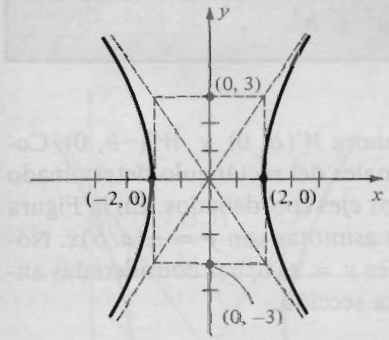
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Las asíntotas son una excelente guía para trazar la gráfica. Una forma sencilla de trazar las asíntotas consiste en representar primero los vértices $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ y los puntos $W(0, b)$ y $W'(0, -b)$ (véase la Figura 11.31). El segmento $W'W$ de longitud $2b$ se llama **eje conjugado** de la hipérbola. Si se trazan líneas horizontales y verticales por los puntos extremos de los ejes conjugado y transverso, respectivamente, entonces las diagonales del rectángulo resultante tienen pendientes b/a y $-b/a$. En consecuencia, al prolongar estas diagonales obtenemos las asíntotas $y = (\pm b/a)x$. Usando tales rectas como guía se traza la gráfica como se muestra en la Figura 11.31. Las dos curvas que constituyen la hipérbola se llaman **ramas** de esta curva.

FIGURA 11.32

$9x^2 - 4y^2 = 36$



EJEMPLO 1 Analizar y trazar la gráfica de la ecuación

$$9x^2 - 4y^2 = 36.$$

SOLUCIÓN Dividiendo ambos lados entre 36, tenemos

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

que está en la forma canónica establecida en el teorema con $a^2 = 4$ y $b^2 = 9$; es decir, $a = 2$ y $b = 3$. Los vértices $(\pm 2, 0)$ y los puntos extremos $(0, \pm 3)$ del eje conjugado determinan un rectángulo, cuyas diagonales (prolongadas) dan las asíntotas. En la Figura 11.32 se tiene la gráfica de la ecuación. La gráfica, o las ecuaciones $y = \pm(b/a)x$ permiten encontrar las ecuaciones de las asíntotas: $y = \pm \frac{3}{2}x$. Como $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$, los focos son $(\pm\sqrt{13}, 0)$.

El ejemplo anterior muestra que para las hipérbolas no siempre se cumple que $a < b$, como en el caso de las elipses se puede tener $a < b$, $a > b$ o bien $a = b$.

EJEMPLO 2 Determinar la ecuación, los focos y las asíntotas de la hipérbola con vértices $(\pm 3, 0)$ que pasa por el punto $P(5, 2)$.

SOLUCIÓN Sustituyendo $a = 3$ en $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$, obtenemos

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si el punto $(5, 2)$ satisface esta ecuación, entonces

$$\frac{25}{9} - \frac{4}{b^2} = 1.$$

Despejando obtenemos $b^2 = \frac{9}{4}$, y por lo tanto la ecuación que deseamos encontrar es

$$\frac{x^2}{9} - \frac{4y^2}{9} = 1,$$

que equivale a $x^2 - 4y^2 = 9$

Siendo $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4}$, se tiene $c = \sqrt{45/4} = 3\sqrt{5/2}$. Los focos son $(\pm \frac{3}{2}\sqrt{5}, 0)$. Reemplazando b y a en $y = \pm(b/a)x$ y simplificando, obtenemos las ecuaciones de las asíntotas $y = \pm \frac{1}{2}x$. ■

Si los focos de la hipérbola son los puntos $(0, \pm c)$ del eje y, entonces usando el mismo tipo de argumento que se usó anteriormente, se obtiene el siguiente teorema.

TEOREMA

La gráfica de la ecuación

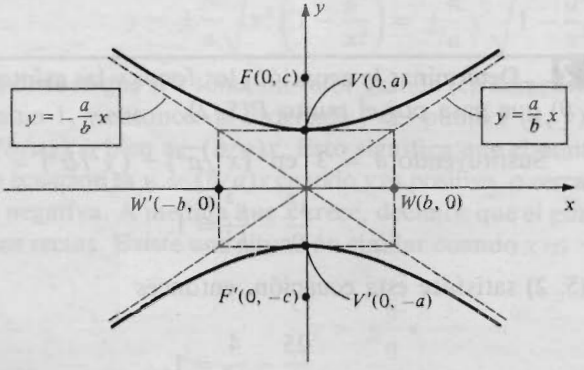
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

es una hipérbola con vértices $(0, \pm a)$. Los focos son $(0, \pm c)$ en donde $c^2 = a^2 + b^2$.

Los puntos extremos de los ejes conjugados son ahora $W(b, 0)$ y $W'(-b, 0)$. Como antes, las asíntotas se obtienen usando las diagonales del rectángulo determinado por estos puntos, los vértices y las rectas paralelas a los ejes coordenados. En la Figura 11.33 hemos trazado la gráfica. Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm(a/b)x$. Nótese la diferencia entre estas ecuaciones y las ecuaciones $y = \pm(b/a)x$ consideradas anteriormente para las asíntotas de la hipérbola en esta sección.

FIGURA 11.33

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$



EJEMPLO 3 Analizar y trazar la gráfica de la ecuación

$$4y^2 - 2x^2 = 1.$$

SOLUCIÓN La forma en el último teorema se obtuvo escribiendo la ecuación

$$\frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Por lo tanto, $a^2 = \frac{1}{4}$, $b^2 = \frac{1}{2}$ y $c^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. En consecuencia, $a = \frac{1}{2}$, $b = \sqrt{2}/2$, y $c = \sqrt{3}/2$. Los vértices son $(0, \pm\frac{1}{2})$ y los focos son $(0, \pm\sqrt{3}/2)$. En la Figura 11.33 se muestra la gráfica. ■

Al igual que en el caso de las elipses, pueden usarse las traslaciones de ejes para generalizar este trabajo. En el siguiente ejemplo se ilustra esta técnica.

EJEMPLO 4 Discutir y trazar la gráfica de la ecuación

$$9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 29 = 0.$$

SOLUCIÓN Se ordena el trabajo de la siguiente manera:

$$9(x^2 - 6x) - 4(y^2 + 4y) = -29$$

$$9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 + 4y + 4) = -29 + 81 - 16$$

$$9(x - 3)^2 - 4(y + 2)^2 = 36$$

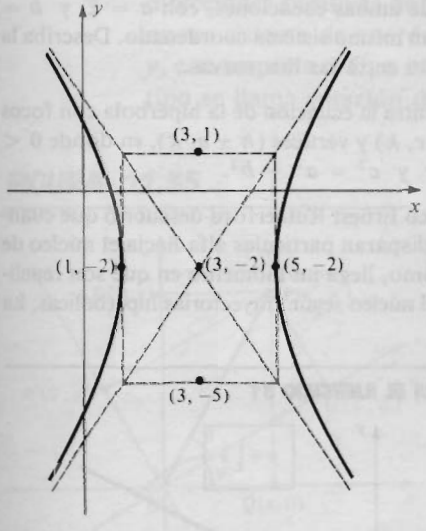
$$\frac{(x - 3)^2}{4} - \frac{(y + 2)^2}{9} = 1,$$

que es de la forma $\dfrac{(x')^2}{4} - \dfrac{(y')^2}{9} = 1$

con $x' = x - 3$ y $y' = y + 2$. Trasladando los ejes x y y al nuevo origen $C(3, -2)$, se obtiene el trazo que se muestra en la Figura 11.34. ■

FIGURA 11.34

$\dfrac{(x - 3)^2}{4} - \dfrac{(y + 2)^2}{9} = 1$



Los resultados de las últimas tres secciones indican que la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una cónica, excepto en algunos casos degradados (o degenerados) en los que se obtienen puntos, rectas o ninguna gráfica. Aunque se han considerado ejemplos especiales, los métodos son perfectamente generales. Si A y C son iguales y diferentes de cero, entonces la gráfica, cuando existe, es una circunferencia o, en casos excepcionales, un punto. Si A y C no son iguales, pero tienen el mismo signo, entonces, completando cuadrados y trasladando los ejes apropiadamente se obtiene una ecuación cuya gráfica, cuando existe, es una elipse (o un punto). Si A y C son de signo contrario, se obtiene una ecuación de una hipérbola,

o posiblemente, en el caso de degradación, dos rectas que se cortan. Por último, si A o C (pero no ambas) es cero, la gráfica es una parábola, o bien, en ciertos casos, un par de rectas paralelas.

Ejercicios 11.7

En los Ejercicios 1 a 18, trace la gráfica de la ecuación, encuentre las coordenadas de los vértices y de los focos y las ecuaciones de las asíntotas.

1. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$
2. $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{16} = 1$
3. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$
4. $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$
5. $y^2 - 4x^2 = 16$
6. $x^2 - 2y^2 = 8$
7. $x^2 - y^2 = 1$
8. $y^2 - 16x^2 = 1$
9. $x^2 - 5y^2 = 25$
10. $4y^2 - 4x^2 = 1$
11. $3x^2 - y^2 = -3$
12. $16x^2 - 36y^2 = 1$
13. $25x^2 - 16y^2 + 250x + 32y + 109 = 0$
14. $y^2 - 4x^2 - 12y - 16x + 16 = 0$
15. $4y^2 - x^2 + 40y - 4x + 60 = 0$
16. $25x^2 - 9y^2 - 100x - 54y + 10 = 0$
17. $9y^2 - x^2 - 36y + 12x - 36 = 0$
18. $4x^2 - y^2 + 32x - 8y + 49 = 0$

En los Ejercicios 19 a 26, encuentre la ecuación de la hipérbola que satisface las condiciones dadas.

19. Focos $F(0, \pm 4)$, vértices $V(0, \pm 1)$.
20. Focos $F(\pm 8, 0)$, vértices $V(\pm 5, 0)$.
21. Focos $F(\pm 5, 0)$, vértices $V(\pm 3, 0)$.
22. Focos $F(0, \pm 3)$, vértices $V(0, \pm 2)$.
23. Focos $F(0, \pm 5)$, longitud del eje conjugado 4.
24. Vértices $V(\pm 4, 0)$, pasa por $P(8, 2)$.
25. Vértices $V(\pm 3, 0)$, ecuaciones de las asíntotas: $y = \pm 2x$.
26. Focos $F(0, \pm 10)$, ecuaciones de las asíntotas $y = \pm \frac{1}{3}x$.

En los Ejercicios 27 y 28 encuentre los puntos de intersección de las curvas de las ecuaciones dadas y trace sus gráficas en un mismo plano coordenado, mostrando los puntos de intersección.

27. $\begin{cases} y^2 - 4x^2 = 16 \\ y - x = 4 \end{cases}$
28. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y^2 - 3x = 0 \end{cases}$

29. Las representaciones geométricas de las ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

se llaman **hipérbolas conjugadas**. Trace las gráficas de ambas ecuaciones, con $a = 2$ y $b = 5$, en un mismo sistema coordenado. Describa la relación entre las dos curvas.

30. Encuentre la ecuación de la hipérbola con focos $(h \pm c, k)$ y vértices $(h \pm a, k)$, en donde $0 < a < c$ y $c^2 = a^2 + b^2$.

31. El físico Ernest Rutherford descubrió que cuando se disparan partículas alfa hacia el núcleo de un átomo, llega un momento en que son repelidas del núcleo según trayectorias hiperbólicas. La

FIGURA PARA EL EJERCICIO 31

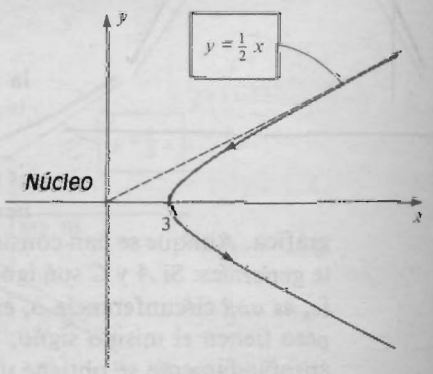
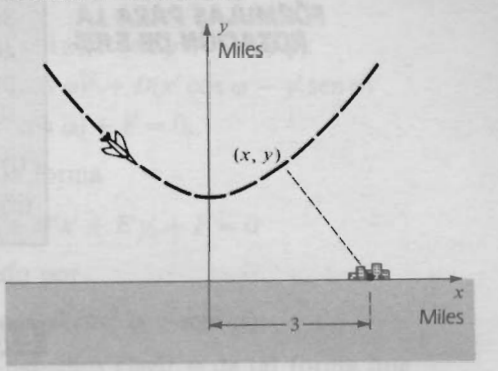


figura muestra la trayectoria de una partícula que se dirige hacia el origen sobre la recta $y = \frac{1}{2}x$ y llega a 3 unidades de distancia respecto del núcleo. Encuentre la ecuación de la trayectoria.

32. Un avión jet de la Fuerza Aérea ejecuta una maniobra a alta velocidad sobre la trayectoria $2y^2 - x^2 = 8$. ¿Qué tanto se aproxima el avión a una ciudad situada en (3, 0)? (*Sugerencia:* Represéntese por S el cuadrado de la distancia de un punto (x, y) sobre la trayectoria al punto (3, 0) y obtenga el valor mínimo de S. ¿Qué es $\sqrt{S}$?

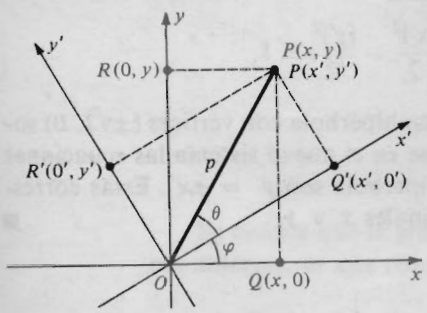
FIGURA PARA EL EJERCICIO 32



11.8 Rotación de ejes

Puede pensarse que el sistema coordenado $x'y'$ usado en una traslación de ejes se obtiene moviendo el origen O del sistema xy a una nueva posición $C(h, k)$, sin cambiar las direcciones positivas de los ejes ni las unidades de longitud. Introduciremos ahora un nuevo sistema de coordenadas manteniendo fijo al origen O y girando los ejes x y y, con respecto a O, a otra posición denotada por x' y y'. Una transformación de este tipo se llama **rotación de ejes.**

FIGURA 11.35



Consideremos una rotación de ejes; como se muestra en la Figura 11.35, denotemos por φ al ángulo de giro que hará coincidir la parte positiva del eje x con el lado positivo del eje x'. Si (x, y) son las coordenadas de un punto P con respecto al plano xy, entonces, como antes, (x', y') serán sus coordenadas en el nuevo sistema coordenado $x'y'$. Denotemos las proyecciones de P sobre los diversos ejes como se indica en la Figura 11.35 y sea, además, θ el ángulo POQ'. Si $p = d(O, P)$, se tiene:

$$x' = p\cos\theta, \qquad y' = p\,\text{sen}\,\theta,$$

$$x = p\cos(\theta + \varphi), \qquad y = p\,\text{sen}(\theta + \varphi).$$

Aplicando las fórmulas del seno y coseno de una suma, obtenemos

$$x = p\cos\theta\cos\varphi - p\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi$$

$$y = p\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi + p\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi.$$

Usando el hecho de que $x' = p\cos\theta$ y $y' = p\,\text{sen}\,\theta$ se obtiene la parte (i) del siguiente teorema. Las fórmulas de la parte (ii) se pueden obtener a partir de (i) despejando x' y y'.

FÓRMULAS PARA LA ROTACIÓN DE EJES

Si se giran los ejes x y y un ángulo φ alrededor del origen O, entonces las coordenadas (x, y) y (x', y') de un punto P en los dos sistemas están relacionadas como sigue:

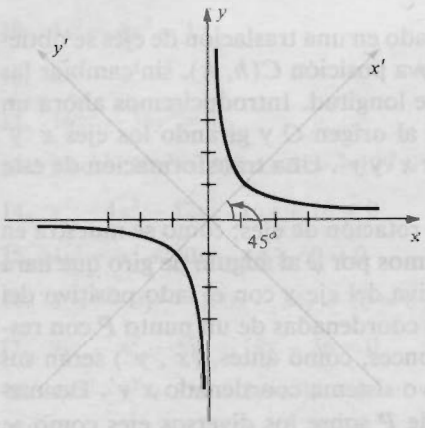
(i) $x = x' \cos\varphi - y' \operatorname{sen}\varphi, \quad y = x' \operatorname{sen}\varphi + y' \cos\varphi$

(ii) $x' = x \cos\varphi + y \operatorname{sen}\varphi, \quad y' = -x \operatorname{sen}\varphi + y \cos\varphi.$

EJEMPLO 1 En la Figura 11.36 se tiene la gráfica de la ecuación $xy = 1$, o equivalentemente, $y = 1/x$. Si se giran 45° los ejes coordenados, encuentre la ecuación de la gráfica en el nuevo sistema coordenado $x'y'$.

FIGURA 11.36

$y = 1/x$



SOLUCIÓN Si hacemos $\varphi = 45°$ en (i) de las fórmulas de rotación de ejes, obtenemos

$$x = x'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x' - y')$$

$$y = x'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x' + y').$$

Sustituyendo estas expresiones de x y y en la ecuación $xy = 1$,

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x' - y')\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x' + y') = 1.$$

Esta ecuación se reduce a

$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1,$$

que es la ecuación de una hipérbola con vértices $(\pm\sqrt{2}, 0)$ sobre el eje x'. Nótese que en el nuevo sistema las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola son $y' = \pm x'$. Estas corresponden a los ejes originales x y y. ■

El Ejemplo 1 ilustra un método que permite eliminar el término que contiene al producto xy en una ecuación. Esta técnica puede usarse para transformar cualquier ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

en donde $b \neq 0$, en una ecuación en x' y y' que no tenga término $x'y'$. A continuación demostraremos que esto siempre se cumple. Si se giran los ejes un ángulo φ, entonces al sustituir las expresiones para x y y en las fórmulas de (i) para la rotación de ejes, obtenemos

$$A(x' \cos \varphi - y' \operatorname{sen} \varphi)^2 + B(x' \cos \varphi - y' \operatorname{sen} \varphi)(x' \operatorname{sen} \varphi + y' \cos \varphi) + C(x' \operatorname{sen} \varphi + y' \cos \varphi)^2 + D(x' \cos \varphi - y' \operatorname{sen} \varphi) + E(x' \operatorname{sen} \varphi + y' \cos \varphi) + F = 0.$$

Esta última expresión puede escribirse en la forma

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F = 0$$

en donde el coeficiente B' de $x'y'$ está dado por

$$B' = 2(C - A) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + B(\cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi).$$

Con el objeto de eliminar al término $x'y'$ debemos elegir φ de tal forma que

$$2(C - A) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + B(\cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi) = 0.$$

Las fórmulas del seno y el coseno del ángulo doble, permiten escribir la última ecuación como

$$(C - A) \operatorname{sen} 2\varphi + B \cos 2\varphi = 0,$$

que equivale a

$$\cot 2\varphi = \frac{A - C}{B}.$$

Esto comprueba el siguiente resultado.

TEOREMA

Para eliminar el término xy de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

en donde $B \neq 0$, elíjase un ángulo φ tal que

$$\cot 2\varphi = \frac{A - C}{B}$$

y se utilizan luego las fórmulas de rotación de ejes.

Se deduce que la gráfica de una ecuación en x y y del tipo mencionado en el teorema anterior, es una cónica, excepto en ciertos casos de degradación (o degenerados).

EJEMPLO 1 Analizar y trazar la gráfica de la ecuación

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 - 25 = 0.$$

SOLUCIÓN Aplicando la notación del teorema anterior tenemos que

$$A = 41, \quad B = -24, \quad C = 34,$$

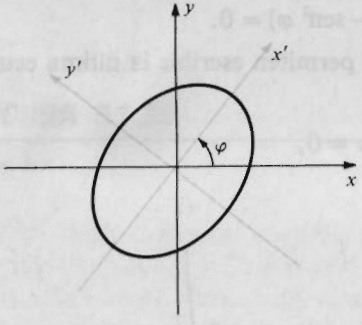
y
$$\cot 2\varphi = \frac{41 - 34}{-24} = -\frac{7}{24}.$$

Como $\cot 2\varphi$ es negativo podemos escoger a 2φ de manera que $90° < 2\varphi < 180°$ y, en consecuencia, $\cos 2\varphi = -\frac{7}{25}$ (¿Por qué?). Ahora usamos las fórmulas del semiángulo y obtenemos

$$\operatorname{sen} \varphi = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (-\frac{7}{25})}{2}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (-\frac{7}{25})}{2}} = \frac{3}{5}.$$

FIGURA 11.37



De aquí deducimos que las fórmulas deseadas para la rotación de ejes son

$$x = \tfrac{3}{5}x' - \tfrac{4}{5}y', \qquad y = \tfrac{4}{5}x' + \tfrac{3}{5}y'.$$

El lector demostrará que sustituyendo estos valores de x y y en la ecuación dada y simplificando, se obtiene la ecuación

$$(x')^2 + 2(y')^2 = 1.$$

Por lo tanto, la gráfica es una elipse con vértice en $(\pm 1, 0)$ sobre el eje x'. Como $\tan \varphi = \operatorname{sen} \varphi / \cos \varphi = (\frac{4}{5}) / (\frac{3}{5}) = \frac{4}{3}$, obtenemos $\varphi = \tan^{-1}(\frac{4}{3})$. Con aproximación al minuto, $\varphi \approx 53°8'$. En la Figura 11.37 se presenta la gráfica. ■

En algunos casos, después de eliminar el término xy, la ecuación resultante contendrá un término en x' o en y'. Es necesario entonces trasladar los ejes del sistema coordenado $x'y'$ para obtener la gráfica. En los siguientes ejercicios se tienen varios problemas de este tipo.

Ejercicios 11.8

En los Ejercicios 1 a 14, después de realizar una rotación de ejes adecuada, describa y trace la gráfica de cada una de las ecuaciones dadas.

1. $32x^2 - 72xy + 53y^2 = 80$
2. $7x^2 - 48xy - 7y^2 = 225$
3. $11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 = 4$
4. $x^2 - xy + y^2 = 3$
5. $5x^2 - 8xy + 5y^2 = 9$
6. $11x^2 - 10\sqrt{3}xy + y^2 = 20$
7. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y + 100 = 0$
8. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 8\sqrt{3}x - 8y + 32 = 0$
9. $5x^2 + 6\sqrt{3}xy - y^2 + 8x - 8\sqrt{3}y - 12 = 0$
10. $18x^2 - 48xy + 82y^2 + 6\sqrt{10}x + 2\sqrt{10}y - 80 = 0$
11. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 6\sqrt{5}x - 18\sqrt{5}y + 45 = 0$
12. $15x^2 + 20xy - 4\sqrt{5}x + 8\sqrt{5}y - 100 = 0$
13. $40x^2 - 36xy + 25y^2 - 8\sqrt{13}x - 12\sqrt{13}y = 0$
14. $64x^2 - 240xy + 225y^2 + 1020x - 544y = 0$
15. Demuestre que, excepto en casos de degeneración, la gráfica de la ecuación cuadrática en x y y es

(a) una parábola si $B^2 - 4AC = 0$.
(b) una elipse si $B^2 - 4AC < 0$.
(c) una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$.

16. Use los resultados del Ejercicio 15 para determinar la naturaleza de las gráficas de los Ejercicios 1 a 14.

17. Las matrices X, X' y A se definen por

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

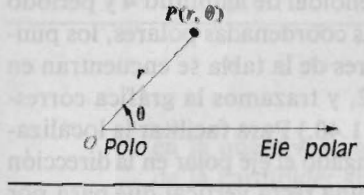
Demuestre que las fórmulas para la rotación de ejes se pueden escribir como

(i) $X = AX'$, (ii) $X' = A^{-1}X$.

11.9 Coordenadas polares

En un sistema coordenado rectangular el par (a, b) denota el punto cuyas distancias dirigidas a los ejes x y y son b y a, respectivamente. Otro método para representar los puntos de un plano es por medio de las *coordenadas polares*. Se toma un punto fijo O (llamado **polo**) y una semirrecta dirigida (llamada **eje polar**) cuyo punto inicial es O. Consideremos ahora un punto P en el plano, diferente de O. Si, como se ilustra en la Figura 11.38, $r = d(O, P)$ y θ denota el ángulo determinado por el eje polar y OP, entonces r y θ se llaman **coordenadas polares** de P y los símbolos (r, θ) o bien $P(r, \theta)$ se usan para denotar a P. Como de costumbre, θ es positivo si el ángulo se genera mediante una rotación del eje polar en sentido opuesto al del reloj, y negativo si la rotación es en el sentido del reloj. Pueden usarse radianes o grados para medir θ.

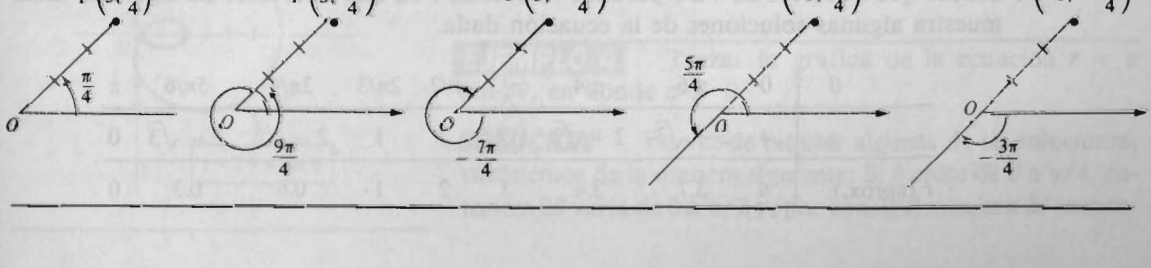
FIGURA 11.38



Las coordenadas polares de un punto no son únicas. Por ejemplo, $(3, \pi/4)$, $(3, 9\pi/4)$ y $(3, -7\pi/4)$ representan el mismo punto (véase la Figura 11.39). Puede considerarse a r negativo también y en vez de medir $|r|$ unidades a lo largo de la semirrecta determinada por θ, se toman $|r|$ unidades a lo largo de la semirrecta que comienza en O y cuya dirección es *opuesta* a la recta determinada por θ. En la Figura 11.39 se muestran también los puntos determinados por los pares $(-3, 5\pi/4)$ y $(-3, -3\pi/4)$.

Finalmente, se conviene en que el polo O tiene coordenadas polares $(0, \theta)$, *cualquiera* que sea θ. Cuando se asignan pares ordenados de la forma (r, θ) a puntos del plano se tiene un **sistema de coordenadas polares**; el plano se denomina **plano** $r\theta$.

FIGURA 11.39



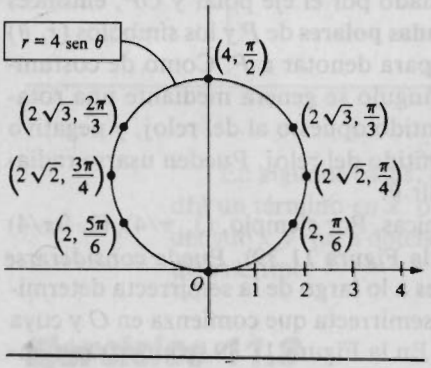
De manera análoga a las ecuaciones en x y y, consideraremos ahora **ecuaciones polares**, es decir, ecuaciones en r y θ. Una **solución** de una ecuación de este tipo es el par ordenado (a, b), tal que al sustituir en la ecuación r por a y θ por b, se obtiene una igualdad. La **gráfica** de una ecuación polar es el conjunto de todos los puntos (en el plano $r\theta$) que corresponden a las soluciones.

EJEMPLO 1 Trazar la gráfica de la ecuación polar $r = 4 \operatorname{sen} \theta$.

SOLUCIÓN En la siguiente tabla se muestran algunas soluciones de la ecuación. Como una ayuda para localizar puntos, se ha incluido un tercer renglón en la tabla que da aproximaciones.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r	0	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	2	0
r (aprox.)	0	2	2.8	3.4	4	3.4	2.8	2	0

FIGURA 11.40



En coordenadas rectangulares, la gráfica de la ecuación dada corresponde a una onda senoidal de amplitud 4 y periodo 2π. Sin embargo, si se usan las coordenadas polares, los puntos correspondientes a los pares de la tabla se encuentran en una circunferencia de radio 2, y trazamos la gráfica correspondiente. (Véase la Figura 11.40.) Para facilitar la localización de los puntos se ha prolongado el eje polar en la dirección negativa y se ha introducido una recta vertical que pasa por el polo.

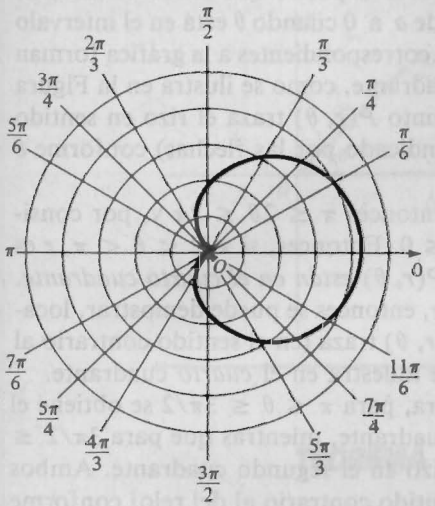
En el Ejemplo 5 demostraremos que la gráfica $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ es una circunferencia. Los puntos adicionales que se obtienen cuando θ toma valores entre π y 2π, se encuentran sobre la misma curva. Por ejemplo, la solución $(-2, 7\pi/6)$ da el mismo punto que $(2, \pi/6)$; el punto correspondiente a $(-2\sqrt{2}, 5\pi/4)$ es el mismo que el que se obtiene con $(2\sqrt{2}, \pi/4)$; etcétera. Si θ toma todos los valores de los números reales, obtenemos los mismos puntos una y otra vez debido a la periodicidad de la función seno. ■

EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de la ecuación $r = 2 + 2 \cos \theta$.

SOLUCIÓN Como la función coseno decrece de 1 a -1 cuando θ varía de 0 a π, se deduce que r decrece de 4 a 0 para los valores de θ en este intervalo. La siguiente tabla muestra algunas soluciones de la ecuación dada.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r	4	$2+\sqrt{3}$	$2+\sqrt{2}$	3	2	1	$2-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{3}$	0
r (aprox.)	4	3.7	3.4	3	2	1	0.6	0.3	0

FIGURA 11.41



Localizando puntos se obtiene la mitad superior de la gráfica mostrada en la Figura 11.41, en la que se ha usado papel para graficación en coordenadas polares, la cual presenta rectas que parten de O a distintos ángulos, y circunferencias concéntricas con centro en el polo.

Si θ toma valores de π a 2π, $\cos\theta$ crece de -1 a 1, y en consecuencia, r aumenta de 0 a 4. Si representamos geométricamente los puntos para $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ se obtiene la mitad inferior de la gráfica.

Se puede obtener la misma gráfica tomando otros intervalos para θ. ■

La gráfica con forma de corazón del Ejemplo 2 se denomina **cardioide**. En general, la gráfica de cualquier ecuación polar de la forma

$$r = a(1 + \cos\theta), \qquad r = a(1 + \operatorname{sen}\theta),$$

$$r = a(1 - \cos\theta), \qquad r = a(1 - \operatorname{sen}\theta),$$

en donde a es un número real, en una cardioide.

La gráfica de una ecuación de la forma

$$r = a + b\cos\theta \quad \text{o bien} \quad r = a + b\operatorname{sen}\theta,$$

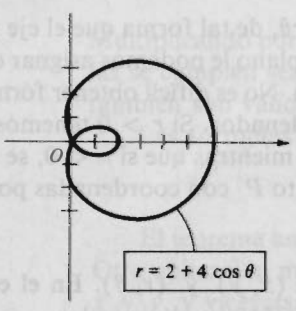
en la que $a \neq b$, se llama **caracol** o **limazón**. La forma de la gráfica es parecida a la de la cardioide; sin embargo, puede tener un lazo o rizo adicional, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de $r = 2 + 4\cos\theta$.

SOLUCIÓN Algunos de los puntos correspondientes $0 \leq \theta \leq \pi$, se indican en la siguiente tabla.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r	6	$2+2\sqrt{3}$	$2+2\sqrt{2}$	4	2	0	$2-2\sqrt{2}$	$2-2\sqrt{3}$	-2
r (aprox.)	6	5.4	4.8	4	2	0	-0.8	-1.4	-2

FIGURA 11.42

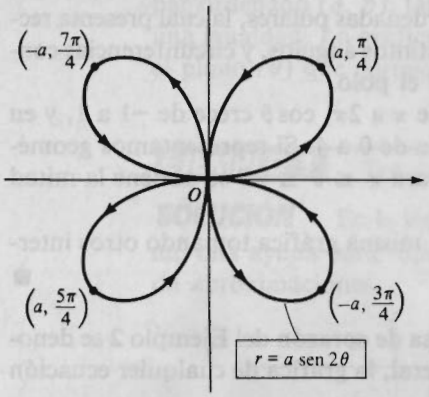


Nótese que $r = 0$ en $\theta = 2\pi/3$. Si $2\pi/3 < \theta \leq \pi$, los valores de r son negativos, y esto lleva a la mitad inferior del rizo pequeño mostrado en la Figura 11.42. (Verificar este hecho.) Dejando que θ varíe de π a 2π se obtiene la parte superior del rizo pequeño y la mitad inferior del rizo grande. ■

EJEMPLO 4 Trazar la gráfica de la ecuación $r = a\operatorname{sen}2\theta$, en donde $a > 0$.

SOLUCIÓN En vez de tabular algunas de las soluciones, razonemos de la manera siguiente: Si θ crece de 0 a $\pi/4$, entonces 2θ varía de 0 a $\pi/2$ y, por consiguiente, sen 2θ aumen-

FIGURA 11.43



ta de 0 a 1. Se deduce que r aumenta de 0 a a cuando θ está en el intervalo $[0, \pi/4]$. Si ahora θ crece de $\pi/4$ a $\pi/2$, entonces 2θ cambia de $\pi/2$ a π por lo que $\operatorname{sen} 2\theta$ decrece de 1 a 0. Así, r disminuye de a a 0 cuando θ está en el intervalo $[\pi/4, \pi/2]$. Los puntos correspondientes a la gráfica forman un lazo en el primer cuadrante, como se ilustra en la Figura 11.43. Nótese que el punto $P(r, \theta)$ traza el rizo en sentido *contrario al del reloj* (indicado por las flechas) conforme θ aumenta de 0 a $\pi/2$.

Si $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, entonces $\pi \leq 2\theta \leq 2\pi$ y, por consiguiente, $r = a \operatorname{sen} 2\theta \leq 0$. Entonces, si $\pi/2 < \theta < \pi$, r es negativo y *los puntos $P(r, \theta)$ están en el cuarto cuadrante.* Si θ aumenta de $\pi/2$ a π, entonces se puede demostrar, localizando puntos, que $P(r, \theta)$ traza (en el sentido contrario al del reloj) el rizo que se muestra en el *cuarto* cuadrante.

De la misma manera, para $\pi \leq \theta \leq 3\pi/2$ se obtiene el lazo o rizo del tercer cuadrante, mientras que para $3\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi$ se obtiene el rizo en el segundo cuadrante. Ambos lazos se trazan en el sentido contrario al del reloj conforme θ aumenta. El lector debe verificar estos hechos graficando algunos puntos con, por ejemplo, $a = 1$. En la Figura 11.43 se han localizado sólo aquellos puntos que corresponden a los mayores valores numéricos de r. ■

La gráfica del Ejemplo 4 se denomina **rosa de cuatro pétalos** (o **folios**). En general, cualquier ecuación de la forma

$$r = a \operatorname{sen} n\theta \quad \text{o bien} \quad r = a \cos n\theta,$$

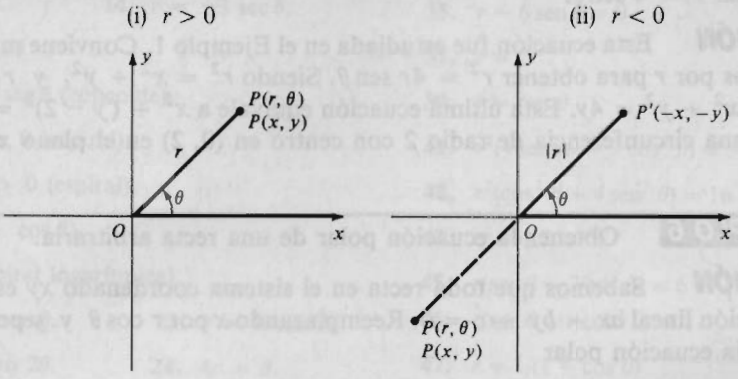
en donde n es un entero positivo mayor que 1 y a es un número real, tiene una gráfica que consiste en un cierto número de rizos unidos al origen. Si n es par hay $2n$ rizos, mientras que si n es impar, hay n lazos. (Véanse, por ejemplo, los Ejercicios 9, 10 y 22.)

Se obtienen muchas otras gráficas interesantes a partir de las ecuaciones polares. Algunas de ellas se incluyen en los ejercicios al final de esta sección. Las coordenadas polares son muy útiles en las aplicaciones donde se tienen circunferencias con centro en el polo o rectas que pasan por el polo, ya que las ecuaciones que tienen estas gráficas son muy sencillas en forma polar; $r = k$ o bien $\theta = k$, siendo k una constante. (Verifíquese lo anterior.)

Vamos ahora a sobreponer un plano xy a un plano $r\theta$, de tal forma que el eje positivo x coincida con el eje polar. A cualquier punto P del plano le podemos asignar coordenadas rectangulares (x, y) o coordenadas polares (r, θ). No es difícil obtener fórmulas que especifiquen la relación entre los dos sistemas coordenados. Si $r > 0$ tenemos una situación similar a la ilustrada en (i) de la Figura 11.44, mientras que si $r < 0$, se tiene el caso ilustrado en (ii) de la figura, se ha situado el punto P' con coordenadas polares $(|r|, \theta)$ y coordenadas rectangulares $(-x, -y)$.

El siguiente teorema especifica las relaciones entre (x, y) y (r, θ). En el enunciado del teorema se supone que el eje x positivo coincide con el eje polar.

FIGURA 11.44



TEOREMA

Las coordenadas rectangulares (x, y) y las coordenadas polares (r, θ) de un punto P están relacionadas como sigue:

(i) $x = r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta$

(ii) $\tan\theta = \dfrac{y}{x}, \quad r^2 = x^2 + y^2.$

DEMOSTRACIÓN Aunque se ha representado θ como un ángulo agudo en la Figura 11.44, la siguiente discusión es válida para todos los ángulos. Por otra parte, si $r > 0$, como en la Figura 11.44(i), entonces $\cos\theta = x/r$, $\text{sen}\,\theta = y/r$, y por lo tanto,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta.$$

Por otra parte, si $r < 0$, la Figura 11.44(ii) y el hecho de que $|r| = -r$, muestran que

$$\cos\theta = \frac{-x}{|r|} = \frac{-x}{-r} = \frac{x}{r},$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{-y}{|r|} = \frac{-y}{-r} = \frac{y}{r}.$$

Multiplicando por r obtenemos $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$; por consiguiente estas fórmulas se cumplen sea r positiva o negativa. Si $r = 0$, el punto se encuentra en el polo y también son válidas las fórmulas en (i).

Las fórmulas en la parte (ii) se siguen directamente de la Figura 11.44. □

El teorema anterior se puede usar para pasar de un sistema de coordenadas a otro. Otra aplicación más importante es transformar una ecuación polar a una ecuación en x y y, y viceversa, como se ilustra en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 5 Hallar una ecuación en x y y que tenga la misma gráfica que la ecuación polar $r = 4 \operatorname{sen}\theta$.

SOLUCIÓN Esta ecuación fue estudiada en el Ejemplo 1. Conviene multiplicar ambos lados por r para obtener $r^2 = 4r \operatorname{sen}\theta$. Siendo $r^2 = x^2 + y^2$, y $r \operatorname{sen}\theta = y$, se obtiene $x^2 + y^2 = 4y$. Esta última ecuación equivale a $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, cuya gráfica es una circunferencia de radio 2 con centro en (0, 2) en el plano xy. ■

EJEMPLO 6 Obtener la ecuación polar de una recta arbitraria.

SOLUCIÓN Sabemos que toda recta en el sistema coordenado xy es la gráfica de la ecuación lineal $ax + by + c = 0$. Reemplazando x por $r\cos\theta$ y y por $r \operatorname{sen}\theta$ obtenemos la ecuación polar

$$ar\cos\theta + br\operatorname{sen}\theta + c = 0$$

o sea

$$r(a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta) + c = 0.$$ ■

Si se sobrepone un plano xy a un plano $r\theta$, entonces la gráfica de una ecuación polar puede ser simétrica con respecto al eje x, al eje y, o al origen. El lector demostrará que si una de las sustituciones indicadas en la siguiente tabla no cambia las soluciones de la ecuación polar, entonces la gráfica tiene la simetría indicada.

PRUEBAS DE SIMETRÍA

Sustitución	*Simetría con respecto a*
$-\theta$ en lugar de θ	la recta $\theta = 0$ (eje x)
$-r$ en lugar de r	el polo (origen)
$\pi + \theta$ en lugar de θ	el polo (origen)
$\pi - \theta$ en lugar de θ	la recta $\theta = \pi/2$ (eje y)

Por ejemplo: siendo $\cos(-\theta) = \cos\theta$, la gráfica de la ecuación del Ejemplo 2 es simétrica con respecto al eje x. Como $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$, la gráfica del Ejemplo 1 es simétrica con respecto al eje y. La gráfica del Ejemplo 4 es simétrica con respecto a ambos ejes y al origen. Pueden establecerse otros criterios de simetría; sin embargo, los que hemos señalado son los más sencillos de aplicar.

Ejercicios 11.9

Trace la gráfica de cada una de las ecuaciones dadas en los Ejercicios 1 a 24.

1. $r = 5$
2. $\theta = \pi/4$
3. $\theta = -\pi/6$
4. $r = -2$
5. $r = 4\cos\theta$
6. $r = -2\operatorname{sen}\theta$
7. $r = 4(1 - \operatorname{sen}\theta)$
8. $r = 1 + 2\cos\theta$
9. $r = 8\cos 3\theta$
10. $r = 2\operatorname{sen} 4\theta$
11. $r^2 = 4\cos 2\theta$ (lemniscato)

12. $r = 6 \operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\theta)$

13. $r = 4 \csc\theta$. **14.** $r = -3 \sec\theta$.

15. $r = 2 - \cos\theta$

16. $r = 2 + 2\sec\theta$ (concoide).

17. $r = 2^\theta$, $\theta \geq 0$ (espiral).

18. $r\theta = 1$, $\theta > 0$ (espiral).

19. $r = -6(1 + \cos\theta)$.

20. $r = e^{2\theta}$ (espiral logarítmica).

21. $r = 2 + 4\operatorname{sen}\theta$. **22.** $r = 8\cos 5\theta$.

23. $r^2 = -16\operatorname{sen} 2\theta$. **24.** $4r = \theta$.

En los Ejercicios 25 a 32 encuentre la ecuación polar que tenga la misma gráfica de la ecuación dada.

25. $x = -3$ **26.** $y = 2$

27. $x^2 + y^2 = 16$ **28.** $x^2 = 8y$

29. $y = 6$ **30.** $y = 6x$

31. $x^2 - y^2 = 16$ **32.** $9x^2 + 4y^2 = 36$

En los Ejercicios 33 a 48 encuentre una ecuación en x y y que tenga la misma gráfica de la ecuación polar dada y úsela como ayuda para trazar la gráfica en un sistema ordenado polar.

33. $r\cos\theta = 5$ **34.** $r\operatorname{sen}\theta = -2$

35. $r - 6\operatorname{sen}\theta = 0$ **36.** $r = 6\cot\theta$

37. $r = 2$ **38.** $\theta = \pi/4$

39. $r = \tan\theta$ **40.** $r = 4\sec\theta$

41. $r^2(4\operatorname{sen}^2\theta - 9\cos^2\theta) = 36$

42. $r^2(\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta) = 16$

43. $r^2\cos 2\theta = 1$ **44.** $r^2\operatorname{sen} 2\theta = 4$

45. $r(\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta) = 6$

46. $r(\operatorname{sen}\theta + r\cos^2\theta) = 1$

47. $r = 1/(1 + \cos\theta)$ **48.** $r = 4/(2 + \operatorname{sen}\theta)$

49. Si $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ son puntos del plano $r\theta$, use la ley de los cosenos para probar que

$$[d(P_1, P_2)]^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1).$$

50. Demuestre que las gráficas de las siguientes ecuaciones polares son circunferencias y determine en cada caso el centro y el radio.

(a) $r = a\operatorname{sen}\theta$, $a \neq 0$

(b) $r = b\cos\theta$, $b \neq 0$

(c) $r = a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta$, $ab \neq 0$

11.10 Ecuaciones polares de las cónicas

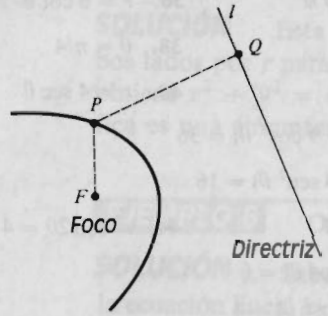
El siguiente teorema proporciona otro método para describir las secciones cónicas.

TEOREMA

Sean F un punto fijo y l una recta fija en un plano. El conjunto de todos los puntos P del plano tales que la razón $d(P, F)/d(P, Q)$ es una constante positiva e, en donde $d(P, Q)$ es la distancia de P a l, es una sección cónica. La cónica será una parábola si $e = 1$, una elipse si $0 < e < 1$, o una hipérbola si $e > 1$.

La constante e se llama **excentricidad** de la cónica. Veremos que el punto F es un foco de tal curva. La recta l se llama **directriz**. Una situación común se ilustra en la Figura 11.45, en donde la curva indica la posible posición de P.

FIGURA 11.45



Si $e = 1$, se tiene $d(P, F) = d(P, Q)$ y, por definición, la curva que se obtiene es una parábola con foco F y directriz l.

Supongamos ahora que $0 < e < 1$. Es conveniente utilizar un sistema coordenado polar en el plano con F como polo y con l perpendicular al eje polar en el punto $D(d, 0)$, para $d > 0$. Si $P(r, \theta)$ es un punto del plano tal que $d(P, F)/d(P, Q) = e < 1$, vemos en la Figura 11.46 que P se encuentra a la izquierda de l. Sea C la proyección de P sobre el eje polar. Siendo

$$d(P, F) = r \quad \text{y} \quad d(P, Q) = \overline{FD} - \overline{FC} = d - r\cos\theta,$$

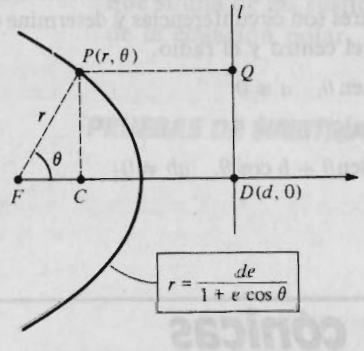
se deduce que P satisface la condición del teorema si y sólo si

$$\frac{r}{d - r\cos\theta} = e$$

o equivalentemente

$$r = de - er\cos\theta.$$

FIGURA 11.46



Al despejar r obtenemos

$$r = \frac{de}{1 + e\cos\theta},$$

esta es una ecuación polar de la gráfica. La misma ecuación se obtiene si $e = 1$; sin embargo, si $e = 1$ y $1 + \cos\theta = 0$, no existe ningún punto (r, θ) sobre la gráfica.

La ecuación rectangular correspondiente a $r = de - er\cos\theta$ es

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = de - ex.$$

Elevando al cuadrado ambos lados y reordenando los términos llegamos a

$$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = d^2e^2.$$

Completando el cuadrado de la ecuación anterior y simplificando,

$$\left(x + \frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2}.$$

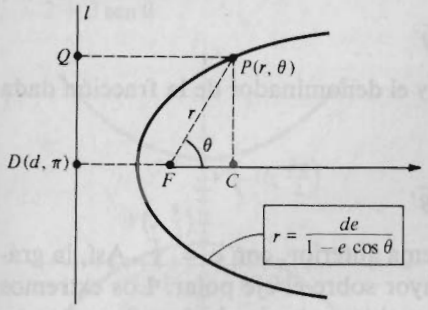
Finalmente, dividiendo ambos lados entre $d^2e^2/(1 - e^2)^2$ se llega a una ecuación de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en la que $h = -de^2/(1 - e^2)$. Por consiguiente, la gráfica es una elipse con centro en el punto $(-de^2/(1 - e^2), 0)$ sobre el eje x y donde

$$a^2 = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2}, \qquad b^2 = \frac{d^2e^2}{1 - e^2}.$$

FIGURA 11.47



Como $c^2 = a^2 - b^2 = \dfrac{d^2e^4}{(1-e^2)^2}$,

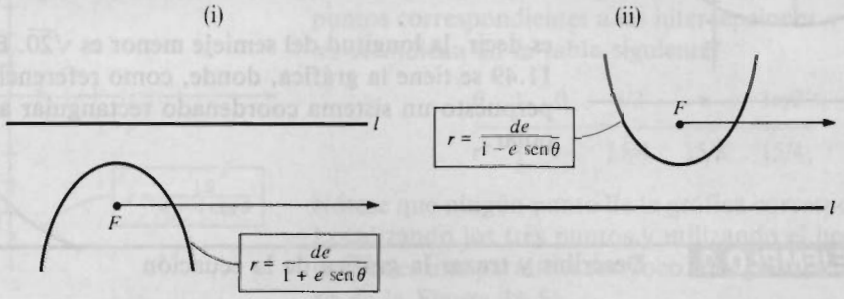
vemos que $c = de^2/(1 - e^2)$. Esto demuestra que F es el foco de la elipse. También se deduce que $e = c/a$. Se puede hacer una demostración similar para el caso en que $e > 1$.

Recíprocamente, puede demostrarse que toda cónica que no es una circunferencia puede describirse por medio de lo enunciado en el teorema. Esto da una formulación de las secciones cónicas que equivale al enfoque anterior. Este teorema, que incluye los tres tipos de cónicas, puede tomarse como definición de las secciones cónicas.

Si se hubiera escogido el foco F a la *derecha* de la directriz, como se ilustra en la Figura 11.47 (para la que $d > 0$), entonces se habría obtenido la ecuación $r = de/(1 - e\cos\theta)$. (Nótese el signo menos en lugar del signo más.) Si d es negativo, ocurre otro cambio de signo.

Si l es *paralela* al eje polar y pasa por el punto $(d, \pi/2)$ o por el $(d, 3\pi/2)$, como se ilustra en la Figura 11.48, entonces las ecuaciones correspondientes contendrán sen θ en lugar de cos θ. El lector deberá demostrar estas propiedades.

FIGURA 11.48



El siguiente teorema es un resumen de lo que se acaba de mencionar.

TEOREMA

Una ecuación polar cuya forma es como una de las siguientes:

$$r = \frac{de}{1 \pm e\cos\theta}, \qquad r = \frac{de}{1 \pm e\,\text{sen}\,\theta}$$

es una sección cónica. La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $0 < e < 1$, o una hipérbola si $e > 1$.

EJEMPLO 1 Describir y trazar la gráfica de la ecuación

$$r = \frac{10}{3 + 2\cos\theta}.$$

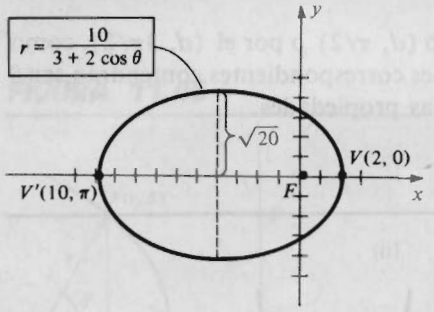
SOLUCIÓN Dividiendo entre 3 el numerador y el denominador de la fracción dada obtenemos

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 + \frac{2}{3}\cos\theta},$$

que tiene una de las formas enunciadas en el teorema anterior, con $e = \frac{2}{3}$. Así, la gráfica es una elipse con foco F en el polo y eje mayor sobre el eje polar. Los extremos del eje mayor se pueden obtener haciendo $\theta = 0$ y $\theta = \pi$; se obtiene así $V(2, 0)$ y $V'(10, \pi)$. De aquí que

$$2a = d(V', V) = 12 \quad \text{o bien} \quad a = 6.$$

FIGURA 11.49



El centro de la elipse es el punto medio del segmento $V'V$, o sea $(4, \pi)$. Siendo $e = c/a$, obtenemos

$$c = ae = 6(\tfrac{2}{3}) = 4.$$

Por consiguiente,

$$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20,$$

es decir, la longitud del semieje menor es $\sqrt{20}$. En la Figura 11.49 se tiene la gráfica, donde, como referencia, se ha superpuesto un sistema coordenado rectangular a un sistema polar. ■

EJEMPLO 2 Describir y trazar la gráfica de la ecuación

$$r = \frac{10}{2 + 3\,\text{sen}\,\theta}.$$

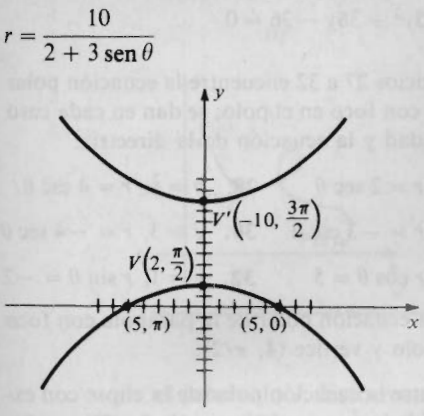
SOLUCIÓN Para expresar la ecuación en la forma conveniente dividimos entre 2 el numerador y el denominador de la fracción dada, obteniendo

$$r = \frac{5}{1 + \frac{3}{2}\,\text{sen}\,\theta}.$$

Así, $e = \frac{3}{2}$ y la gráfica es una hipérbola con foco en el polo. La expresión $\text{sen}\,\theta$ indica que el eje transversal de la hipérbola es perpendicular al eje polar. Para determinar los vértices hacemos a $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$ en la ecuación dada. Esto da los puntos $V(2, \pi/2)$ y $V'(-10, 3\pi/2)$, y por consiguiente,

$$2a = d(V, V') = 8 \quad \text{o bien} \quad a = 4.$$

FIGURA 11.50



Los puntos de la gráfica $(5, 0)$ y $(5, \pi)$ dan una idea aproximada de la rama inferior de la hipérbola; obtenemos la rama superior por simetría, como se ilustra en la Figura 11.50. Si se desean datos adicionales o mayor precisión, podemos calcular

$$c = ae = 4\left(\tfrac{3}{2}\right) = 6$$

y

$$b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20.$$

Las asíntotas se pueden construir en la forma usual. ■

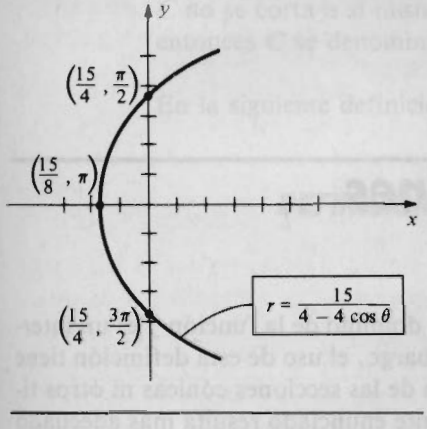
Trazar la gráfica de la ecuación

$$r = \frac{15}{4 - 4\cos\theta}.$$

SOLUCIÓN Para obtener la forma apropiada, se divide entre 4 el numerador y el denominador, obteniendo

$$r = \frac{\frac{15}{4}}{1 - \cos\theta}.$$

FIGURA 11.51



Por consiguiente, $e = 1$ y la gráfica es una parábola con foco en el polo. Se puede aproximar la gráfica localizando los puntos correspondientes a las intercepciones x y y, las cuales se indican en la tabla siguiente:

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
r	—	15/4	15/8	15/4

Nótese que ningún punto de la gráfica corresponde a $\theta = 0$. Localizando los tres puntos y utilizando el hecho de que la gráfica es una parábola con foco en el polo, se obtiene el trazo de la Figura 11.51. ■

Si sólo se desea una idea aproximada de la gráfica de una cónica, el método empleado en el Ejemplo 3 es recomendable. Para usar esta técnica, se localizan (si es posible) los puntos correspondientes a $\theta = 0$, $\pi/2$, π y $3\pi/2$. Estos puntos, junto con el tipo de la cónica (obtenido a partir del valor de e) facilitan el trazo.

Ejercicios 11.10

En los Ejercicios 1 a 10, identifique y trace la gráfica de la ecuación dada.

1. $r = \dfrac{12}{6 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta}$

2. $r = \dfrac{12}{6 - 2\,\mathrm{sen}\,\theta}$

3. $r = \dfrac{12}{2 - 6\cos\theta}$

4. $r = \dfrac{12}{2 + 6\cos\theta}$

5. $r = \dfrac{3}{2 + 2\cos\theta}$

6. $r = \dfrac{3}{2 - 2\,\mathrm{sen}\,\theta}$

7. $r = \dfrac{4}{\cos\theta - 2}$ **8.** $r = \dfrac{4\sec\theta}{2\sec\theta - 1}$

9. $r = \dfrac{6\csc\theta}{2\csc\theta + 3}$

10. $r = \csc\theta(\csc\theta - \cot\theta)$

11.-20. Encuentre la ecuación cartesiana rectangular respectiva para cada una las gráficas de los Ejercicios 1 a 10.

En los Ejercicios 21 a 26 exprese la ecuación dada en forma polar, y luego determine su excentricidad y la ecuación de la directriz.

21. $y^2 = 4 - 4x$

22. $x^2 = 1 - 2y$

23. $3y^2 - 16y - x^2 + 16 = 0$

24. $5x^2 + 9y^2 = 32x + 64$

25. $8x^2 + 9y^2 + 4x = 4$

26. $4x^2 - 5y^2 + 36y - 36 = 0$

En los Ejercicios 27 a 32 encuentre la ecuación polar de la cónica con foco en el polo; se dan en cada caso la excentricidad y la ecuación de la directriz.

27. $e = \frac{1}{3}$, $r = 2\sec\theta$ **28.** $e = \frac{2}{5}$, $r = 4\csc\theta$

29. $e = 4$, $r = -3\csc\theta$ **30.** $e = 3$, $r = -4\sec\theta$

31. $e = 1$, $r\cos\theta = 5$ **32.** $e = 1$, $r\sin\theta = -2$

33. Halle la ecuación polar de la parábola con foco en el polo y vértice $(4, \pi/2)$.

34. Encuentre la ecuación polar de la elipse con excentricidad $\frac{2}{3}$, un vértice en $(1, 3\pi/2)$ y un foco en el polo

35. Demuestre el teorema de esta sección para el caso en que $e > 1$.

36. Deduzca las fórmulas $r = de/(1 \pm e\,\text{sen}\,\theta)$ consideradas en esta sección.

11.11 Curvas planas y ecuaciones paramétricas

La gráfica de una ecuación $y = f(x)$, en donde el dominio de la función f es un intervalo I, se llama algunas veces *curva plana*. Sin embargo, el uso de esta definición tiene muchas limitaciones porque no incluye la mayoría de las secciones cónicas ni otros tipos de gráficas que son de gran utilidad. El siguiente enunciado resulta más adecuado en la mayoría de las aplicaciones.

DEFINICIÓN

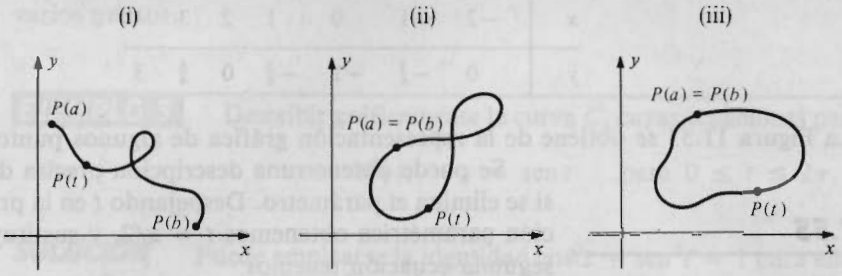
Una **curva plana** es un conjunto C de pares ordenados de la forma

$$(f(t), g(t))$$

en donde f y g son funciones definidas en un intervalo I.

En general, se usa simplemente el término **curva** en vez de curva plana. La **gráfica** de C es el conjunto de todos los puntos $P(t) = (f(t), g(t))$ de un plano coordenado rectangular que corresponde a los pares ordenados. Cada $P(t)$ es un *punto* de la curva. Se usará el término *curva* de modo intercambiable con *gráfica*. Algunas veces resulta conveniente considerar que el punto $P(t)$ recorre la curva C a medida que t varía en

FIGURA 11.52



el intervalo I. Esto resulta especialmente útil en aplicaciones en las que r representa el tiempo; $P(t)$ es entonces la posición de una partícula en movimiento en el instante t.

En la Figura 11.52 se representan algunas gráficas o curvas, para el caso en que I es un intervalo cerrado $[a, b]$. Si, como en (i) de la figura, $P(a) \neq P(b)$, entonces $P(a)$ y $P(b)$ son los **puntos extremos** de C. Nótese que la curva representada en (i) se corta a sí misma; es decir, que dos valores distintos de t dan el mismo punto. Si $P(a) = P(b)$, como se ilustra en (ii), entonces C se llama **curva cerrada**. Si $P(a) = P(b)$, y C no se corta a sí misma en ningún otro punto, como se ilustra en (iii) de la figura, entonces C se denomina **curva cerrada simple**.

En la siguiente definición se da una manera conveniente de representar curvas.

DEFINICIÓN

Sea C la curva que consiste en todas las parejas ordenadas $(f(t), g(t))$, en las que f y g están definidas en un intervalo I. Las ecuaciones

$$x = f(t), \qquad y = g(t),$$

para t en I, se llaman **ecuaciones paramétricas** de C, y t es un **parámetro.**

Si las ecuaciones paramétricas se conocen, entonces a medida que t varía en el intervalo I, el punto $P(x, y)$ recorre la curva. Como se muestra en el siguiente ejemplo algunas veces es posible eliminar el parámetro y obtener una ecuación rectangular para C en la que intervienen las variables x y y.

EJEMPLO 1 Describir y trazar la gráfica de la curva C dada paramétricamente por

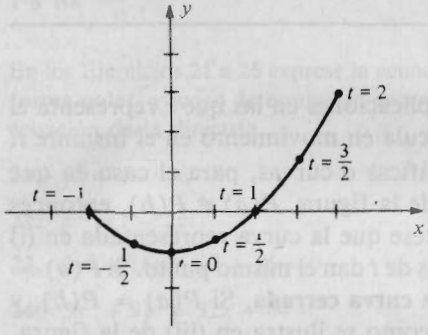
$$x = 2t, \quad y = t^2 - 1 \text{ en donde } -1 \leq t \leq 2.$$

SOLUCIÓN Como se muestra en la siguiente tabla, se pueden usar estas ecuaciones paramétricas para tabular las coordenadas de los puntos $P(x, y)$ de C.

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

La Figura 11.53 se obtiene de la representación gráfica de algunos puntos.

FIGURA 11.53



Se puede obtener una descripción precisa de la gráfica si se elimina el parámetro. Despejando t en la primera ecuación paramétrica obtenemos $t = x/2$, y sustituyendo en la segunda ecuación tenemos

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 \quad \text{o bien} \quad y + 1 = \frac{1}{4}x^2.$$

La gráfica de esta última ecuación es una parábola con eje vertical y vértice en el punto $(0, -1)$. La curva C es la porción de la parábola que se ilustra en la Figura 11.53. ■

Las ecuaciones paramétricas de una curva nunca son únicas. El lector debe comprobar que la curva C de este ejemplo, se obtiene también por cualquiera de las siguientes representaciones paramétricas:

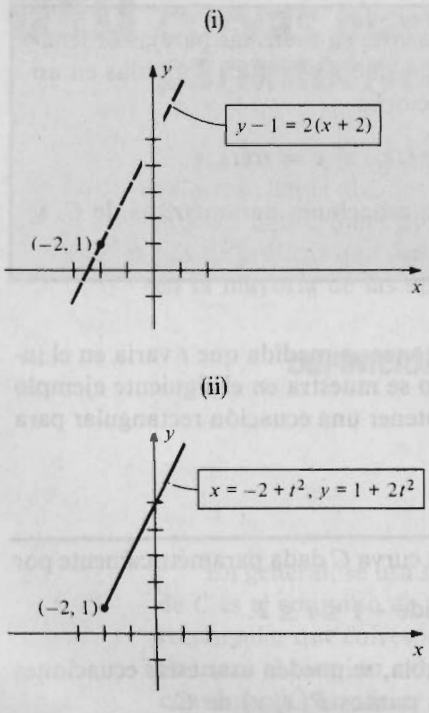
$$x = 2t, \quad y = t^2 - 1; \qquad -1 \le t \le 2$$

$$x = t, \quad y = \tfrac{1}{4}t^2 - 1; \qquad -2 \le t \le 4$$

$$x = t^3, \quad y = \tfrac{1}{4}t^6 - 1; \qquad \sqrt[3]{-2} \le t \le \sqrt[3]{4}.$$

El siguiente ejemplo ilustra el hecho de que es útil a menudo eliminar el parámetro *antes* de localizar los puntos.

FIGURA 11.54



EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de C definida paramétricamente por

$$x = -2 + t^2, \quad y = 1 + 2t^2 \quad \text{para } t \text{ en } \mathbb{R}.$$

SOLUCIÓN Para eliminar el parámetro puede notarse en la primera ecuación que $t^2 = x + 2$. Sustituyendo t^2 en la segunda ecuación se obtiene

$$y = 1 + 2(x + 2) \quad \text{o bien} \quad y - 1 = 2(x + 2).$$

Esta es la ecuación de una recta de pendiente igual a 2, que pasa por el punto $(-2, 1)$, como se muestra con línea punteada en la parte (i) de la Figura 11.54. Sin embargo, puesto que $t^2 \ge 0$,

$$x = -2 + t^2 \ge -2 \quad \text{y} \quad y = 1 + 2t^2 \ge 1.$$

Se deduce que la gráfica de C es la parte de la recta situada a la derecha de $(-2, 1)$, como se ve en la parte (ii) de la figura. Este hecho se puede verificar también localizando varios puntos. ■

EJEMPLO 3 Describir gráficamente la curva C, cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

SOLUCIÓN Puede emplearse la identidad $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ para eliminar el parámetro. De aquí se obtiene $x^2 + y^2 = 1$ y, por lo tanto, los puntos de C están en la circunferencia unitaria con centro en el origen. Conforme t aumenta de 0 a 2π, $P(t)$ parte del punto $A(1, 0)$ y recorre la circunferencia una vez en el sentido contrario al del reloj. En este ejemplo, el parámetro t se puede interpretar geométricamente como el valor en radianes del ángulo θ en la Figura 6.34. ■

Si se describe una curva C mediante una ecuación $y = f(x)$, en la que f es una función, entonces una manera fácil de obtener las ecuaciones paramétricas es hacer

$$x = t, \quad y = f(t)$$

en donde t está en el dominio de f. Por ejemplo, si $y = x^3$, entonces las ecuaciones paramétricas son

$$x = t, \quad y = t^3 \quad \text{para } t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Se pueden usar muchas sustituciones para x, siempre y cuando, conforme t varíe en un intervalo, x tome todos los valores en el dominio de f. Así que la gráfica de $y = x^3$ también está dada por

$$x = t^{1/3}, \quad y = t \quad \text{para } t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Nótese, sin embargo, que las ecuaciones paramétricas

$$x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen}^3 t \quad \text{para } t \text{ en } \mathbb{R}$$

sólo dan parte de la gráfica de $y = x^3$ situada entre los puntos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$.

EJEMPLO 4 Hallar tres representaciones paramétricas de la recta que tiene pendiente m y pasa por el punto (x_1, y_1).

SOLUCIÓN Sabemos que la ecuación de la recta dados un punto y su pendiente es

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Si se toma $x = t$, entonces $y - y_1 = m(t - x_1)$ y se obtienen las ecuaciones paramétricas de

$$x = t, \quad y = y_1 + m(t - x_1) \quad \text{para } t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Otro par de ecuaciones paramétricas se obtiene si $x - x_1 = t$. En este caso, $y - y_1 = mt$, y por lo tanto, la recta está dada paramétricamente por

$$x = x_1 + t, \quad y = y_1 + mt \quad \text{para } t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Si se toma $x - x_1 = \tan t$, entonces, una tercera representación sería

$$x = x_1 + \tan t, \quad y = y_1 + m \tan t \qquad \text{para } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Hay muchas otras maneras de representar paramétricamente a la recta. ■

EJEMPLO 5 La curva trazada por un punto P en la circunferencia de un círculo cuando éste rueda sobre una recta en un plano, se llama **cicloide**. Hallar las ecuaciones paramétricas de una cicloide.

Supóngase que la curva circular tiene radio a y que rueda a lo largo y por encima del eje x en el primer cuadrante, en el sentido positivo. Si el origen es una posición del punto P, entonces en la Figura 11.55 se muestra una porción de la curva y una de las posiciones de la misma. Sea K el centro del círculo y T el punto de tangencia con el eje x. Tomaremos el parámetro t como la medida en radianes del ángulo TKP. Como $\overline{OT}$ es la distancia en que ha rodado la circunferencia, se tiene $\overline{OT} = at$. Por consiguiente, las coordenadas de K son (at, a). Si consideramos un sistema coordenado $x'y'$ con origen en $K(at, a)$, y si $P(x', y')$ denota el punto P relativo a este sistema, entonces mediante las fórmulas para la traslación de ejes con $h = at$ y $k = a$ obtenemos

$$x = at + x', \quad y = a + y'.$$

FIGURA 11.55

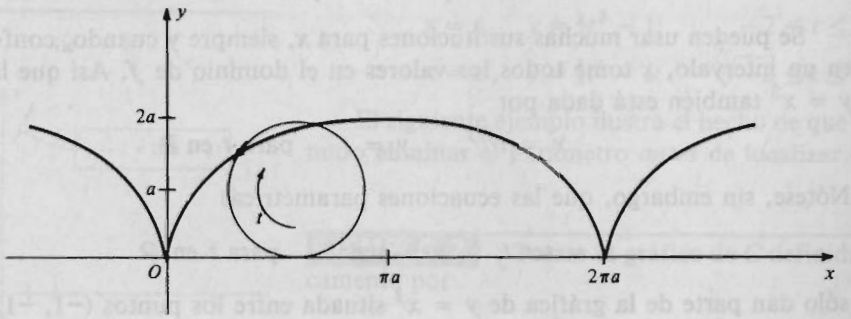
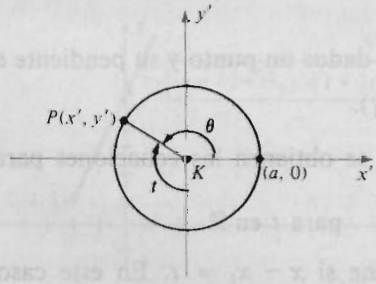


FIGURA 11.56



Si, como en la Figura 11.56, θ denota un ángulo en posición estándar en el sistema $x'y'$, se tiene que $\theta = (3\pi/2) - t$. Por lo tanto,

$$x' = a \cos \theta = a \cos [(3\pi/2) - t] = -a \operatorname{sen} t$$

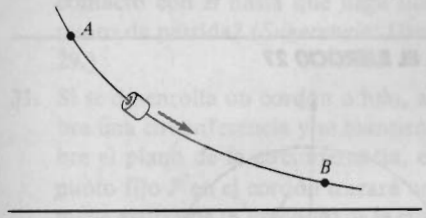
$$y' = a \operatorname{sen} \theta = a \operatorname{sen} [(3\pi/2) - t] = -a \cos t,$$

y al sustituir en $x = at + x'$, $y = a + y'$ resultan las ecuaciones paramétricas de la cicloide, que son:

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad \text{para } t \text{ en } \mathbb{R}.$$ ■

Si $a < 0$, la gráfica en cuestión es la cicloide invertida que resulta si la circunferencia rueda *por debajo* del eje x. Esta curva tiene numerosas propiedades físicas de importancia. En particular, supóngase que un alambre delgado pase por dos puntos fijos A y B, como se ilustra en la Figura 11.57, y supóngase que se pueda cambiar la forma del alambre curvándolo de una u otra manera. Considérese además que a lo largo del alambre se deslice una cuenta y que la única fuerza que actúa sobre ésta es la gravedad. Nos preguntamos ahora cuál de las posibles trayectorias permite que se deslice la cuenta de A a B en el mínimo de tiempo. Es natural pensar que la trayectoria deseada es el segmento de recta de A a B; sin embargo, esta respuesta no es correcta. Se puede demostrar, mediante métodos de cálculo avanzado, que la trayectoria que se requiere para el menor tiempo coincide con la gráfica de la cicloide invertida con A en el origen y B como el punto más bajo sobre la curva. La demostración de este resultado no se presentará en este libro.

FIGURA 11.57



Esta curva tiene otras propiedades interesantes: supóngase que A está en el origen y B es el punto de abscisa $\pi|a|$, es decir, el punto más bajo de la cicloide en el primer arco a la derecha de A. Se puede demostrar que si la cuenta se suelta en *cualquier* punto entre A y B, el tiempo que tarda en llegar a B es siempre el mismo.

En los problemas aplicados se presentan algunas variaciones de la cicloide. Por ejemplo, si la rueda de una motocicleta se desplaza a lo largo de un camino recto, entonces la curva recorrida por un punto fijo de uno de los rayos de la rueda es un tipo de curva cicloidal. En este caso, la curva no tiene ángulos agudos ni corta al camino (el eje x) como sucede con la cicloide. En forma análoga, si la rueda de un vagón de tren se desplaza sobre una vía, la curva trazada por un punto fijo de la circunferencia de la rueda (que se extienda por debajo de la vía) tiene saltos a intervalos regulares (véase el Ejercicio 32). En los Ejercicios 27 y 28 se definen otras cicloides.

Ejercicios 11.11

En los Ejercicios 1 a 18, (a) trace la representación de la curva C que tiene las ecuaciones paramétricas indicadas y (b) encuentre la ecuación rectangular de la gráfica que contiene a los puntos de C.

1. $x = t - 2, \quad y = 2t + 3; \quad 0 \le t \le 5$
2. $x = 1 - 2t, \quad y = 1 + t; \quad -1 \le t \le 4$
3. $x = t^2 + 1, \quad y = t^2 - 1; \quad -2 \le t \le 2$
4. $x = t^3 + 1, \quad y = t^3 - 1; \quad -2 \le t \le 2$
5. $x = 4t^2 - 5, \quad y = 2t + 3; \quad t \text{ en } \mathbb{R}$
6. $x = t^3, \quad y = t^2; \quad t \text{ en } \mathbb{R}$
7. $x = e^t, \quad y = e^{-2t}; \quad t \text{ en } \mathbb{R}$
8. $x = \sqrt{t}, \quad y = 3t + 4; \quad t \ge 0$
9. $x = 2 \operatorname{sen} t, \quad y = 3 \cos t; \quad 0 \le t \le 2\pi$
10. $x = \cos t - 2, \quad y = \operatorname{sen} t + 3; \quad 0 \le t \le 2\pi$
11. $x = \sec t, \quad y = \tan t; \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
12. $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} t; \quad -\pi \le t \le \pi$
13. $x = t^2, \quad y = 2 \ln t; \quad t > 0$
14. $x = \cos^3 t, \quad y = \operatorname{sen}^3 t; \quad 0 \le t \le 2\pi$
15. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \csc t; \quad 0 < t \le \pi/2$
16. $x = e^t, \quad y = e^{-t}; \quad t \text{ en } \mathbb{R}$
17. $x = t, \quad y = \sqrt{t^2 - 1}; \quad |t| \ge 1$
18. $x = -2\sqrt{1 - t^2}, \quad y = t; \quad |t| \le 1$

En los Ejercicios 19 y 22 trace la representación de la curva C cuyas ecuaciones paramétricas son las indicadas.

19. $x = t, \quad y = \sqrt{t^2 - 2t + 1}; \quad 0 \le t \le 4$

20. $x = 2t, \quad y = 8t^3; \quad -1 \le t \le 1$

21. $x = (t + 1)^3, \quad y = (t + 2)^2; \quad 0 \le t \le 2$

22. $x = \tan t, \quad y = 1; \quad -\pi/2 < t < \pi/2$

En los Ejercicios 23 y 24, se dan las curvas C_1, C_2, C_3 y C_4 paramétricamente, para t en $\mathbb{R}$. Trace las representaciones de éstas y analice sus similitudes y sus diferencias.

23. $C_1: x = t^2, \quad y = t$
$C_2: x = t^4, \quad y = t^2$
$C_3: x = \operatorname{sen}^2 t, \quad y = \operatorname{sen} t$
$C_4: x = e^{2t}, \quad y = -e^t$

24. $C_1: x = t, \quad y = 1 - t$
$C_2: x = 1 - t^2, \quad y = t^2$
$C_3: x = \cos^2 t, \quad y = \operatorname{sen}^2 t$
$C_4: x = \ln t - t, \quad y = 1 + t - \ln t$

25. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos distintos. Demuestre que

$$x = (x_2 - x_1)t + x_1, \qquad y = (y_2 - y_1)t + y_1,$$

en donde t toma valores en $\mathbb{R}$, son las ecuaciones paramétricas de la recta l que pasa por P_1 y P_2. Encuentre otros tres pares de ecuaciones paramétricas de l. Demuestre que existe un número infinito de pares distintos de ecuaciones paramétricas de l.

26. Demuestre que

$$x = a \cos t + h, \qquad y = b \operatorname{sen} t + k,$$

para $0 \le t \le 2\pi$, son las ecuaciones paramétricas de una elipse con centro en el punto (h, k) y semiejes de longitud a y b.

27. Una circunferencia C de radio b rueda por el interior de otra circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, donde $b < a$. Sea P un punto fijo de C, y sea $A(a, 0)$ la posición inicial de P como se muestra en la figura. Si el parámetro t es el ángulo que va de la parte positiva del eje x al segmento de recta de O al centro C, muestre que las ecuaciones paramétricas de la curva recorrida por P (llamada **hipocicloide**) son

$$x = (a - b) \cos t + b \cos \frac{a - b}{b} t,$$

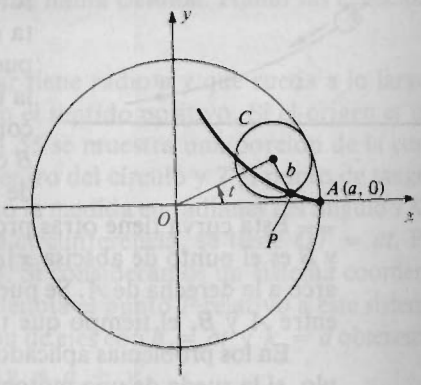
$$y = (a - b) \operatorname{sen} t - b \operatorname{sen} \frac{a - b}{b} t,$$

en donde $0 \le t \le 2\pi$. Compruebe que si $b = a/4$, entonces

$$x = a \cos^3 t, \qquad y = a \operatorname{sen}^3 t$$

y trace la gráfica.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 27



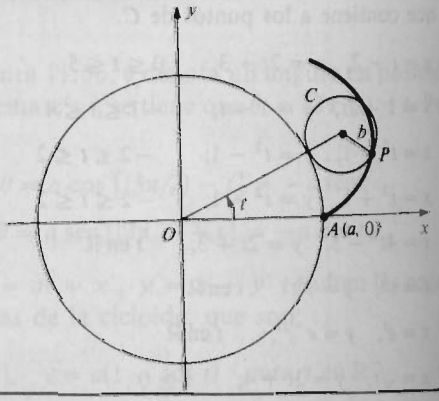
28. La circunferencia C del Ejercicio 27 rueda sobre la parte exterior de la otra curva, encuentre las ecuaciones paramétricas de la curva descrita por P. (Esta curva se llama **epicicloide**.) Demuestre que las ecuaciones paramétricas de esta curva son

$$x = (a + b) \cos t - b \cos \frac{a + b}{b} t,$$

$$y = (a + b) \operatorname{sen} t - b \operatorname{sen} \frac{a + b}{b} t,$$

para $0 \le t \le 2\pi$.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 28



29. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la epicicloide para $b = a/3$ en el Ejercicio 28, y trace la gráfica.

30. El radio de una circunferencia A es un tercio del de una circunferencia B. ¿Cuántas vueltas dará la circunferencia A cuando ruede alrededor y en contacto con B hasta que llega nuevamente al punto de partida? (*Sugerencia:* Use el Ejercicio 29.)

31. Si se desenrolla un cordón o hilo, arrollado sobre una circunferencia y se mantiene tirante sobre el plano de la circunferencia, entonces, un punto fijo P en el cordón trazará una curva llamada **evolvente (o involuta) de la circunferencia.** Si se escoge la circunferencia como en el Ejercicio 27 y el parámetro t es el ángulo desde el eje x positivo hasta el punto de tangencia del cordón, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la evolvente o involuta son

$$x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t), \quad y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$$

para t en $\mathbb{R}$.

32. Generalice la cicloide del Ejemplo 5 al caso en que P es cualquier punto en una recta fija que pasa por el centro K de la circunferencia. Si $b = d(K, P)$, obtenga las ecuaciones paramétricas

$$x = at - b \operatorname{sen} t, \quad y = a - b \cos t \text{ para } t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Trace una gráfica típica si $b < a$ (llamada **cicloide acortada**) y si $b > a$ (la **cicloide alargada**). El nombre **trocoide** se usa algunas veces para cualquiera de estas curvas.

11.12 Repaso

Defina o discuta cada uno de los siguientes conceptos.

1. Secciones cónicas.
2. Parábola.
3. Foco, directriz, vértice y eje de la parábola.
4. Elipse.
5. Ejes mayor y menor de una elipse.
6. Focos y vértices de la elipse.
7. Hipérbola.
8. Ejes transverso y conjugado de la hipérbola.
9. Focos y vértices de la hipérbola.
10. Asíntotas de la hipérbola.
11. Traslación de ejes.
12. Rotación de ejes.
13. Coordenadas polares de un punto.
14. Relación entre coordenadas polares y rectangulares.
15. Gráficas de ecuaciones polares.
16. Ecuaciones polares de las cónicas.
17. Curvas planas.
18. Ecuaciones paramétricas de una curva.

Ejercicios 11.12

En los Ejercicios 1 a 10, encuentre los focos y los vértices; trace también la gráfica de la cónica que tiene la ecuación dada.

1. $y^2 = 64x$
2. $y - 1 = 8(x + 2)^2$
3. $9y^2 = 144 - 16x^2$
4. $9y^2 = 144 + 16x^2$
5. $x^2 - y^2 - 4 = 0$
6. $25x^2 + 36y^2 = 1$
7. $25y = 100 - x^2$
8. $3x^2 + 4y^2 - 18x + 8y + 19 = 0$
9. $x^2 - 9y^2 + 8x + 90y - 210 = 0$
10. $x = 2y^2 + 8y + 3$

Encuentre las ecuaciones de las cónicas descritas en los Ejercicios 11 a 18.

11. La hipérbola con vértices $V(0, \pm 7)$ y puntos extremos de los ejes conjugados $(\pm 3, 0)$.

12. La parábola con foco $F(-4, 0)$ y directriz $x = 4$.

13. La parábola con foco $(0, -10)$ y directriz $y = 10$.

14. La parábola con vértice en el origen, simétrica con respecto al eje x, y que pasa por el punto $(5, -1)$.

15. La elipse con vértices $V(0, \pm 10)$ y focos $F(0, \pm 5)$.

16. La hipérbola con focos $F(\pm 10, 0)$ y vértices $V(\pm 5, 0)$.

17. La hipérbola con vértices $V(0, \pm 6)$ y asíntotas con ecuación $y = \pm 9x$.

18. La elipse con focos $F(\pm 2, 0)$ que pasa por el punto $(2, \sqrt{2})$.

Analice y trace la gráfica de cada una de las ecuaciones de los Ejercicios 19 a 24 después de efectuar una traslación de ejes conveniente.

19. $4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y + 36 = 0$

20. $4x^2 - y^2 - 40x - 8y + 88 = 0$

21. $y^2 - 8x + 8y + 32 = 0$

22. $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 36 = 0$

23. $y^2 - 2x^2 + 6y + 8x - 3 = 0$

24. $x^2 - 9y^2 + 8x + 7 = 0$

En los Ejercicios 25 a 32 trace las gráficas de las ecuaciones polares dadas.

25 $r = -4 \operatorname{sen} \theta$

26. $r = 3 \operatorname{sen} 5\theta$

27. $r = 6 - 3 \cos \theta$

28. $r^2 = 9 \operatorname{sen} 2\theta$

29. $2r = \theta$

30. $r = \dfrac{8}{1 - 3 \operatorname{sen} \theta}$

31. $r = 6 - r \cos \theta$

32. $r = 8 \sec \theta$

Cambie a la forma polar las ecuaciones de los Ejercicios 33 a 36.

33. $y^2 = 4x$

34. $x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0$

35. $2x - 3y = 8$

36. $x^2 + y^2 = 2xy$

En los Ejercicios 37 a 40 cambie las ecuaciones dadas a ecuaciones en x y y.

37. $r^2 = \tan \theta$

38. $r = 2 \cos \theta + 3 \operatorname{sen} \theta$

39. $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$

40. $\theta = \sqrt{3}$

En los Ejercicios 41 a 43 trace la representación de la curva y encuentre la ecuación rectangular de la gráfica que contiene los puntos de la curva.

41. $x = (1/t) + 1, \quad y = (2/t) - t; \qquad 0 < t \leq 4$

42. $x = \cos^2 t - 2, \quad y = \operatorname{sen} t + 1; \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

43. $x = \sqrt{t}, \quad y = 2^{-t}; \qquad t \geq 0$

44. Sean las curvas C_1, C_2, C_3 y C_4 cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$C_1: x = t, \quad y = \sqrt{t}$$
$$C_2: x = t^2, \quad y = t$$
$$C_3: x = 1 - \operatorname{sen}^2 t, \quad y = \cos t$$
$$C_4: x = e^{2t}, \quad y = -e^t$$

en donde t toma valores en $\mathbb{R}$. Trace las gráficas de C_1, C_2, C_3 y C_4 y analice sus semejanzas y diferencias.

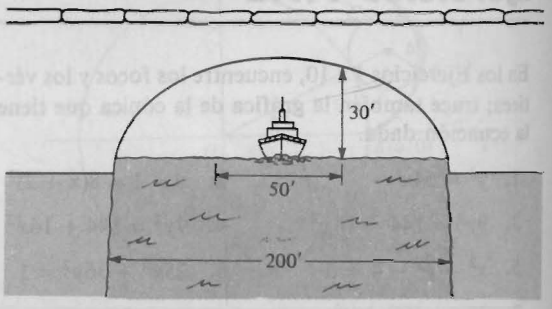
Después de hacer una rotación de ejes apropiada, describa y trace las gráficas de los Ejercicios 45 y 46.

45. $x^2 - 8xy + 16y^2 - 12\sqrt{17}x - 3\sqrt{17}y = 0$

46. $8x^2 + 12xy + 17y^2 - 16\sqrt{5}x - 12\sqrt{5}y = 0$

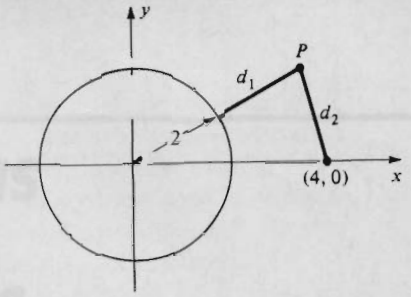
47. Se construirá un puente a través de un río de 200 pie de ancho. El arco del puente será semielíptico y debe construirse de manera que pueda pasar sin peligro por debajo de él un barco de menos de 50 pie de ancho y 30 pie de altura (véase la figura). Encuentre una ecuación para el perfil del arco y calcule la altura del mismo a la mitad del puente.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 47



48. Un punto $P(x, y)$ está a la misma distancia del punto $(4, 0)$ que de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ $(d_1 = d_2)$, como se muestra en la figura. Pruebe que el conjunto de todos esos puntos forma una rama de una hipérbola y trace la gráfica.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 48



Uso de las tablas logarítmicas y trigonométricas

Tablas de logaritmos

Si x es cualquier número real positivo y escribimos

$$x = c \cdot 10^k$$

en donde $1 \leq c \leq 10$ y k es un entero, entonces, aplicando (iii) de las leyes de los logaritmos,

$$\log x = \log c + \log 10^k.$$

Como $\log 10^k = k$, vemos que

$$\log x = \log c + k.$$

La última ecuación indica que para determinar $\log x$ para cualquier número real positivo x, es suficiente conocer los logaritmos de los números entre 1 y 10. El número $\log c$, para $1 \leq c < 10$, recibe el nombre de **mantisa**, y el entero k se llama **característica**, de $\log x$.

Si $1 \leq c < 10$, entonces, como $\log x$ crece a medida que lo hace x

$$\log 1 \leq \log c < \log 10,$$

o equivalentemente,

$$0 \leq \log c < 1.$$

Así, la mantisa de un logaritmo es un número entre 0 y 1. En los problemas numéricos es generalmente necesario aproximar logaritmos. Por ejemplo, se puede demostrar que

$$\log 2 = 0.3010299957\ldots$$

en donde las cifras decimales no se repiten y no terminan. Generalmente se redondean tales logaritmos a cuatro cifras decimales y se escribe

$$\log 2 \approx 0.3010.$$

Si un número entre 0 y 1 se expresa como un decimal finito, casi siempre nos referimos a él como **fracción decimal**. Así, la ecuación $\log x = \log c + k$ implica que si x es cualquier número real positivo, entonces $\log x$ *puede ser aproximado por la suma de una fracción decimal positiva* (*la mantisa*) *y un entero* k (*la característica*). Esta representación se denomina **forma normal** o **estándar** de $\log x$.

Se han calculado los logaritmos comunes de muchos de los números entre 1 y 10. La Tabla 1 del Apéndice II contiene aproximaciones con cuatro cifras decimales para logaritmos de números entre 1.00 y 9.99, con intervalos de 0.01. Esta tabla se puede usar para obtener el logaritmo común de cualquier número de 3 dígitos con una exactitud de cuatro cifras decimales. El uso de la Tabla 1 se explica en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1 Evaluar aproximadamente cada uno de los siguientes logaritmos:

(a) log 43.6 (b) log 43,600 (c) log 0.0436

SOLUCIÓN

(a) Como $43.6 = (4.36)10^1$, la característica de log 43.6 es 1. Con referencia a la Tabla 1, se halla que la mantisa log 4.36 puede ser aproximada por 0.6395. En consecuencia, como en la discusión anterior

$$\log 43.6 \approx 0.6395 + 1 = 1.6395.$$

(b) Como $43\,600 = (4.36)10^4$, la mantisa es la misma de la parte (a); sin embargo, la característica es 4. Consecuentemente,

$$\log 43{,}600 \approx 0.6395 + 4 = 4.6395.$$

(c) Si escribimos $0.0436 = (4.36)10^{-2}$, entonces

$$\log 0.0436 = \log 4.36 + (-2).$$

Por lo tanto, $$\log 0.0436 \approx 0.6395 + (-2).$$

Podemos restar 2 de 0.6395 y obtener

$$\log 0.0436 \approx -1.3605$$

pero esta no es la forma normal, ya que $-1.3605 = -0.3605 + (-1)$, un número en el cual la parte decimal es *negativa*. Un error frecuente es escribir $0.6395 + (-2)$ como -2.6395. Esto es incorrecto porque

$$-2.6395 = -0.6395 + (-2).$$

lo cual no es lo mismo que $0.6395 + (-2)$. ■

Si un logaritmo tiene característica negativa, por lo común se maneja en la forma normal o se expresa de otro modo con la parte decimal positiva. A fin de ilustrar esta técnica, se suma y se resta 8 en el segundo miembro de la ecuación

$$\log 0.0436 \approx 0.6395 + (-2)$$

Lo anterior da $$\log 0.0436 \approx 0.6395 + (8 - 8) + (-2)$$

o sea $$\log 0.0436 \approx 8.6395 - 10.$$

También se puede escribir

$$\log 0.0436 \approx 18.6395 - 20 = 43.6395 - 45$$

y así sucesivamente, en tanto la *parte entera* del logaritmo sea -2.

EJEMPLO 2 Determinar cada uno de los siguientes logaritmos:

(a) $\log (0.00652)^2$ (b) $\log (0.00652)^{-2}$ (c) $\log (0.00652)^{1/2}$

SOLUCIÓN

(a) Por (iii) de las leyes de los logaritmos,

$$\log (0.00652)^2 = 2 \log 0.00652.$$

Como $0.00652 = (6.52)10^{-3}$,

$$\log 0.00652 = \log 6.52 + (-3).$$

Con referencia a la Tabla 1, vemos que $\log 6.52$ es aproximadamente 0.8142 y, por lo tanto,

$$\log 0.00652 \approx 0.8142 + (-3).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \log (0.00652)^2 &= 2 \log 0.00652 \\ &\approx 2[0.8142 + (-3)] \\ &= 1.6284 + (-6). \end{aligned}$$

La forma normal es $0.6284 + (-5)$.

(b) Otra vez se aplica la ley (iii) y el valor para $\log 0.00652$ de la parte (a):

$$\begin{aligned} \log (0.00652)^{-2} &= -2 \log 0.00652 \\ &\approx -2[0.8142 + (-3)] \\ &= -1.6284 + 6. \end{aligned}$$

Es importante señalar que -1.6284 significa $-0.6284 + (-1)$ y, consecuentemente, la parte decimal es negativa. Para obtener la forma normal o estándar, debemos escribir

$$\begin{aligned} -1.6284 + 6 &= 6.0000 - 1.6284 \\ &= 4.3716. \end{aligned}$$

Esto muestra que la mantisa es 0.3716 y la característica es 4.

(c) Por la ley (iii),

$$\begin{aligned} \log (0.00652)^{1/2} &= \tfrac{1}{2} \log 0.00652 \\ &\approx \tfrac{1}{2}[0.8142 + (-3)]. \end{aligned}$$

Si multiplicamos por $\frac{1}{2}$, no se obtiene la forma estándar, pues ningún número en la suma resultante es la característica. Para evitar esto, se puede ajustar la expresión entre corchetes sumando y restando un número adecuado. Si usamos 1 de esta forma, obtenemos,

$$\begin{aligned} \log (0.00652)^{1/2} &\approx \tfrac{1}{2}[1.8142 + (-4)] \\ &= 0.9071 + (-2), \end{aligned}$$

que es la forma estándar. Podríamos haber sumado y restado otro número distinto de 1. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}[0.8142 + (-3)] &= \tfrac{1}{2}[17.8142 + (-20)] \\ &= 8.9071 + (-10). \end{aligned}$$

■

Se puede usar la Tabla 1 para obtener una aproximación a x si se conoce $\log x$, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Hallar una aproximación decimal de x para cada $\log x$:

(a) $\log x = 1.7959$ (b) $\log x = -3.5918$

SOLUCIÓN

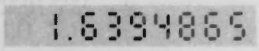
(a) La mantisa 0.7959 determina la secuencia de los dígitos en x, y la característica determina la posición del punto decimal. Con referencia al *cuerpo* de la Tabla 1, vemos que la mantisa 0.7959 es el logaritmo de 6.25. Como la característica es 1, x está entre 10 y 100. En consecuencia, $x \approx 62.5$.

(b) Para encontrar x a partir de la Tabla 1, $\log x$ debe expresarse en la forma normal. Para cambiar $\log x = -3.5918$ a la forma estándar, se puede sumar y restar 4, obteniendo así

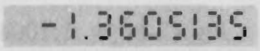
$$\begin{aligned} \log x &= (4 - 3.5918) - 4 \\ &= 0.4082 - 4. \end{aligned}$$

En la Tabla 1 se ve que la mantisa 0.4082 es el logaritmo de 2.56. Como la característica de $\log x$ es -4, se obtiene que $x \approx 0.000256$. ■

Si se utiliza una calculadora con tecla [log] para determinar logaritmos comunes, entonces la forma estándar de $\log x$ se obtiene sólo si $x \geq 1$. Por ejemplo, para evaluar log 43.6 con una calculadora normal, se registra 43.6 y se oprime luego [log], obteniendo así la forma estándar



Si se determina log 0.0436 de modo similar, entonces el siguiente número que aparece en el visor es



Esta no es la forma estándar para el logaritmo, pero es similar a la de la solución del Ejemplo 1(c). Para encontrar la forma estándar podemos sumar 2 al logaritmo (mediante la calculadora), y luego restar 2, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \log 0.0436 &\approx -1.3605135 \\ &= (-1.3605135 + 2) - 2 \\ &= 0.6394865 - 2 \\ &= 0.6394865 + (-2) \end{aligned}$$

Los únicos logaritmos comunes que se pueden encontrar *directamente* a partir de la Tabla 1 son logaritmos de números que tienen como máximo tres dígitos no iguales a cero. Si intervienen *cuatro* dígitos no nulos, es posible obtener una aproximación usando el método de interpolación lineal que describiremos enseguida. El término **interpolación lineal** se usa porque, como hemos visto, el método se basa en porciones aproximadas de la gráfica de $y = \log x$ por medio de segmentos lineales o rectilíneos.

FIGURA A1.1

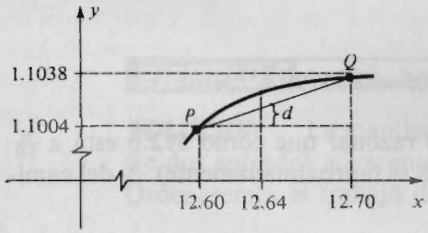
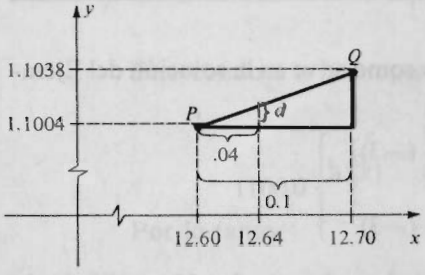


FIGURA A1.2



Para ilustrar el proceso de interpolación lineal, y al mismo tiempo justificarlo, consideremos el ejemplo específico de log 12.64. Como la función logarítmica con base 10 es creciente, este número está entre log 12.60 ≈ 1.1004, y log 12.70 ≈ 1.1038. Examinando la gráfica de $y = \log x$, se tiene la situación de la Figura A1.1, en donde se han distorsionado o exagerado las unidades sobre los ejes x y y, y también la porción de la gráfica que se muestra. Un croquis más exacto indicaría que la gráfica de $y = \log x$ estaría mucho más cerca del segmento rectilíneo que une P(12.60, 1.1004) a Q(12.70, 1.1038), que lo que muestra la figura. Como log 12.64 es la ordenada del punto sobre la gráfica que tiene como abscisa 12.64, puede ser aproximada por la coordenada y del punto con coordenada x igual a 12.64 sobre el *segmento de recta PQ*. Refiriéndonos a la Figura A1.1 vemos que la última ordenada es 1.1004 + d. El número d puede ser aproximado usando triángulos semejantes. Con referencia a la Figura A1.2, en donde la gráfica de $y = \log x$ fue suprimida, es posible formar las siguientes proporciones:

$$\frac{d}{0.0034} = \frac{0.04}{0.1}.$$

En consecuencia,

$$d = \frac{(0.04)(0.0034)}{0.1} = 0.00136.$$

Cuando usemos esta técnica, siempre se redondean los decimales al mismo número de cifras que aparecen en el cuerpo de la tabla. Por consiguiente, $d \approx 0.0014$ y

$$\log 12.64 \approx 1.1004 + 0.0014 = 1.1018.$$

De aquí en adelante, no se trazará la gráfica para interpolación. En vez de ello usaremos el método que se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Determinar log 572.6.

SOLUCIÓN Es conveniente ordenar el trabajo de la siguiente manera:

$$1.0\left\{\begin{array}{l} 0.6\left\{\begin{array}{l}\log 572.0 \approx 2.7574\\ \log 572.6 = ?\end{array}\right\} d \\ \log 573.0 \approx 2.7582\end{array}\right\} 0.0008$$

en donde las diferencias se indican por símbolos apropiados a lo alto de las llaves. Esto conduce a la proporción

$$\frac{d}{0.0008} = \frac{0.6}{1.0} = \frac{6}{10} \quad \text{o bien} \quad d = \left(\frac{6}{10}\right)(0.0008) = 0.00048 \approx 0.0005.$$

Por lo tanto $\log 572.6 \approx 2.7574 + 0.0005 = 2.7579.$

Otra forma de resolver este tipo de problema es razonar que como 572.6 está a $\frac{6}{10}$ de la distancia de 572.0 a 573.0, entonces log 572.6 es (aproximadamente) $\frac{6}{10}$ del camino de 2.7574 a 2.7582. Por lo tanto,

$$\log 572.6 \approx 2.7574 + (\tfrac{6}{10})(0.0008) \approx 2.7574 + 0.0005 = 2.7579. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 Calcular log 0.003678.

SOLUCIÓN Comenzamos ordenando el trabajo como se ve en la solución del Ejemplo 1. Por tanto,

$$10\left\{\begin{array}{l} 8\left\{\begin{array}{l}\log 0.003670 \approx 0.5647 + (-3)\\ \log 0.003678 = ?\end{array}\right\} d \\ \log 0.003680 \approx 0.5658 + (-3)\end{array}\right\} 0.0011$$

Como sólo estamos interesados en razones, usamos los números 8 y 10 en el lado de

la izquierda, ya que su razón es la misma que la de 0.000008 a 0.000010. Esto conduce a la proporción

$$\frac{d}{0.0011} = \frac{8}{10} = 0.8 \quad \text{o bien} \quad d = (0.0011)(0.8) = 0.00088 \approx 0.0009.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \log 0.003678 &\approx [0.5647 + (-3)] + 0.0009 \\ &= 0.5656 + (-3). \end{aligned}$$

■

Si un número x se escribe en la forma $x = c \cdot 10^k$, en donde $1 \leq c < 10$, entonces antes de usar la Tabla 1 para evaluar $\log x$ por interpolación, c debe ser redondeado a tres cifras decimales. Otra forma de decir esto es que x debe ser aproximado a cuatro **cifras significativas**. Algunos ejemplos ayudarán a esclarecer este procedimiento. Si $x = 36.4635$, se redondea a 36.46 antes de aproximar $\log x$. El número 684 279 se debe redondear a 684 300. Para un valor decimal como 0.096202 se usa 0.09620. La razón para hacer esto es que la Tabla 1 no garantiza una exactitud de más de cuatro dígitos, ya que las mantisas que aparecen en ella son aproximaciones. Ello significa que si en el problema es necesaria una exactitud de *más* de cuatro dígitos, no puede usarse la Tabla 1. Si, en tablas más extensas, se puede encontrar directamente el logaritmo de un número que contenga n dígitos, se permite la interpolación para números que comprenden $n + 1$ dígitos, y los números deben ser redondeados en consecuencia.

El método de interpolación también puede ser empleado para encontrar x cuando se da $\log x$. Si usamos la Tabla 1, x puede encontrarse a cuatro cifras significativas. En este caso se da la *ordenada* y de un punto en la gráfica de $y = \log x$, y se pide encontrar la *abscisa* x. Un razonamiento geométrico similar al dado anteriormente se puede usar para justificar el procedimiento que se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Calcular x con cuatro cifras significativas a partir de $\log x = 1.7949$.

SOLUCIÓN La mantisa 0.7949 no aparece en la Tabla 1, pero puede ser aislada entre dos entradas adyacentes; es decir, las mantisas correspondientes a 6.230 y 6.240. Ordenaremos el trabajo de la siguiente manera:

$$0.1\left\{\begin{array}{l} r\left\{\begin{array}{l}\log 62.30 \approx 1.7945 \\ \log x \quad\quad = 1.7949\end{array}\right\} 0.0004 \\ \log 62.40 \approx 1.7952 \end{array}\right\} 0.0007.$$

Esto conduce a la proporción

$$\frac{r}{0.1} = \frac{0.0004}{0.0007} = \frac{4}{7} \quad \text{o bien} \quad r = (0.1)\left(\frac{4}{7}\right) \approx 0.06.$$

Por lo tanto,

$$x \approx 62.30 + 0.06 = 62.36.$$

■

Empleando técnicas avanzadas es posile aproximar, a cualquier grado de exactitud, todos los valores de las funciones trigonométricas en el intervalo t [0, $\pi/2$] o, equivalentemente, en el intervalo en grados [0°, 90°]. La Tabla 4, parte de la cual se reproduce aquí, da aproximaciones a cuatro cifras decimales para tales valores.

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.4887	**28°00′**	.4695	.8829	.5317	1.881	1.133	2.130	**62°00′**	1.0821
.4916	10	.4720	.8816	.5354	1.868	1.134	2.118	50	1.0792
.4945	20	.4746	.8802	.5392	1.855	1.136	2.107	40	1.0763
.4974	30	.4772	.8788	.5430	1.842	1.138	2.096	30	1.0734
.5003	40	.4797	.8774	.5467	1.829	1.140	2.085	20	1.0705
.5032	50	.4823	.8760	.5505	1.816	1.142	2.074	10	1.0676
.5061	**29°00′**	.4848	.8746	.5543	1.804	1.143	2.063	**61°00′**	1.0647
.5091	10	.4874	.8732	.5581	1.792	1.145	2.052	50	1.0617
.5120	20	.4899	.8718	.5619	1.780	1.147	2.041	40	1.0588
.5149	30	.4924	.8704	.5658	1.767	1.149	2.031	30	1.0559
.5178	40	.4950	.8689	.5696	1.756	1.151	2.202	20	1.0530
.5207	50	.4975	.8675	.5735	1.744	1.153	2.010	10	1.0501
.5236	**30°00′**	.5000	.8660	.5774	1.732	1.155	2.000	**60°00′**	1.0472
.5265	10	.5025	.8646	.5812	1.720	1.157	1.990	50	1.0443
.5294	20	.5050	.8631	.5851	1.709	1.159	1.980	40	1.0414
.5323	30	.5075	.8616	.5890	1.698	1.161	1.970	30	1.0385
.5352	40	.5100	.8601	.5930	1.686	1.163	1.961	20	1.0356
.5381	50	.5125	.8587	.5969	1.675	1.165	1.951	10	1.0327
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

En la citada Tabla 4, $0 \leq t \leq 1.5708$. El número 1.5708 es una aproximación a cuatro cifras decimales de $\pi/2$. La tabla está dispuesta de tal manera que los valores de la función correspondiente a ángulos medidos en grados puedan encontrarse directamente. Los valores angulares están dados en intervalos de 10′ de 0° a 90°. La razón por la cual t varía en intervalos de aproximadamente 0.0029 es que $10' \approx 0.0029$ radianes.

Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas si $0 \leq t \leq 0.7854 \approx \pi/4$ o bien $0° \leq \theta \leq 45°$ se deben utilizar los encabezados de la *parte superior* de las columnas de la Tabla 4. Por ejemplo,

$$\text{sen}\,(0.5003) \approx 0.4797 \qquad \tan 28°30' \approx 0.5430$$
$$\cos (0.4945) \approx 0.8802 \qquad \sec 29°00' \approx 1.143$$
$$\cot (0.5120) \approx 1.780 \qquad \csc 29°40' \approx 2.020.$$

Si $0.7854 \leq t \leq 1.5708$, o si $45° \leq \theta \leq 90°$, entonces se deben usar los encabezados de la *parte inferior* de las columnas. Por ejemplo,

$$\text{sen}\,(1.0705) \approx 0.8774 \qquad \csc 62°00' \approx 1.133$$
$$\cos (1.0530) \approx 0.4950 \qquad \cot 61°10' \approx 0.5505$$
$$\tan (1.0821) \approx 1.881 \qquad \sec 60°30' \approx 2.031.$$

La razón por la cual puede acomodarse la tabla de esa manera se sigue del hecho de que

$$\operatorname{sen} t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right), \qquad \cot t = \tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right), \qquad \csc t = \sec\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\operatorname{sen}\theta = \cos(90° - \theta), \qquad \cot\theta = \tan(90° - \theta), \qquad \csc\theta = \sec(90° - \theta).$$

En particular,

$$\operatorname{sen} 29° = \cos(90° - 29°) = \cos 61°$$

$$\cot 28°20' = \tan(90° - 28°20') = \tan 61°40',$$

como se muestra en la tabla.

Si es necesario encontrar los valores de la función cuando t está *entre* los números dados en la tabla, se debe emplear el método de interpolación lineal. Similarmente, dado un valor como $\operatorname{sen} t = 0.6371$, puede utilizarse el cuerpo de la Tabla 4 y aplicar interpolación lineal, si fuera necesario, para obtener una aproximación de t. Si t está dada en grados se redondea al minuto más cercano.

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de la interpolación en la Tabla 4.

EJEMPLO 7 Calcular $\tan 24°16'$.

SOLUCIÓN Se consulta la Tabla 4 y se interpola de la siguiente manera

$$10'\left\{\begin{array}{l} 6'\left\{\begin{array}{l}\tan 24°10' \approx 0.4487\\ \tan 24°16' = ?\end{array}\right\} d \\ \tan 24°20' \approx 0.4522\end{array}\right\} 0.0035$$

$$\frac{d}{0.0035} = \frac{6}{10} \quad \text{o bien} \quad d = \frac{6}{10}(0.0035) \approx 0.0021$$

$$\tan 24°16' \approx 0.4487 + 0.0021 = 0.4508$$ ■

EJEMPLO 8 Calcular $\cos(-117°47')$.

SOLUCIÓN El ángulo está en el tercer cuadrante. El lector debe verificar que el ángulo de referencia es $62°13'$. Por consiguiente, $\cos(-117°47') = -\cos 62°13'$. Interpolando en la Tabla 4 se obtiene

$$10'\left\{\begin{array}{l} 3'\left\{\begin{array}{l}\cos 62°10' \approx 0.4669\\ \cos 62°13' = ?\end{array}\right\} d \\ \cos 62°20' \approx 0.4643\end{array}\right\} 0.0026$$

$$\frac{d}{0.0026} = \frac{3}{10} \quad \text{o bien} \quad d \approx 0.0008$$

Puesto que la función coseno es decreciente,

$$\cos 62°13' \approx 0.4669 - 0.0008 = 0.4661$$

Por lo tanto, $\cos(-117°47') \approx -0.4661$. ■

EJEMPLO 9 Evaluar el menor número real positivo t tal que $\operatorname{sen} t = 0.6635$.

SOLUCIÓN Se localiza 0.6635 entre los valores registrados sucesivos en la columna del seno de la Tabla 4, y se interpola de la siguiente manera:

$$0.0029 \left\{ \begin{array}{l} d \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{sen}(0.7243) \approx 0.6626 & \\ \operatorname{sen} t & = 0.6635 \end{array} \right\} 0.0009 \\ \operatorname{sen}(0.7272) \approx 0.6648 \end{array} \right\} 0.0022$$

$$\frac{d}{0.0029} = \frac{0.0009}{0.0022} \quad \text{o bien} \quad d = \frac{9}{22}(0.0029) \approx 0.0012$$

Por lo tanto,

$$t \approx 0.7243 + 0.0012 = 0.7255$$ ■

EJEMPLO 10 Si $\operatorname{sen}\theta = -0.7963$, aproximar el valor en grados de todos los ángulos θ que están en el intervalo $[0°, 360°]$.

SOLUCIÓN Sea θ' el ángulo de referencia, tal que $\operatorname{sen}\theta' = 0.7963$. Interpolando en la Tabla 4,

$$10' \left\{ \begin{array}{l} d \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{sen} 52°40' \approx 0.7951 & \\ \operatorname{sen}\theta' & = 0.7963 \end{array} \right\} 0.0012 \\ \operatorname{sen} 52°50' \approx 0.7969 \end{array} \right\} 0.0018$$

$$\frac{d}{10} = \frac{0.0012}{0.0018} \quad \text{o bien} \quad d \approx 7'$$

$$\theta' \approx 52°47'$$

Puesto que $\operatorname{sen}\theta$ es negativo, θ está en el tercer o cuarto cuadrantes. Usando el ángulo de referencia de 52°47', se obtiene

$$\theta \approx 180° + 52°47' = 232°47'$$

$$\theta \approx 360° - 52°47' = 307°13'$$ ■

Ejercicios A.1

En los Ejercicios 1 a 16 use la Tabla 1 y las leyes de los logaritmos para evaluar (aproximadamente) el logaritmo común de los números.

1. 347; 0.00347; 3.47

2. 86.2; 8620; 0.862

3. 0.54; 540; 540,000

4. 208; 2.08; 20,800

5. 60.2; 0.0000602; 602 **6.** 5; 0.5; 0.0005

7. $(44.9)^2$; $(44.9)^{1/2}$; $(44.9)^{-2}$

8. $(1810)^4$; $(1810)^{40}$; $(1810)^{1/4}$

9. $(0.943)^3$; $(0.943)^{-3}$; $(0.943)^{1/3}$

10. $(0.017)^{10}$; $10^{0.017}$; $10^{1.43}$

11. $(638)(17.3)$ **12.** $\dfrac{(2.73)(78.5)}{621}$

13. $\dfrac{(47.4)^3}{(29.5)^2}$ **14.** $\dfrac{(897)^4}{\sqrt{17.8}}$

15. $\sqrt[3]{20.6}(371)^3$ **16.** $\dfrac{(0.0048)^{10}}{\sqrt{0.29}}$

En los Ejercicios 17 a 30 use la Tabla 1 para encontrar una aproximación decimal a x.

17. $\log x = 3.6274$ **18.** $\log x = 1.8965$

19. $\log x = 0.9469$ **20.** $\log x = 0.5729$

21. $\log x = 5.2095$

22. $\log x = 6.7300 - 10$

23. $\log x = 9.7348 - 10$

24. $\log x = 7.6739 - 10$

25. $\log x = 8.8306 - 10$ **26.** $\log x = 4.9680$

27. $\log x = 2.2765$ **28.** $\log x = 3.0043$

29. $\log x = -1.6253$ **30.** $\log x = -2.2118$

Aplique interpolación en la Tabla 1 para aproximar el logaritmo común de los números en los Ejercicios 31 a 50.

31. 25.48	**32.** 421.6	**33.** 5363
34. 0.3817	**35.** 0.001259	**36.** 69,450
37. 123,400	**38.** 0.0212	**39.** 0.7786
40. 1.203	**41.** 384.7	**42.** 54.44
43. 0.9462	**44.** 7259	**45.** 66,590
46. 0.001428	**47.** 0.04321	**48.** 300,100
49. 3.003	**50.** 1.236	

En los Ejercicios 51 a 70 aplique interpolación en la Tabla 1 para aproximar x.

51. $\log x = 1.4437$ **52.** $\log x = 3.7455$

53. $\log x = 4.6931$ **54.** $\log x = 0.5883$

55. $\log x = 9.1664 - 10$

56. $\log x = 8.3902 - 10$

57. $\log x = 3.8153 - 6$

58. $\log x = 5.9306 - 9$

59. $\log x = 2.3705$ **60.** $\log x = 4.2867$

61. $\log x = 0.1358$ **62.** $\log x = 0.0194$

63. $\log x = 8.9752 - 10$

64. $\log x = 2.4979 - 5$ **65.** $\log x = 5.0409$

66. $\log x = 1.3796$

67. $\log x = -2.8712$

68. $\log x = -1.8164$

69. $\log x = -0.6123$

70. $\log x = -3.1426$

En los Ejercicios 71 a 82 utilice interpolación en la Tabla 4 para aproximar los números.

71. sen (0.46)	**72.** cos (0.82)	**73.** tan 3
74. cot 6	**75.** sec $\frac{1}{4}$	**76.** csc (1.54)
77. cos 37°43′	**78.** sen 22°34′	**79.** cot 62°27′
80. tan 57°16′	**81.** csc 16°55′	**82.** sec 9°12′

En los Ejercicios 83 a 88 use interpolación en la Tabla 4 para aproximar el menor número positivo t para el cual la igualdad es verdadera.

83. $\cos t = 0.8620$ **84.** $\operatorname{sen} t = 0.6612$

85. $\tan t = 4.501$ **86.** $\sec t = 3.641$

87. $\csc t = 1.436$ **88.** $\cot t = 1.165$

En los Ejercicios 89 a 96 emplee interpolación en la Tabla 4 para aproximar, al minuto más cercano, el valor en grados de todos los ángulos θ que están en el intervalo $[0°, 360°]$.

89. $\operatorname{sen}\theta = 0.3672$ **90.** $\cos\theta = 0.8426$

91. $\tan\theta = 0.5042$ **92.** $\cot\theta = 1.348$

93. $\cos\theta = 0.3465$ **94.** $\csc\theta = 1.219$

95. $\sec\theta = 1.385$ **96.** $\operatorname{sen}\theta = 0.7534$

TABLA 1 Logaritmos comunes

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.9993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

NOTA: Para simplificar la búsqueda de valores decimales se ha omitido en las tablas el cero de enteros.

TABLA 2 Función exponencial natural

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
.00	1.0000	1.0000	2.50	12.182	.0821
.05	1.0513	.9512	2.60	13.464	.0743
.10	1.1052	.9048	2.70	14.880	.0672
.15	1.1618	.8607	2.80	16.445	.0608
.20	1.2214	.8187	2.90	18.174	.0550
.25	1.2840	.7788	3.00	20.086	.0498
.30	1.3499	.7408	3.10	22.198	.0450
.35	1.4191	.7047	3.20	24.533	.0408
.40	1.4918	.6703	3.30	27.113	.0369
.45	1.5683	.6376	3.40	29.964	.0334
.50	1.6487	.6065	3.50	33.115	.0302
.55	1.7333	.5769	3.60	36.598	.0273
.60	1.8221	.5488	3.70	40.447	.0247
.65	1.9155	.5220	3.80	44.701	.0224
.70	2.0138	.4966	3.90	49.402	.0202
.75	2.1170	.4724	4.00	54.598	.0183
.80	2.2255	.4493	4.10	60.340	.0166
.85	2.3396	.4274	4.20	66.686	.0150
.90	2.4596	.4066	4.30	73.700	.0136
.95	2.5857	.3867	4.40	81.451	.0123
1.00	2.7183	.3679	4.50	99.017	.0111
1.10	3.0042	.3329	4.60	99.484	.0101
1.20	3.3201	.3012	4.70	109.95	.0091
1.30	3.6693	.2725	4.80	121.51	.0082
1.40	4.0552	.2466	4.90	134.29	.0074
1.50	4.4817	.2231	5.00	148.41	.0067
1.60	4.9530	.2019	6.00	403.43	.0025
1.70	5.4739	.1827	7.00	1096.6	.0009
1.80	6.0496	.1653	8.00	2981.0	.0003
1.90	6.6859	.1496	9.00	8103.1	.0001
2.00	7.3891	.1353	10.00	22026.0	.00005
2.10	8.1662	.1225			
2.20	9.0250	.1108			
2.30	9.9742	.1003			
2.40	11.0232	.0907			

TABLA 3 Logaritmos naturales

n	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0*		7.697	8.391	8.796	9.084	9.307	9.489	9.643	9.777	9.895
1	.000	.095	.182	.262	.336	.405	.470	.531	.588	.642
2	.693	.742	.788	.833	.875	.916	.956	.993	1.030	1.065
3	1.099	1.131	1.163	1.194	1.224	1.253	1.281	1.308	1.335	1.361
4	1.386	1.411	1.435	1.459	1.482	1.504	1.526	1.548	1.569	1.589
5	1.609	1.629	1.649	1.668	1.686	1.705	1.723	1.740	1.758	1.775
6	1.792	1.808	1.825	1.841	1.856	1.872	1.887	1.902	1.917	1.932
7	1.946	1.960	1.974	1.988	2.001	2.015	2.028	2.041	2.054	2.067
8	2.079	2.092	2.104	2.116	2.128	2.140	2.152	2.163	2.175	2.186
9	2.197	2.208	2.219	2.230	2.241	2.251	2.262	2.272	2.282	2.293
10	2.303	2.313	2.322	2.332	2.342	2.351	2.361	2.370	2.380	2.389

* Réstese 10 si $n < 1$; por ejemplo $\ln 0.3 \approx 8.796 - 10 = -1.204$.

TABLA 4 Funciones trigonométricas de valores en grados

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.0000	0°00′	.0000	1.0000	.0000	—	1.000	—	90°00′	1.5708
.0029	10	.0029	1.0000	.0029	343.8	1.000	343.8	50	1.5679
.0058	20	.0058	1.0000	.0058	171.9	1.000	171.9	40	1.5650
.0087	30	.0087	1.0000	.0087	114.6	1.000	114.6	30	1.5621
.0116	40	.0116	.9999	.0116	85.94	1.000	85.95	20	1.5592
.0145	50	.0145	.9999	.0145	68.75	1.000	68.76	10	1.5563
.0175	1°00′	.0175	.9998	.0175	57.29	1.000	57.30	89°00′	1.5533
.0204	10	.0204	.9998	.0204	49.10	1.000	49.11	50	1.5504
.0233	20	.0233	.9997	.0233	42.96	1.000	42.98	40	1.5475
.0262	30	.0262	.9997	.0262	38.19	1.000	38.20	30	1.5446
.0291	40	.0291	.9996	.0291	34.37	1.000	34.38	20	1.5417
.0320	50	.0320	.9995	.0320	31.24	1.001	31.26	10	1.5388
.0349	2°00′	.0349	.9994	.0349	28.64	1.001	28.65	88°00′	1.5359
.0378	10	.0378	.9993	.0378	26.43	1.001	26.45	50	1.5330
.0407	20	.0407	.9992	.0407	24.54	1.001	24.56	40	1.5301
.0436	30	.0436	.9990	.0437	22.90	1.001	22.93	30	1.5272
.0465	40	.0465	.9989	.0466	21.47	1.001	21.49	20	1.5243
.0495	50	.0494	.9988	.0495	20.21	1.001	20.23	10	1.5213
.0524	3°00′	.0523	.9986	.0524	19.08	1.001	19.11	87°00′	1.5184
.0553	10	.0552	.9985	.0553	18.07	1.002	18.10	50	1.5155
.0582	20	.0581	.9983	.0582	17.17	1.002	17.20	40	1.5126
.0611	30	.0610	.9981	.0612	16.35	1.002	16.38	30	1.5097
.0640	40	.0640	.9980	.0641	15.60	1.002	15.64	20	1.5068
.0669	50	.0669	.9978	.0670	14.92	1.002	14.96	10	1.5039
.0698	4°00′	.0698	.9976	.0699	14.30	1.002	14.34	86°00′	1.5010
.0727	10	.0727	.9974	.0729	13.73	1.003	13.76	50	1.4981
.0756	20	.0756	.9971	.0758	13.20	1.003	13.23	40	1.4952
.0785	30	.0785	.9969	.0787	12.71	1.003	12.75	30	1.4923
.0814	40	.0814	.9967	.0816	12.25	1.003	12.29	20	1.4893
.0844	50	.0843	.9964	.0846	11.83	1.004	11.87	10	1.4864
.0873	5°00′	.0872	.9962	.0875	11.43	1.004	11.47	85°00′	1.4835
.0902	10	.0901	.9959	.0904	11.06	1.004	11.10	50	1.4806
.0931	20	.0929	.9957	.0934	10.71	1.004	10.76	40	1.4777
.0960	30	.0958	.9954	.0963	10.39	1.005	10.43	30	1.4748
.0989	40	.0987	.9951	.0992	10.08	1.005	10.13	20	1.4719
.1018	50	.1016	.9948	.1022	9.788	1.005	9.839	10	1.4690
.1047	6°00′	.1045	.9945	.1051	9.514	1.006	9.567	84°00′	1.4661
.1076	10	.1074	.9942	.1080	9.255	1.006	9.309	50	1.4632
.1105	20	.1103	.9939	.1110	9.010	1.006	9.065	40	1.4603
.1134	30	.1132	.9936	.1139	8.777	1.006	8.834	30	1.4573
.1164	40	.1161	.9932	.1169	8.556	1.007	8.614	20	1.4544
.1193	50	.1190	.9929	.1198	8.345	1.007	8.405	10	1.4515
.1222	7°00′	.1219	.9925	.1228	8.144	1.008	8.206	83°00′	1.4486
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.1222	7°00′	.1219	.9925	.1228	8.144	1.008	8.206	83°00′	1.4486
.1251	10	.1248	.9922	.1257	7.953	1.008	8.016	50	1.4457
.1280	20	.1276	.9918	.1287	7.770	1.008	7.834	40	1.4428
.1309	30	.1305	.9914	.1317	7.596	1.009	7.661	30	1.4399
.1338	40	.1334	.9911	.1346	7.429	1.009	7.496	20	1.4370
.1367	50	.1363	.9907	.1376	7.269	1.009	7.337	10	1.4341
.1396	8°00′	.1392	.9903	.1405	7.115	1.010	7.185	82°00′	1.4312
.1425	10	.1421	.9899	.1435	6.968	1.010	7.040	50	1.4283
.1454	20	.1449	.9894	.1465	6.827	1.011	6.900	40	1.4254
.1484	30	.1478	.9890	.1495	6.691	1.011	6.765	30	1.4224
.1513	40	.1507	.9886	.1524	6.561	1.012	6.636	20	1.4195
.1542	50	.1536	.9881	.1554	6.435	1.012	6.512	10	1.4166
.1571	9°00′	.1564	.9877	.1584	6.314	1.012	6.392	81°00′	1.4137
.1600	10	.1593	.9872	.1614	6.197	1.013	6.277	50	1.4108
.1629	20	.1622	.9868	.1644	6.084	1.013	6.166	40	1.4079
.1658	30	.1650	.9863	.1673	5.976	1.014	6.059	30	1.4050
.1687	40	.1679	.9858	.1703	5.871	1.014	5.955	20	1.4021
.1716	50	.1708	.9853	.1733	5.769	1.015	5.855	10	1.3992
.1745	10°00′	.1736	.9848	.1763	5.671	1.015	5.759	80°00′	1.3963
.1774	10	.1765	.9843	.1793	5.576	1.016	5.665	50	1.3934
.1804	20	.1794	.9838	.1823	5.485	1.016	5.575	40	1.3904
.1833	30	.1822	.9833	.1853	5.396	1.017	5.487	50	1.3875
.1862	40	.1851	.9827	.1883	5.309	1.018	5.403	20	1.3846
.1891	50	.1880	.9822	.1914	5.226	1.018	5.320	10	1.3817
.1920	11°00′	.1908	.9816	.1944	5.145	1.019	5.241	79°00′	1.3788
.1949	10	.1937	.9811	.1974	5.066	1.019	5.164	50	1.3759
.1978	20	.1965	.9805	.2004	4.989	1.020	5.089	40	1.3730
.2007	30	.1994	.9799	.2035	4.915	1.020	5.016	30	1.3701
.2036	40	.2022	.9793	.2065	4.843	1.021	4.945	20	1.3672
.2065	50	.2051	.9787	.2095	4.773	1.022	4.876	10	1.3643
.2094	12°00′	.2079	.9781	.2126	4.705	1.022	4.810	78°00′	1.3614
.2123	10	.2108	.9775	.2156	4.638	1.023	4.745	50	1.3584
.2153	20	.2136	.9769	.2186	4.574	1.024	4.682	40	1.3555
.2182	30	.2164	.9763	.2217	4.511	1.024	4.620	30	1.3526
.2211	40	.2193	.9757	.2247	4.449	1.025	4.560	20	1.3497
.2240	50	.2221	.9750	.2278	4.390	1.026	4.502	10	1.3468
.2269	13°00′	.2250	.9744	.2309	4.331	1.026	4.445	77°00′	1.3439
.2298	10	.2278	.9737	.2339	4.275	1.027	4.390	50	1.3410
.2327	20	.2306	.9730	.2370	4.219	1.028	4.336	40	1.3381
.2356	30	.2334	.9724	.2401	4.165	1.028	4.284	30	1.3352
.2385	40	.2363	.9717	.2432	4.113	1.029	4.232	20	1.3323
.2414	50	.2391	.9710	.2462	4.061	1.030	4.182	10	1.3294
.2443	14°00′	.2419	.9703	.2493	4.011	1.031	4.134	76°00′	1.3265
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

TABLA 4 Funciones trigonométricas de valores en grados (cont.)

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.2443	14°00′	.2419	.9703	.2493	4.011	1.031	4.134	76°00′	1.3265
.2473	10	.2447	.9696	.2524	3.962	1.031	4.086	50	1.3235
.2502	20	.2476	.9689	.2555	3.914	1.032	4.039	40	1.3206
.2531	30	.2504	.9681	.2586	3.867	1.033	3.994	30	1.3177
.2560	40	.2532	.9674	.2617	3.821	1.034	3.950	20	1.3148
.2589	50	.2560	.9667	.2648	3.776	1.034	3.906	10	1.3119
.2618	15°00′	.2588	.9659	.2679	3.732	1.035	3.864	75°00′	1.3090
.2647	10	.2616	.9652	.2711	3.689	1.036	3.822	50	1.3061
.2676	20	.2644	.9644	.2742	3.647	1.037	3.782	40	1.3032
.2705	30	.2672	.9636	.2773	3.606	1.038	3.742	30	1.3003
.2734	40	.2700	.9628	.2805	3.566	1.039	3.703	20	1.2974
.2763	50	.2728	.9621	.2836	3.526	1.039	3.665	10	1.2945
.2793	16°00′	.2756	.9613	.2867	3.487	1.040	3.628	74°00′	1.2915
.2822	10	.2784	.9605	.2899	3.450	1.041	3.592	50	1.2886
.2851	20	.2812	.9596	.2931	3.412	1.042	3.556	40	1.2857
.2880	30	.2840	.9588	.2962	3.376	1.043	3.521	30	1.2828
.2909	40	.2868	.9580	.2994	3.340	1.044	3.487	20	1.2799
.2938	50	.2896	.9572	.3026	3.305	1.045	3.453	10	1.2770
.2967	17°00′	.2924	.9563	.3057	3.271	1.046	3.420	73°00′	1.2741
.2996	10	.2952	.9555	.3089	3.237	1.047	3.388	50	1.2712
.3025	20	.2979	.9546	.3121	3.204	1.048	3.356	40	1.2683
.3054	30	.3007	.9537	.3153	3.172	1.049	3.326	30	1.2654
.3083	40	.3035	.9528	.3185	3.140	1.049	3.295	20	1.2625
.3113	50	.3062	.9520	.3217	3.108	1.050	3.265	10	1.2595
.3142	18°00′	.3090	.9511	.3249	3.078	1.051	3.236	72°00′	1.2566
.3171	10	.3118	.9502	.3281	3.047	1.052	3.207	50	1.2537
.3200	20	.3145	.9492	.3314	3.018	1.053	3.179	40	1.2508
.3229	30	.3173	.9483	.3346	2.989	1.054	3.152	30	1.2479
.3258	40	.3201	.9474	.3378	2.960	1.056	3.124	20	1.2450
.3287	50	.3228	.9465	.3411	2.932	1.057	3.098	10	1.2421
.3316	19°00′	.3256	.9455	.3443	2.904	1.058	3.072	71°00′	1.2392
.3345	10	.3283	.9446	.3476	2.877	1.059	3.046	50	1.2363
.3374	20	.3311	.9436	.3508	2.850	1.060	3.021	40	1.2334
.3403	30	.3338	.9426	.3541	2.824	1.061	2.996	30	1.2305
.3432	40	.3365	.9417	.3574	2.798	1.062	2.971	20	1.2275
.3462	50	.3393	.9407	.3607	2.773	1.063	2.947	10	1.2246
.3491	20°00′	.3420	.9397	.3640	2.747	1.064	2.924	70°00′	1.2217
.3520	10	.3448	.9387	.3673	2.723	1.065	2.901	50	1.2188
.3549	20	.3475	.9377	.3706	2.699	1.066	2.878	40	1.2159
.3578	30	.3502	.9367	.3739	2.675	1.068	2.855	30	1.2130
.3607	40	.3529	.9356	.3772	2.651	1.069	2.833	20	1.2101
.3636	50	.3557	.9346	.3805	2.628	1.070	2.812	10	1.2072
.3665	21°00′	.3584	.9336	.3839	2.605	1.071	2.790	69°00′	1.2043
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.3665	21°00′	.3584	.9336	.3839	2.605	1.071	2.790	69°00′	1.2043
.3694	10	.3611	.9325	.3872	2.583	1.072	2.769	50	1.2014
.3723	20	.3638	.9315	.3906	2.560	1.074	2.749	40	1.1985
.3752	30	.3665	.9304	.3939	2.539	1.075	2.729	30	1.1956
.3782	40	.3692	.9293	.3973	2.517	1.076	2.709	20	1.1926
.3811	50	.3719	.9283	.4006	2.496	1.077	2.689	10	1.1897
.3840	22°00′	.3746	.9272	.4040	2.475	1.079	2.669	68°00′	1.1868
.3869	10	.3773	.9261	.4074	2.455	1.080	2.650	50	1.1839
.3898	20	.3800	.9250	.4108	2.434	1.081	2.632	40	1.1810
.3927	30	.3827	.9239	.4142	2.414	1.082	2.613	30	1.1781
.3956	40	.3854	.9228	.4176	2.394	1.084	2.595	20	1.1752
.3985	50	.3881	.9216	.4210	2.375	1.085	2.577	10	1.1723
.4014	23°00′	.3907	.9205	.4245	2.356	1.086	2.559	67°00′	1.1694
.4043	10	.3934	.9194	.4279	2.337	1.088	2.542	50	1.1665
.4072	20	.3961	.9182	.4314	2.318	1.089	2.525	40	1.1636
.4102	30	.3987	.9771	.4348	2.300	1.090	2.508	30	1.1606
.4131	40	.4014	.9159	.4383	2.282	1.092	2.491	20	1.1577
.4160	50	.4041	.9147	.4417	2.264	1.093	2.475	10	1.1548
.4189	24°00′	.4067	.9135	.4452	2.246	1.095	2.459	66°00′	1.1519
.4218	10	.4094	.9124	.4487	2.229	1.096	2.443	50	1.1490
.4247	20	.4120	.9112	.4522	2.211	1.097	2.427	40	1.1461
.4276	30	.4147	.9100	.4557	2.194	1.099	2.411	30	1.1432
.4305	40	.4173	.9088	.4592	2.177	1.100	2.396	20	1.1403
.4334	50	.4200	.9075	.4628	2.161	1.102	2.381	10	1.1374
.4363	25°00′	.4226	.9063	.4663	2.145	1.103	2.366	65°00′	1.1345
.4392	10	.4253	.9051	.4699	2.128	1.105	2.352	50	1.1316
.4422	20	.4279	.9038	.4734	2.112	1.106	2.337	40	1.1286
.4451	30	.4305	.9026	.4770	2.097	1.108	2.323	30	1.1257
.4480	40	.4331	.9013	.4806	2.081	1.109	2.309	20	1.1228
.4509	50	.4358	.9001	.4841	2.066	1.111	2.295	10	1.1199
.4538	26°00′	.4384	.8988	.4877	2.050	1.113	2.281	64°00′	1.1170
.4567	10	.4410	.8975	.4913	2.035	1.114	2.268	50	1.1141
.4596	20	.4436	.8962	.4950	2.020	1.116	2.254	40	1.1112
.4625	30	.4462	.8949	.4986	2.006	1.117	2.241	30	1.1083
.4654	40	.4488	.8936	.5022	1.991	1.119	2.228	20	1.1054
.4683	50	.4514	.8923	.5059	1.977	1.121	2.215	10	1.1025
.4712	27°00′	.4540	.8910	.5095	1.963	1.122	2.203	63°00′	1.0996
.4741	10	.4566	.8897	.5132	1.949	1.124	2.190	50	1.0966
.4771	20	.4592	.8884	.5169	1.935	1.126	2.178	40	1.0937
.4800	30	.4617	.8870	.5206	1.921	1.127	2.166	30	1.0908
.4829	40	.4643	.8857	.5243	1.907	1.129	2.154	20	1.0879
.4858	50	.4669	.8843	.5280	1.894	1.131	2.142	10	1.0850
.4887	28°00′	.4695	.8829	.5317	1.881	1.133	2.130	62°00′	1.0821
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

TABLA 4 Funciones trigonométricas de valores en grados (cont.)

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.4887	**28°00′**	.4695	.8829	.5317	1.881	1.133	2.130	**62°00′**	1.0821
.4916	10	.4720	.8816	.5354	1.868	1.134	2.118	50	1.0792
.4945	20	.4746	.8802	.5392	1.855	1.136	2.107	40	1.0763
.4974	30	.4772	.8788	.5430	1.842	1.138	2.096	30	1.0734
.5003	40	.4797	.8774	.5467	1.829	1.140	2.085	20	1.0705
.5032	50	.4823	.8760	.5505	1.816	1.142	2.074	10	1.0676
.5061	**29°00′**	.4848	.8746	.5543	1.804	1.143	2.063	**61°00′**	1.0647
.5091	10	.4874	.8732	.5581	1.792	1.145	2.052	50	1.0617
.5120	20	.4899	.8718	.5619	1.780	1.147	2.041	40	1.0588
.5149	30	.4924	.8704	.5658	1.767	1.149	2.031	30	1.0559
.5178	40	.4950	.8689	.5696	1.756	1.151	2.020	20	1.0530
.5207	50	.4975	.8675	.5735	1.744	1.153	2.010	10	1.0501
.5236	**30°00′**	.5000	.8660	.5774	1.732	1.155	2.000	**60°00′**	1.0472
.5265	10	.5025	.8646	.5812	1.720	1.157	1.990	50	1.0443
.5294	20	.5050	.8631	.5851	1.709	1.159	1.980	40	1.0414
.5323	30	.5075	.8616	.5890	1.698	1.161	1.970	30	1.0385
.5352	40	.5100	.8601	.5930	1.686	1.163	1.961	20	1.0356
.5381	50	.5125	.8587	.5969	1.675	1.165	1.951	10	1.0327
.5411	**31°00′**	.5150	.8572	.6009	1.664	1.167	1.942	**59°00′**	1.0297
.5440	10	.5175	.8557	.6048	1.653	1.169	1.932	50	1.0268
.5469	20	.5200	.8542	.6088	1.643	1.171	1.923	40	1.0239
.5498	30	.5225	.8526	.6128	1.632	1.173	1.914	30	1.0210
.5527	40	.5250	.8511	.6168	1.621	1.175	1.905	20	1.0181
.5556	50	.5275	.8496	.6208	1.611	1.177	1.896	10	1.0152
.5585	**32°00′**	.5299	.8480	.6249	1.600	1.179	1.887	**58°00′**	1.0123
.5614	10	.5324	.8465	.6289	1.590	1.181	1.878	50	1.0094
.5643	20	.5348	.8450	.6330	1.580	1.184	1.870	40	1.0065
.5672	30	.5373	.8434	.6371	1.570	1.186	1.861	30	1.0036
.5701	40	.5398	.8418	.6412	1.560	1.188	1.853	20	1.0007
.5730	50	.5422	.8403	.6453	1.550	1.190	1.844	10	.9977
.5760	**33°00′**	.5446	.8387	.6494	1.540	1.192	1.836	**57°00′**	.9948
.5789	10	.5471	.8371	.6536	1.530	1.195	1.828	50	.9919
.5818	20	.5495	.8355	.6577	1.520	1.197	1.820	40	.9890
.5847	30	.5519	.8339	.6619	1.511	1.199	1.812	30	.9861
.5876	40	.5544	.8323	.6661	1.501	1.202	1.804	20	.9832
.5905	50	.5568	.8307	.6703	1.492	1.204	1.796	10	.9803
.5934	**34°00′**	.5592	.8290	.6745	1.483	1.206	1.788	**56°00′**	.9774
.5963	10	.5616	.8274	.6787	1.473	1.209	1.781	50	.9745
.5992	20	.5640	.8258	.6830	1.464	1.211	1.773	40	.9716
.6021	30	.5664	.8241	.6873	1.455	1.213	1.766	30	.9687
.6050	40	.5688	.8225	.6916	1.446	1.216	1.758	20	.9657
.6080	50	.5712	.8208	.6959	1.437	1.218	1.751	10	.9628
.6109	**35°00′**	.5736	.8192	.7002	1.428	1.221	1.743	**55°00′**	.9599
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.6109	**35°00′**	.5736	.8192	.7002	1.428	1.221	1.743	**55°00′**	.9599
.6138	10	.5760	.8175	.7046	1.419	1.223	1.736	50	.9570
.6167	20	.5783	.8158	.7089	1.411	1.226	1.729	40	.9541
.6196	30	.5807	.8141	.7133	1.402	1.228	1.722	30	.9512
.6225	40	.5831	.8124	.7177	1.393	1.231	1.715	20	.9483
.6254	50	.5854	.8107	.7221	1.385	1.233	1.708	10	.9454
.6283	**36°00′**	.5878	.8090	.7265	1.376	1.236	1.701	**54°00′**	.9425
.6312	10	.5901	.8073	.7310	1.368	1.239	1.695	50	.9396
.6341	20	.5925	.8056	.7355	1.360	1.241	1.688	40	.9367
.6370	30	.5948	.8039	.7400	1.351	1.244	1.681	30	.9338
.6400	40	.5972	.8021	.7445	1.343	1.247	1.675	20	.9308
.6429	50	.5995	.8004	.7490	1.335	1.249	1.668	10	.9279
.6458	**37°00′**	.6018	.7986	.7536	1.327	1.252	1.662	**53°00′**	.9250
.6487	10	.6041	.7969	.7581	1.319	1.255	1.655	50	.9221
.6516	20	.6065	.7951	.7627	1.311	1.258	1.649	40	.9192
.6545	30	.6088	.7934	.7673	1.303	1.260	1.643	30	.9163
.6574	40	.6111	.7916	.7720	1.295	1.263	1.636	20	.9134
.6603	50	.6134	.7898	.7766	1.288	1.266	1.630	10	.9105
.6632	**38°00′**	.6157	.7880	.7813	1.280	1.269	1.624	**52°00′**	.9076
.6661	10	.6180	.7862	.7860	1.272	1.272	1.618	50	.9047
.6690	20	.6202	.7844	.7907	1.265	1.275	1.612	40	.0918
.6720	30	.6225	.7826	.7954	1.257	1.278	1.606	30	.8988
.6749	40	.6248	.7808	.8002	1.250	1.281	1.601	20	.8959
.6778	50	.6271	.7790	.8050	1.242	1.284	1.595	10	.8930
.6807	**39°00′**	.6293	.7771	.8098	1.235	1.287	1.589	**51°00′**	.8901
.6836	10	.6316	.7753	.8146	1.228	1.290	1.583	00	.8872
.6865	20	.6338	.7735	.8195	1.220	1.293	1.578	40	.8843
.6894	30	.6361	.7716	.8243	1.213	1.296	1.572	30	.8814
.6923	40	.6383	.7698	.8292	1.206	1.299	1.567	20	.8785
.6952	50	.6406	.7679	.8342	1.199	1.302	1.561	10	.8756
.6981	**40°00′**	.6428	.7660	.8391	1.192	1.305	1.556	**50°00′**	.8727
.7010	10	.6450	.7642	.8441	1.185	1.309	1.550	50	.8698
.7039	20	.6472	.7623	.8491	1.178	1.312	1.545	40	.8668
.7069	30	.6494	.7604	.8541	1.171	1.315	1.540	30	.8639
.7098	40	.6417	.7585	.8591	1.164	1.318	1.535	20	.8610
.7127	50	.6539	.7566	.8642	1.157	1.322	1.529	10	.8581
.7156	**41°00′**	.6561	.7547	.8693	1.150	1.325	1.524	**49°00′**	.8552
.7185	10	.6583	.7528	.8744	1.144	1.328	1.519	50	.8523
.7214	20	.6604	.7509	.8796	1.137	1.332	1.514	40	.8494
.7243	30	.6626	.7490	.8847	1.130	1.335	1.509	30	.8465
.7272	40	.6648	.7470	.8899	1.124	1.339	1.504	20	.8436
.7301	50	.6670	.7451	.8952	1.117	1.342	1.499	10	.8407
.7330	**42°00′**	.6691	.7431	.9004	1.111	1.346	1.494	**48°00′**	.8378
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

TABLA 5 Funciones trigonométricas de radianes y números reales

t	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t
.00	.0000	1.0000	.0000	—	1.000	—
.01	.0100	1.0000	.0100	99.997	1.000	100.00
.02	.0200	.9998	.0200	49.993	1.000	50.00
.03	.0300	.9996	.0300	33.323	1.000	33.34
.04	.0400	.9992	.0400	24.987	1.001	25.01
.05	.0500	.9988	.0500	19.983	1.001	20.01
.06	.0600	.9982	.0601	16.647	1.002	16.68
.07	.0699	.9976	.0701	14.262	1.002	14.30
.08	.0799	.9968	.0802	12.473	1.003	12.51
.09	.0899	.9960	.0902	11.081	1.004	11.13
.10	.0998	.9950	.1003	9.967	1.005	10.02
.11	.1098	.9940	.1104	9.054	1.006	9.109
.12	.1197	.9928	.1206	8.293	1.007	8.353
.13	.1296	.9916	.1307	7.649	1.009	7.714
.14	.1395	.9902	.1409	7.096	1.010	7.166
.15	.1494	.9888	.1511	6.617	1.011	6.692
.16	.1593	.9872	.1614	6.197	1.013	6.277
.17	.1692	.9856	.1717	5.826	1.015	5.911
.18	.1790	.9838	.1820	5.495	1.016	5.586
.19	.1889	.9820	.1923	5.200	1.018	5.295
.20	.1987	.9801	.2027	4.933	1.020	5.033
.21	.2085	.9780	.2131	4.692	1.022	4.797
.22	.2182	.9759	.2236	4.472	1.025	4.582
.23	.2280	.9737	.2341	4.271	1.027	4.386
.24	.2377	.9713	.2447	4.086	1.030	4.207
.25	.2474	.9689	.2553	3.916	1.032	4.042
.26	.2571	.9664	.2660	3.759	1.035	3.890
.27	.2667	.9638	.2768	3.613	1.038	3.749
.28	.2764	.9611	.2876	3.478	1.041	3.619
.29	.2860	.9582	.2984	3.351	1.044	3.497
.30	.2955	.9553	.3093	3.233	1.047	3.384
.31	.3051	.9523	.3203	3.122	1.050	3.278
.32	.3146	.9492	.3314	3.018	1.053	3.179
.33	.3240	.9460	.3425	2.920	1.057	3.086
.34	.3335	.9428	.3537	2.827	1.061	2.999
.35	.3429	.9394	.3650	2.740	1.065	2.916
.36	.3523	.9359	.3764	2.657	1.068	2.839
.37	.3616	.9323	.3879	2.578	4.073	2.765
.38	.3709	.9287	.3994	2.504	1.077	2.696
.39	.3802	.9249	.4111	2.433	1.081	2.630

t	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t
.40	.3894	.9211	.4228	2.365	1.086	2.568
.41	.3986	.9171	.4346	2.301	1.090	2.509
.42	.4078	.9131	.4466	2.239	1.095	2.452
.43	.4169	.9090	.4586	2.180	1.100	2.399
.44	.4259	.9048	.4708	2.124	1.105	2.348
.45	.4350	.9004	.4831	2.070	1.111	2.299
.46	.4439	.8961	.4954	2.018	1.116	2.253
.47	.4529	.8916	.5080	1.969	1.122	2.208
.48	.4618	.8870	.5206	1.921	1.127	2.166
.49	.4706	.8823	.5334	1.875	1.133	2.125
.50	.4794	.8776	.5463	1.830	1.139	2.086
.51	.4882	.8727	.5594	1.788	1.146	2.048
.52	.4969	.8678	.5726	1.747	1.152	2.013
.53	.5055	.8628	.5859	1.707	1.159	1.978
.54	.5141	.8577	.5994	1.668	1.166	1.945
.55	.5227	.8525	.6131	1.631	1.173	1.913
.56	.5312	.8473	.6269	1.595	1.180	1.883
.57	.5396	.8419	.6410	1.560	1.188	1.853
.58	.5480	.8365	.6552	1.526	1.196	1.825
.59	.5564	.8309	.6696	1.494	1.203	1.797
.60	.5646	.8253	.6841	1.462	1.212	1.771
.61	.5729	.8196	.6989	1.431	1.220	1.746
.62	.5810	.8139	.7139	1.401	1.229	1.721
.63	.5891	.8080	.7291	1.372	1.238	1.697
.64	.5972	.8021	.7445	1.343	1.247	1.674
.65	.6052	.7961	.7602	1.315	1.256	1.652
.66	.6131	.7900	.7761	1.288	1.266	1.631
.67	.6210	.7838	.7923	1.262	1.276	1.610
.68	.6288	.7776	.8087	1.237	1.286	1.590
.69	.6365	.7712	.8253	1.212	1.297	1.571
.70	.6442	.7648	.8423	1.187	1.307	1.552
.71	.6518	.7584	.8595	1.163	1.319	1.534
.72	.6594	.7518	.8771	1.140	1.330	1.517
.73	.6669	.7452	.8949	1.117	1.342	1.500
.74	.6743	.7385	.9131	1.095	1.354	1.483
.75	.6816	.7317	.9316	1.073	1.367	1.467
.76	.6889	.7248	.9505	1.052	1.380	1.452
.77	.6961	.7179	.9697	1.031	1.393	1.437
.78	.7033	.7109	.9893	1.011	1.407	1.422
.79	.7104	.7038	1.009	.9908	1.421	1.408

TABLA 5 Funciones trigonométricas de radianes y números reales (cont.)

t	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t
.80	.7174	.6967	1.030	.9712	1.435	1.394
.81	.7243	.6895	1.050	.9520	1.450	1.381
.82	.7311	.6822	1.072	.9331	1.466	1.368
.83	.7379	.6749	1.093	.9146	1.482	1.355
.84	.7446	.6675	1.116	.8964	1.498	1.343
.85	.7513	.6600	1.138	.8785	1.515	1.331
.86	.7578	.6524	1.162	.8609	1.533	1.320
.87	.7643	.6448	1.185	.8437	1.551	1.308
.88	.7707	.6372	1.210	.8267	1.569	1.297
.89	.7771	.6294	1.235	.8100	1.589	1.287
.90	.7833	.6216	1.260	.7936	1.609	1.277
.91	.7895	.6137	1.286	.7774	1.629	1.267
.92	.7956	.6058	1.313	.7615	1.651	1.257
.93	.8016	.5978	1.341	.7458	1.673	1.247
.94	.8076	.5898	1.369	.7303	1.696	1.238
.95	.8134	.5817	1.398	.7151	1.719	1.229
.96	.8192	.5735	1.428	.7001	1.744	1.221
.97	.8249	.5653	1.459	.6853	1.769	1.212
.98	.8305	.5570	1.491	.6707	1.795	1.204
.99	.8360	.5487	1.524	.6563	1.823	1.196
1.00	.8415	.5403	1.557	.6421	1.851	1.188
1.01	.8468	.5319	1.592	.6281	1.880	1.181
1.02	.8521	.5234	1.628	.6142	1.911	1.174
1.03	.8573	.5148	1.665	.6005	1.942	1.166
1.04	.8624	.5062	1.704	.5870	1.975	1.160
1.05	.8674	.4976	1.743	.5736	2.010	1.153
1.06	.8724	.4889	1.784	.5604	2.046	1.146
1.07	.8772	.4801	1.827	.5473	2.083	1.140
1.08	.8820	.4713	1.871	.5344	2.122	1.134
1.09	.8866	.4625	1.917	.5216	2.162	1.128
1.10	.8912	.4536	1.965	.5090	2.205	1.122
1.11	.8957	.4447	2.014	.4964	2.249	1.116
1.12	.9001	.4357	2.066	.4840	2.295	1.111
1.13	.9044	.4267	2.120	.4718	2.344	1.106
1.14	.9086	.4176	2.176	.4596	2.395	1.101
1.15	.9128	.4085	2.234	.4475	2.448	1.096
1.16	.9168	.3993	2.296	.4356	2.504	1.091
1.17	.9208	.3902	2.360	.4237	2.563	1.086
1.18	.9246	.3809	2.427	.4120	2.625	1.082
1.19	.9284	.3717	2.498	.4003	2.691	1.077

t	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t
1.20	.9320	.3624	2.572	.3888	2.760	1.073
1.21	.9356	.3530	2.650	.3773	2.833	1.069
1.22	.9391	.3436	2.733	.3659	2.910	1.065
1.23	.9425	.3342	2.820	.3546	2.992	1.061
1.24	.9458	.3248	2.912	.3434	3.079	1.057
1.25	.9490	.3153	3.010	.3323	3.171	1.054
1.26	.9521	.3058	3.113	.3212	3.270	1.050
1.27	.9551	.2963	3.224	.3102	3.375	1.047
1.28	.9580	.2867	3.341	.2993	3.488	1.044
1.29	.9608	.2771	3.467	.2884	3.609	1.041
1.30	.9636	.2675	3.602	.2776	3.738	1.038
1.31	.9662	.2579	3.747	.2669	3.878	1.035
1.32	.9687	.2482	3.903	.2562	4.029	1.032
1.33	.9711	.2385	4.072	.2456	4.193	1.030
1.34	.9735	.2288	4.256	.2350	4.372	1.027
1.35	.9757	.2190	4.455	.2245	4.566	1.025
1.36	.9779	.2092	4.673	.2140	4.779	1.023
1.37	.9799	.1994	4.913	.2035	5.014	1.021
1.38	.9819	.1896	5.177	.1931	5.273	1.018
1.39	.9837	.1798	5.471	.1828	5.561	1.017
1.40	.9854	.1700	5.798	.1725	5.883	1.015
1.41	.9871	.1601	6.165	.1622	6.246	1.013
1.42	.9887	.1502	6.581	.1519	6.657	1.011
1.43	.9901	.1403	7.055	.1417	7.126	1.010
1.44	.9915	.1304	7.602	.1315	7.667	1.009
1.45	.9927	.1205	8.238	.1214	8.299	1.007
1.46	.9939	.1106	8.989	.1113	9.044	1.006
1.47	.9949	.1006	9.887	.1011	9.938	1.005
1.48	.9959	.0907	10.983	.0910	11.029	1.004
1.49	.9967	.0807	12.350	.0810	12.390	1.003
1.50	.9975	.0707	14.101	.0709	14.137	1.003
1.51	.9982	.0608	16.428	.0609	16.458	1.002
1.52	.9987	.0508	19.670	.0508	19.695	1.001
1.53	.9992	.0408	24.498	.0408	24.519	1.001
1.54	.9995	.0308	32.461	.0308	32.476	1.000
1.55	.9998	.0208	48.078	.0208	48.089	1.000
1.56	.9999	.0108	92.620	.0108	92.626	1.000
1.57	1.0000	.0008	1255.8	.0008	1255.8	1.000

Respuestas a los ejercicios de número impar

CAPÍTULO 1

Ejercicios 1.2, pág. 11

1. (a) positivo (b) negativo (c) negativo (d) positivo (e) positivo
3. (a) $<$ (b) $>$ (c) $=$
5. (a) $>$ (b) $<$ (c) $>$
7. $-8 < -5$ **9.** $0 > -1$ **11.** $x < 0$
13. $3 < a < 5$ **15.** $b \geq 2$ **17.** $c \leq 1$
19. (a) 5 (b) -5 (c) 13
21. (a) 0 (b) $4 - \pi$ (c) -1
23. (a) 4 (b) 6 (c) 6 (d) 10
25. (a) 12 (b) 3 (c) 3 (d) 9 **27.** $x - 5$
29. $4 + x^2$ **31.** $\neq$ **33.** $=$
35. $\neq$ **37.** $=$ **39.** $=$
41. Si $a = -a$, entonces $a + a = 0$, o bien $2a = 0$. Multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{2}$ da $a = 0$. Recíprocamente, si $a = 0$, entonces también $(-1)a = (-1)0 = 0$ y por tanto $-a = 0$. De modo que $a = 0 = -a$.
43. Si $ab = 0$ y $a \neq 0$, entonces $(1/a)(ab) = (1/a)0 = 0$, y así $b = 0$.
45. Puesto que $(a/b)(b/a) = ab/ba = 1$, b/a es el inverso multiplicativo de a/b; es decir, $b/a = (a/b)^{-1}$.
47. Construir un triángulo rectángulo con catetos de longitud igual a $\sqrt{2}$ y 1. La hipotenusa medirá $\sqrt{3}$. Luego se construye un triángulo rectángulo con catetos $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$. La hipotenusa valdrá entonces $\sqrt{5}$.
49. El rectángulo grande tiene área igual a $a(b + c)$. La suma de las áreas de los dos rectángulos pequeños es $ab + ac$.

Ejercicios 1.3, pág. 20

1. $\frac{16}{81}$ **3.** $\frac{9}{8}$ **5.** $-\frac{71}{9}$
7. $\frac{1}{8}$ **9.** 0.04 **11.** $8x^9$
13. $6/x$ **15.** $-2a^{14}$ **17.** $\frac{9}{2}$
19. $12u^{11}/v^2$ **21.** $4/xy$ **23.** $9y^6/x^8$
25. $81y^6/64$ **27.** $s^6/(4r^8)$ **29.** $20y/x^3$
31. $9x^{10}y^{14}$ **33.** $8a^2$ **35.** $24x^{3/2}$
37. $1/(9a^4)$ **39.** $8/x^{1/2}$ **41.** $4x^2y^4$
43. $3/x^3y^2$ **45.** 1 **47.** $x^{3/4}$
49. $(a + b)^{2/3}$ **51.** $(x^2 + y^2)^{1/2}$
53. (a) $4x\sqrt{x}$ (b) $8x\sqrt[3]{x}$
55. (a) $8 - \sqrt[3]{y}$ (b) $\sqrt[3]{8 - y}$
59. 9 **61.** $-2\sqrt[3]{2}$ **63.** $\sqrt[3]{4}/2$
65. $3y^3/x^2$ **67.** $2a^2/b$ **69.** $(3a^2/b)\sqrt[3]{2ab}$
71. $\sqrt{3uv}/3u^2v$ **73.** $3x^5/y^2$ **75.** $(2x/y^2)\sqrt[3]{x^2y^4}$
77. $-3tv^2$ **79.** $\neq$ **81.** $\neq$
83. $=$ **85.** 1.7×10^{-24}

87. (a) 4.27×10^5 (b) 9.8×10^{-8} (c) 8.1×10^8
89. (a) 830,000 (b) 0.0000000000029 (c) 563,000,000
91. 5.87×10^{12} mi **93.** 1.677×10^{-24} g
95. 4.1472×10^6 cuadros

Ejercicios para Calculadora 1.3, pág. 22

1. Oprima la tecla de cuadrado tres veces para calcular una potencia de exponente 8, y cuatro veces, para una de exponente 16.

3. El resultado es equivalente a pulsar una vez la tecla de recíproco, ya que $((x^{-1})^{-1})^{-1} = x^{-1}$.

5. \$157 288.76 **7.** 2.82 m

9. El levantador de 120 kg es superior.

Ejercicios 1.4, pág. 32

1. $5x^3 - x^2 - 6x + 6$
3. $5x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 17x - 4$ **5.** $-12y^2 - 9$
7. $3a^4 - 4a + 5$ **9.** $6x^3 - 5x^2 - 19x + 20$
11. $3r^4 + 4r^3 + 9r^2 + 2r + 12$
13. $12x^5 + 18x^4 + 16x^3 - 5x^2 + 23x + 35$
15. $r^3 - t^3$
17. $6x^5 - x^4 + 29x^3 - 2x^2 + 20x + 8$
19. $4y^2 - 5x$ **21.** $3v^2 - 2u^2 + uv^2$
23. $2x^2 - 5x - 3$ **25.** $8s^2 - 38ts + 35t^2$
27. $15x^4 - 29x^2y - 14y^2$ **29.** $36t^2 - 25v^2$
31. $9r^2 + 60rs + 100s^2$
33. $16x^4 - 40x^2y^2 + 25y^4$ **35.** x^2 **37.** $a - b$
39. $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$
41. $27r^3 + 108r^2s + 144rs^2 + 64s^3$
43. $x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6$
45. $a - 3a^{2/3}b^{1/3} + 3a^{1/3}b^{2/3} - b$
47. $x^2 + 2xy + y^2 - z^2$
49. $9x^2 + 12xy + 6xz + 4y^2 + 4yz + z^2$
51. $s(r + 4t)$ **53.** $3a^2b(b - 2)$
55. $3xy^2(3x + 5y^2)$ **57.** $(4x - 3)(x + 2)$
59. $(2x - 5)(2x + 3)$ **61.** $(8y + 5)(2y - 3)$
63. $(3z - 2)^2$ **65.** $2(3c + 8)(2c + 3)$
67. $(2r + 5t)(2r - 5t)$
69. $(10x - 3y)(5x + 6y)$
71. $4(4w^2 + 3s)(4w^2 - 3s)$ **73.** $(6z + 5)^2$
75. $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$
77. $(3a + 4b)(9a^2 - 12ab + 16b^2)$
79. $(2x^2 - 5)(4x^4 + 10x^2 + 25)$
81. $(3a + b)(2x - y)$ **83.** $(5z + x^2)(8w - 7)$
85. $(a^2 + b^2)(a - b)$
87. $(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
89. Irreducible **91.** $6(x + 2)(x + 5)$
93. $4(x - 3)^2$ **95.** $3(5x + 4)^2$
97. $9(2 + x)(2 - x)$ **99.** $(2x + 1)(xy - z)$
101. $(3x^2 + 2y^2)(4z - 5w)$
103. $(y + 2)(y^2 - 2y + 4)(y - 1)(y^2 + y + 1)$
105. $(x + y - 3)(x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y + 9)$
107. Irreducible
109. $(x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$
111. El área de I es $(x - y)x$, la de II es $(x - y)y$ y $A = x^2 - y^2 = (x - y)x + (x - y)\,y = (x - y)(x + y)$

Ejercicios 1.5, pág. 39

1. 720 **3.** 12 **5.** 336 **7.** 35
9. 56 **11.** 126
13. $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$
15. $a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$
17. $81x^4 - 540x^3y + 1350x^2y^2 - 1500xy^3 + 625y^4$
19. $u^{10} + 20u^8v + 160u^6v^2 + 640u^4v^3 + 1280u^2v^4 + 1024v^5$
21. $r^{-12} - 12r^{-9} + 60r^{-6} - 160r^{-3} + 240 - 192r^3 + 64r^6$
23. $1 + 10x + 45x^2 + 120x^3 + 210x^4 + 252x^5 + 210x^6 + 120x^7 + 45x^8 + 10x^9 + x^{10}$
25. $(3^{25})c^{10} + 25(3^{24})c^{52/5} + 300(3^{23})c^{54/5} + 2300(3^{22})c^{56/5}$
27. $60(3^{14})b^{13} - (3^{15})b^{15}$ **29.** $30{,}618a^{10}b^2$
31. $840u^4v^6$ **33.** $924x^2y^2$ **35.** $-61{,}236$
37. $24x^2y^6$ **39.** $210c^3d^2$
41. $1 + 0.2 + 0.018 + 0.00096 = 1.21896$

Ejercicios 1.6, pág. 46

1. $(x + 2)/(x + 3)$ **3.** $3y/(5y + 1)$
5. $-(a + 2)/(2a + 1)$ **7.** $(2x - 3)/x(5x - 2)$
9. $34r/(3r - 1)(2r + 5)$ **11.** $6x/(2x - 1)(x + 1)$
13. $3/2(4t^2 + 6t + 9)$ **15.** $a/(a^2 + 4)(5a + 2)$
17. $(6x - 7)/(3x + 1)^2$ **19.** $(3 - 2c)/c^3$
21. $(5x^2 - 2x - 6)/(x - 1)^3$
23. $(18x^3 - 10x^2 - 66x + 63)/x^2(2x - 3)^2$
25. $(p^2 + 2p + 4)/(p - 3)$ **27.** $11/(7x - 3)(2x + 1)$
29. $a - b$ **31.** $(x^2 + xy + y^2)/(x + y)$
33. $(2x^2 + 7x + 15)/(x^2 + 10x + 7)$
35. $2x + h - 7$
37. $-(3x^2 + 3xh + h^2)/x^3(x + h)^3$
39. $-2/(2x + 2h + 3)(2x + 3)$
41. $(3x + 2)^3(36x^2 - 37x + 6)$
43. $(2x + 1)^2(8x^2 + x - 24)/(x^2 - 4)^{1/2}$
45. $(3x + 1)^5(39x - 89)/(2x - 5)^{1/2}$
47. $(27x^2 - 24x + 2)/(6x + 1)^4$
49. $(x^2 + 12)/(x^2 + 4)^{4/3}$
51. $6(3 - 2x)/(4x^2 + 9)^{3/2}$ **53.** $(a + \sqrt{ab})/(a - b)$

55. $(t - 8\sqrt{t} + 16)/(t - 16)$
57. $(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2})/(a - b)$
59. $(a - b)/[c(\sqrt{a} + \sqrt{b})]$
61. $2/(\sqrt{2(x + h) + 1} + \sqrt{2x + 1})$
63. $-1/(\sqrt{1 - x - h} + \sqrt{1 - x})$

Ejercicios 1.7, pág. 48

1. (a) $-\frac{5}{12}$ (b) $\frac{39}{20}$ (c) $-\frac{13}{56}$ (d) $\frac{5}{8}$
3. (a) $x < 0$ (b) $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$ (c) $|x| \leq 4$
5. (a) 5 (b) 5 (c) 7 **7.** $18a^5b^5$ **9.** $xy^5/9$
11. $-p^8/2q$ **13.** x^3z/y^{10} **15.** b^6/a^2
17. $s + r$ **19.** x^8/y^2 **21.** $\sqrt[3]{2}/2$
23. $2x^2y\sqrt[3]{x}$ **25.** $(1 - \sqrt{t})/t$ **27.** $2x/y^2$
29. $(1 - 2\sqrt{x} + x)/(1 - x)$
31. (a) 9.37×10^{10} (b) 4.02×10^{-6}
33. 2.75×10^{13} **35.** $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$
37. $-x^2 + 18x + 7$
39. $3y^5 - 2y^4 - 8y^3 + 10y^2 - 3y - 12$
41. $a^4 - b^4$ **43.** $6a^2 + 11ab - 35b^2$
45. $169a^4 - 16b^2$
47. $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$
49. $81x^4 - 72x^2y^2 + 16y^4$ **51.** $10w(6x + 7)$
53. $(14x + 9)(2x - 1)$ **55.** $(2w + 3x)(y - 4z)$
57. $8(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$
59. $(p^4 + q^4)(p^2 + q^2)(p + q)(p - q)$
61. $(w^2 + 1)(w^4 - w^2 + 1)$
63. $x^{12} - 18x^{10}y + 135x^8y^2 - 540x^6y^3 + 1215x^4y^4 - 1458x^2y^5 + 729y^6$
65. $-\frac{63}{16}b^{12}c^{10}$ **67.** $(3x - 5)/(2x + 1)$
69. $(3x + 2)/x(x - 2)$
71. $(5x^2 - 6x - 20)/x(x + 2)^2$
73. $-(2x^2 + x + 3)/x(x + 1)(x + 3)$
75. $(x^2 + 1)^{1/2}(x + 5)^3(7x^2 + 15x + 4)$

CAPÍTULO 2

Ejercicios 2.1, pág. 56

1. $-\frac{7}{4}$ **3.** $5\sqrt{2}/2$ **5.** $\frac{5}{2}$ **7.** $\frac{8}{13}$
9. $-\frac{12}{19}$ **11.** -6 **13.** $\frac{34}{25}$ **15.** $\frac{10}{9}$
17. 1 **19.** $\frac{31}{79}$ **21.** $\frac{9}{38}$ **23.** $-\frac{20}{39}$
25. 3 **27.** $\frac{89}{48}$ **29.** No hay solución
31. No hay solución **33.** $\frac{5}{9}$ **35.** $-\frac{2}{3}$
37. No hay solución **45.** $\frac{5}{7}$
47. Tome cualquier valor de a y b que verifique $b = -5a/3$. Por ejemplo, $a = 3$, $b = -5$, etc.
49. (a) $x + 1 = x + 2$ (b) 2

Ejercicios 2.2, pág. 65

1. $P = I/rt$ **3.** $h = 2A/b$ **5.** $w = (P - 2l)/2$
7. $z = (d - ax - by)/c$ **9.** $I = E/R$
11. $h = 3V/\pi r^2$ **13.** $r = (S - a)/S$
15. $R_2 = RR_1R_3/(R_1R_3 - RR_3 - RR_1)$
17. $P = S/(1 + rt)$ **19.** $r = (3V + \pi h^3)/3\pi h^2$
21. $r = (a - Sl)/(l - S)$ **23.** $b_1 = (2A - hb_2)/h$
25. 88 **27.** -40
29. Aproximadamente 23 semanas
31. \$12 000 a 13%; \$18 000 a $15\frac{1}{2}$%
33. 64 s; 96 m y 128 m, respectivamente
35. Después de 50 juegos adicionales **37.** 60.3 g
39. $\frac{14}{3}$ oz de la solución de glucosa al 30% y $\frac{7}{3}$ oz de agua.
41. 194.6 g de plata esterlina inglesa y 5.4 g de cobre
43. 55 pie **45.** 6 mi/h **47.** 36 min **49.** 400 mi
51. (a) 4050 pie^2 (b) 2592 pie^2 (c) 3600 pie^2
53. 36 min **55.** (a) $\frac{5}{9}$ mi/h (b) $2\frac{2}{9}$ mi
57. (a) 125 (b) 21 **59.** 180 meses (o 15 años)

Ejercicios 2.3, pág. 75

1. $\frac{2}{3}, -\frac{5}{2}$ **3.** $\frac{7}{5}, \frac{1}{4}$ **5.** $-\frac{5}{4}, -6$
7. $\frac{3}{4}$ **9.** $\frac{5}{6}, -\frac{2}{3}$ **11.** $\frac{3}{2}, -1$
13. $-1 \pm \sqrt{7}$ **15.** $(2 \pm \sqrt{14})/2$ **17.** $\frac{5}{2}$
19. $(-9 \pm \sqrt{21})/10$ **21.** $(3 \pm \sqrt{13})/2$
23. $0, -\frac{4}{9}$ **25.** (a) $x = (y \pm \sqrt{2y^2 - 1})/2$
(b) $y = -2x \pm \sqrt{8x^2 + 1}$
27. $r = \sqrt{3\pi hV}/\pi h$ **29.** $d = \sqrt{Gm_1m_2F}/F$
31. $t = (-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gs})/g$
33. $y = \pm(b/a)\sqrt{x^2 - a^2}$
35. Un decremento de 2 cm **37.** 2 pie
39. (a) $d = \sqrt{(400t)^2 + (200t + 100)^2} = 100\sqrt{20t^2 + 4t + 1}$ (b) 3:30 P.M.
41. 24 pulg, 76 pulg **43.** 1 pie
45. Hasta las 9:24 A.M. **47.** 7 mi/h
49. 1.5 pulg en los lados y la tapa; 3 pulg en la base.
51. (a) Después de 1 s y después de 3 s (b) Después de 4 s (c) 64 pie
53. (a) 206.25 pie (b) 40 mi/h
55. (a) 4 320 m (b) 96.86°C **57.** 8 juegos

Ejercicios para Calculadora 2.3, pág. 77

1. $-0.166, -3.728$ **3.** $0.748, -3.584$

Ejercicios 2.4, pág. 83

1. $-2 + 6i$ **3.** $-2 + 4i$
5. $7 - 5i$ **7.** $4 + 7i$
9. $-6 + 3i$ **11.** $-10 + 5i$
13. $20 - 10i$ **15.** $-5 + 12i$
17. $-72 - 36i$ **19.** 100
21. -1 **23.** $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$
25. $\frac{35}{61} + \frac{42}{61}i$ **27.** $-\frac{1}{5} - \frac{11}{10}i$
29. $-\frac{7}{13} + \frac{17}{13}i$ **31.** $-7 - 21i$
33. $x = 10, y = 3$ **35.** $(3 \pm \sqrt{31}i)/2$
37. $-1 \pm 2i$ **39.** $(-1 \pm \sqrt{47}i)/8$
41. $5, (-5 \pm 5\sqrt{3}i)/2$
43. $2, -2, -1 \pm \sqrt{3}i, 1 \pm \sqrt{3}i$
45. $\pm 2i, \pm\frac{3}{2}i$ **47.** $0, (-3 \pm \sqrt{7}i)/2$

Ejercicios 2.5, pág. 87

1. $-3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$ **3.** $0, -\frac{5}{3}, \pm\sqrt{2}/2$ **5.** $0, 16$
7. 1 **9.** $-\frac{57}{5}$ **11.** $\frac{9}{5}$
13. $\pm\sqrt{62}/2$ **15.** 6 **17.** -1
19. $-\frac{5}{4}$ **21.** 3 **23.** $0, 4$
25. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3, -3$
27. $\pm\frac{1}{6}\sqrt{30 + 6\sqrt{13}}, \pm\frac{1}{6}\sqrt{30 - 6\sqrt{13}}$
29. $\frac{1}{27}, -27$ **31.** $\frac{16}{9}, 25$
33. $3, \frac{1}{2}$ **35.** $-\frac{5}{6}, -\frac{3}{2}$
37. $h = \sqrt{S^2 - \pi^2 r^4}/\pi r$ **39.** $x = \pm(a/b)\sqrt{b^2 - y^2}$
41. $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$ **43.** $2\sqrt[3]{432/\pi} \approx 10.3$ cm
45. 40 pie por 30 pie

Ejercicios para Calculadora 2.5, pág. 88

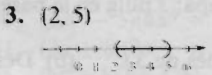
1. $0, 106.17$ **3.** $3.13, -0.02$

5. Hay dos rutas posibles que corresponden a $x \approx 0.6743$ y $x \approx 2.2887$ mi

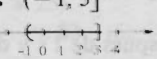
Ejercicios 2.6, pág. 95

1. (a) $-1 < 1$ (b) $-11 < -9$ (c) $-3 < -2$ (d) $3 > 2$

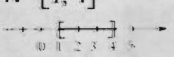
3. $(2, 5)$



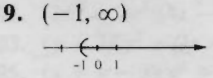
5. $(-1, 3]$



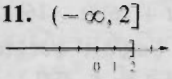
7. $[1, 4]$



9. $(-1, \infty)$



11. $(-\infty, 2]$



13. $-1 < x < 7$ **15.** $8 < x \leq 9$
17. $5 < x$ **19.** $(\frac{17}{5}, \infty)$
21. $[-2, \infty)$ **23.** $(\frac{5}{2}, \infty)$
25. $(-\infty, \frac{44}{3}]$ **27.** $(-3, 1)$
29. $[1, 5]$ **31.** $[2, \frac{8}{3})$
33. $(\frac{6}{38}, \infty)$ **35.** $(-\frac{2}{3}, \infty)$
37. $(-\frac{7}{3}, \infty)$ **39.** $(\frac{1}{4}, \infty)$
41. $(-\infty, 1)$ o bien $(1, \infty)$ **43.** $\frac{140}{9} \leq C \leq \frac{80}{3}$
45. $\frac{20}{9} \leq x \leq 4$ **47.** $0 < p < \frac{60}{7}$
49. El resultado es falso si $a < 0$ (considere, por ejemplo $a = -2$ y $b = 2$).

Ejercicios 2.7, pág. 104

1. $(-2, 2)$ **3.** $(6, \infty) \cup (-\infty, -6)$
5. $[-10, 10]$ **7.** $(9.95, 10.05)$
9. $[-10, 2]$ **11.** $(-\frac{2}{3}, 4)$
13. $(-\infty, -6) \cup (2, \infty)$ **15.** $(-\infty, 1] \cup [4, \infty)$
17. $(-2, 3)$ **19.** $(-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (1, \infty)$
21. $[0, 10]$ **23.** $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{10}{3}, \infty)$
25. $(-3, 3)$ **27.** $(4, \infty) \cup (-4, 0]$
29. $[-5, -\frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, 5]$ **31.** $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{7}{5}, \infty)$
33. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ **35.** $[-2, 1] \cup [2, \infty)$
37. $(-\infty, -1] \cup (1, 2] \cup (3, \infty)$ **39.** $[\frac{1}{2}, 4]$
41. $0 \leq v < 30$ **43.** $0 < S < 4000$
45. $1 < t < 4$

Ejercicios 2.8, pág. 105

1. $-\frac{5}{6}$ **3.** -32
5. Toda $x > 0$ **7.** $(-2 \pm \sqrt{19})/3$
9. $(1 \pm \sqrt{21})/2$ **11.** $125, -27$
13. $(1 \pm i\sqrt{14})/5$ **15.** $\pm(\sqrt{14}/2)i, \pm(2\sqrt{3}/3)i$
17. $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}$ **19.** 2
21. 5 **23.** El intervalo $(-\frac{11}{4}, \frac{9}{4})$
25. $(-\infty, -\frac{3}{10})$ **27.** $(-\infty, \frac{11}{3}] \cup [7, \infty)$
29. $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (\frac{2}{5}, \infty)$ **31.** $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (2, 9)$
33. $(1, \infty)$ **35.** $R = (S/\pi s) - r$
37. $R = \sqrt[4]{8nVL/\pi P}$
39. $R_2 = (n-1)R_1R/(R_1 - R(n-1))$
41. $-1 + 8i$ **43.** $-55 + 48i$ **45.** $-\frac{9}{53} - \frac{48}{53}i$
47. $36 - 25\sqrt{2}$ cm ≈ 0.645 cm **49.** 64 mi/h
51. 315.8 g de alcohol etílico y 84.2 g de agua
53. $R_2 = \frac{10}{3}$ ohms **55.** 75 mi
57. 9 pulg × 11 pulg
59. $d = \sqrt{4 - 200t + 2900t^2}$;
$t = (5 \pm 2\sqrt{19603})/145 \approx 1.97$ h después de las

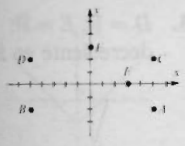
10:00 A.M., o aproximadamente 11:58 A.M.

61. (a) $2\sqrt{2}$ pie (b) 2 pie **63.** $7\frac{2}{3}$ años

65. $4 \le p \le 8$

CAPÍTULO 3

Ejercicios 3.1, pág. 114

1. 

3. La recta que biseca los cuadrantes I y III



5. (a) La recta paralela al eje y que corta al eje x en $(3, 0)$.
   (b) La recta paralela al eje x que corta al eje y en $(0, -1)$.
   (c) Todos los puntos a la derecha y sobre el eje y.
   (d) Todos los puntos de los cuadrantes I y III.
   (e) Todos los puntos abajo del eje x.

7. (a) $\sqrt{29}$ (b) $(5, -\frac{1}{2})$

9. (a) $\sqrt{13}$ (b) $(-\frac{7}{2}, -1)$

11. (a) 4 (b) $(5, -3)$ **13.** Área = 28

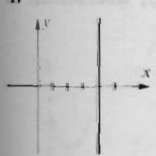
17. $(13, -28)$ **19.** $d(A, P) = d(B, P)$

21. $\sqrt{x^2 + y^2} = 5$. Una circunferencia de radio 5, con centro en el origen.

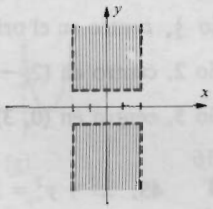
23. $(0, 3 + \sqrt{11}), (0, 3 - \sqrt{11})$ **25.** $(-2, -1)$

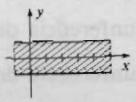
27. $a > 4$ o bien $a < \frac{2}{5}$

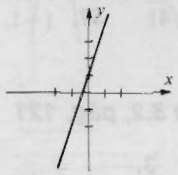
Ejercicios 3.2, pág. 120

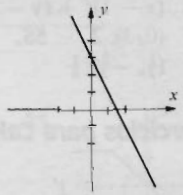
1. 

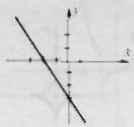
3. 

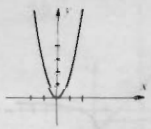
5. 

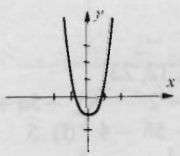
7. 

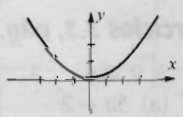
9. 

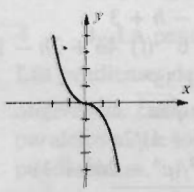
11. 

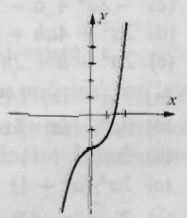
13. 

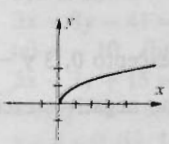
15. 

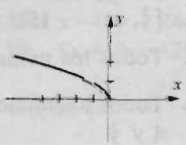
17. 

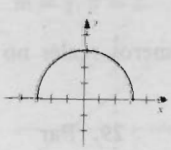
19. 

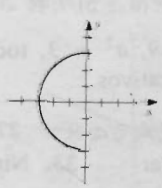
21. 

23. 

25. 

27. 

29. 

31. 

33. Circunferencia de radio 4, centro en el origen.

35. Circunferencia de radio $\frac{1}{3}$, centro en el origen.

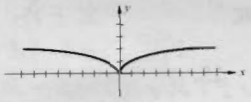
37. Circunferencia de radio 2, centro en $(2, -1)$.

39. Circunferencia de radio 3, centro en $(0, 3)$.

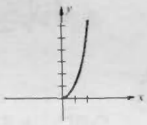
41. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$
43. $(x-\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = 4$ **45.** $x^2 + y^2 = 34$
47. $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 4$
49. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 34$ **51.** $(-1, 5)$; 4
53. $(0, 3)$; 2 **55.** $(5, -4)$; $\sqrt{41}$ **57.** $(-1, 1)$; $\frac{1}{2}$
59. $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$; $\frac{1}{6}$

Ejercicios para Calculadora 3.2, pág. 121

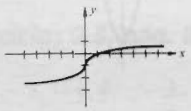
1.



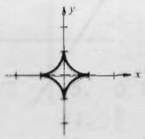
3.



5.



7.



Ejercicios 3.3, pág. 127

1. 3, 9, 4, 6 **3.** $2, \sqrt{2}+6, 12, 23$
5. (a) $5a-2$ (b) $-5a-2$ (c) $-5a+2$
(d) $5a+5h-2$ (e) $5a+5h-4$ (f) 5
7. (a) $2a^2-a+3$ (b) $2a^2+a+3$
(c) $-2a^2+a-3$
(d) $2a^2+4ah+2h^2-a-h+3$
(e) $2a^2-a+2h^2-h+6$ (f) $4a+2h-1$
9. (a) $3/a^2$ (b) $1/(3a^2)$ (c) $3a^4$
(d) $9a^4$ (e) $3a$ (f) $\sqrt{3a^2}$
11. (a) $2a/(a^2+1)$ (b) $(a^2+1)/2a$
(c) $2a^2/(a^4+1)$ (d) $4a^2/(a^4+2a^2+1)$
(e) $2\sqrt{a}/(a+1)$ (f) $\sqrt{2a^3+2a}/(a^2+1)$
13. $[\frac{5}{3}, \infty)$ **15.** $[-2, 2]$
17. Todos los números reales excepto 0, 3 y -3
19. Todos los números reales no negativos excepto 4 y $\frac{3}{2}$
21. $\frac{9}{7}$; $(a+5)/7$; $\mathbb{R}$
23. 19, a^2+3, todos los números reales no negativos.
25. $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[3]{a}$; $\mathbb{R}$ **27.** Impar **29.** Par
31. Par **33.** Ninguno **35.** Ninguno
37. $V = 4x^3 - 100x^2 + 600x$
39. (a) $y = 500/x$ (b) $C = 100[3x + (1000/x) - 3]$
41. $d = 2\sqrt{t^2 + 2500}$
43. (a) $y = \sqrt{2rh + h^2}$ (b) 1280.6 mi
45. $S = 4\pi r(5 + r)$ **47.** $d = \sqrt{90{,}400 + x^2}$
49. (a) $h = 3(4 - r)$ (b) $V = 3\pi r^2(4 - r)$

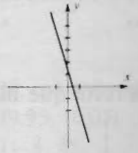
Ejercicios 3.4, pág. 138

En los Ejercicios 1 a 19, D denota el dominio de f y E indica el contradominio.

1. $D = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}$; creciente en $\mathbb{R}$



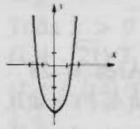
3. $D = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}$; decreciente en $\mathbb{R}$



5. $D = \mathbb{R}$, $E = (-\infty, 3]$; creciente en $(-\infty, 0]$, decreciente en $[0, \infty)$



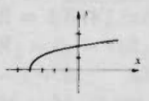
7. $D = \mathbb{R}$, $E = [-4, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 0]$, creciente en $[0, \infty)$



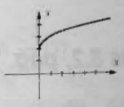
9. $D = [-4, \infty)$, $E = [0, \infty)$; creciente en $[-4, \infty)$

11. $D = [0, \infty)$, $E = [2, \infty)$; creciente en $[0, \infty)$

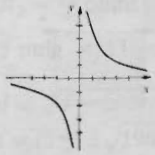
9.



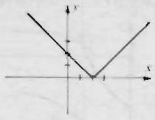
11.



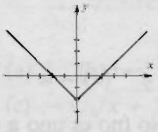
13. $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = E$; decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$.



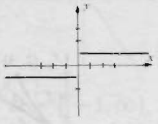
15. $D = \mathbb{R}$, $E = [0, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 2]$, creciente en $[2, \infty)$.



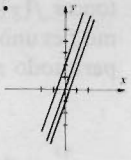
17. $D = \mathbb{R}$, $E = [-2, \infty)$;
decreciente en $(-\infty, 0]$,
creciente en $[0, \infty)$



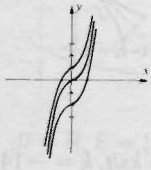
19. $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$,
$E = \{-1, 1\}$;
ni creciente ni decreciente



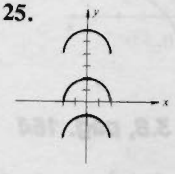
21.



23.



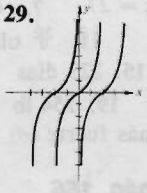
25.



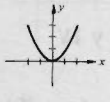
27.



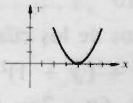
29.



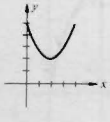
31. (a)



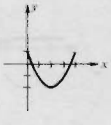
(b)



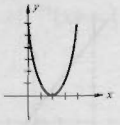
(c)



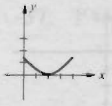
(d)



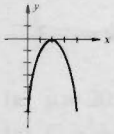
(e)



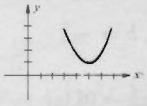
(f)



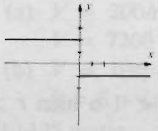
(g)



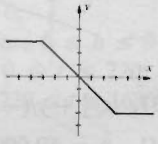
(h)



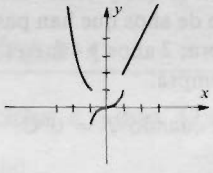
33.



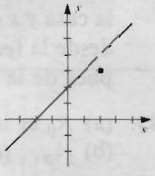
35.



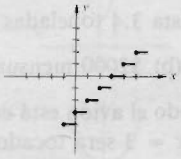
37.



39.



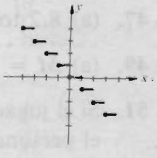
41. (a)



(b)



(c)



Ejercicios 3.5, pág. 148

1. 4 **3.** La pendiente no existe.

5. Las pendientes de los lados opuestos son iguales.

7. *Sugerencia:* Demuestre que los lados opuestos son paralelos y que los dos lados adyacentes son perpendiculares.

9. $(-12, 0)$ **11.** $x - 2y - 14 = 0$

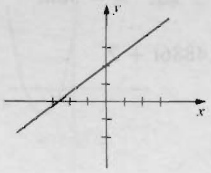
13. $3x - 8y - 41 = 0$ **15.** $x - 8y - 24 = 0$

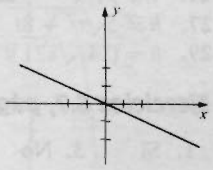
17. (a) $x = 10$ (b) $y = -6$ **19.** $5x + 2y - 29 = 0$

21. $5x - 7y + 15 = 0$

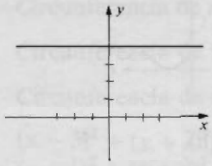
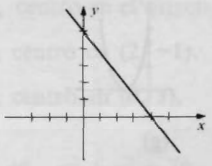
23. $x + 6y - 9 = 0$; $3x - 5y + 5 = 0$; $4x + y - 4 = 0$; $(\frac{15}{23}, \frac{32}{23})$

25. $m = \frac{3}{4}$, $b = 2$ **27.** $m = -\frac{1}{2}$, $b = 0$

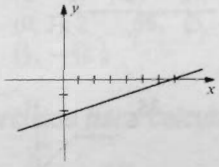




29. $m = 0, b = 4$ **31.** $m = -\frac{5}{4}, b = 5$

33. $m = \frac{1}{3}, b = -\frac{7}{3}$ **35.** $k = -3$



37. $x/\frac{3}{2} + y/(-3) = 1$ **39.** $r < 1$ o bien $r > 2$

41. $y = 59\,000 + 6000x$ en la que y es el valor de la casa y x es el número de años que han pasado desde la fecha de compra; 2 años y 4 meses después de la fecha de compra.

43. (a) R_0 es la resistencia cuando $T = 0°C$ (b) $_{2}^{1}{}_{73}$ (c) 273°C

45. (a) $y = -4000x + 60\,000$ (b) \$4000

47. (a) 8.2 toneladas (b) hasta 3.4 toneladas

49. (a) $M = 0.45R - 900$ (b) \$2000 mensuales

51. Si el jugador dispara cuando el avión está en P, el personaje que está en $x = 3$ será tocado. Si el jugador dispara cuando el avión está en Q no le dará a ningún blanco.

Ejercicios 3.6, pág. 155

1. $3x^2 + 1/(2x - 3)$; $3x^2 - 1/(2x - 3)$; $3x^2/(2x - 3)$; $3x^2(2x - 3)$

3. $2x$; $2/x$, $x^2 - (1/x^2)$, $(x^2 + 1)/(x^2 - 1)$

5. $2x^3 + x^2 + 7$; $2x^3 - x^2 - 2x + 3$; $2x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 10$; $(2x^3 - x + 5)/(x^2 + x + 2)$

7. $6x - 1, 6x + 3$ **9.** $36x^2 - 5, 12x^2 - 15$

11. $12x^2 - 8x + 1, 6x^2 + 4x - 1$

13. $x^3 - 1, x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

15. $x + 9 + 9\sqrt{x + 9}, \sqrt{x^2 + 9x + 9}$

17. $x^2/(2 - 5x^2), 4x^2 - 20x + 25$ **19.** $5, -5$

21. $1/x^4, 1/x^4$ **23.** x, x **25.** $A = 36\pi t^2$

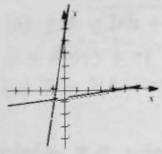
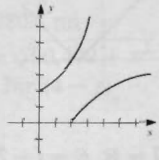
27. $h = 5\sqrt{t^2 + 8t}$

29. $h = (14/\sqrt{821})t + 2 \approx 0.4886t + 2$

Ejercicios 3.7, pág. 160

1. Sí **3.** No **5.** Sí **7.** No **9.** No **11.** Sí

13. y **15.** Demuestre que $f(g(x)) = x = g(f(x))$.

17. $f^{-1}(x) = (x + 3)/4$

19. $f^{-1}(x) = (1 - 5x)/2x, x > 0$

21. $f^{-1}(x) = \sqrt{9 - x}, x \le 9$

23. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{(x + 2)/5}$

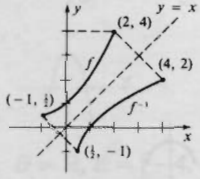
25. $f^{-1}(x) = (x^2 + 5)/3, x \ge 0$

27. $f^{-1}(x) = (x - 8)^3$ **29.** $f^{-1}(x) = x$

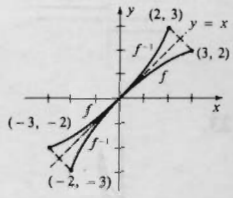
31. (a) $f^{-1}(x) = (x - b)/a$ (b) No (no es uno a uno)

33. Si g y h son ambas funciones inversas de f, entonces $f(g(x)) = x = f(h(x))$ para todo x. Como f es uno a uno esto implica que $g(x) = h(x)$ para todo x; es decir, $g = h$.

35.



37.



Ejercicios 3.8, pág. 164

1. $a = kv, k = \frac{2}{5}$ **3.** $r = ks/t, k = -14$

5. $y = kx^2/z^3, k = 27$ **7.** $c = ka^2b^3, k = -\frac{2}{49}$

9. 295 lb/pie^2 **11.** $\frac{50}{9}$ ohms (Ω)

13. $3\sqrt{3}/2$ s **15.** 223 días

17. 60.6 mi/h **19.** 154 lb

21. 2.05 veces más fuerte

Ejercicios 3.9, pág. 166

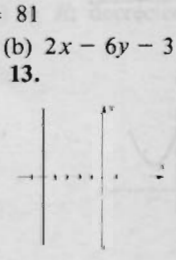
1. Área = 10

3. Los puntos de los cuadrantes II y IV

7. $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 81$

9. (a) $18x + 6y - 7 = 0$ (b) $2x - 6y - 3 = 0$

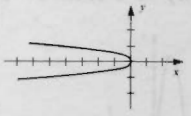
11. **13.**

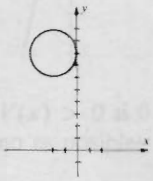
15.



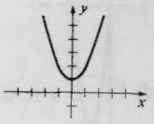
17.



16.

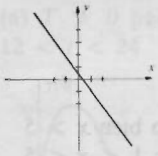


21.

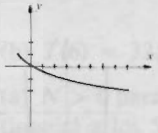


23. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\sqrt{2}/2$ (c) 0 (d) $-x/\sqrt{3-x}$ (e) $-x/\sqrt{x+3}$ (f) $x^2/\sqrt{x^2+3}$ (g) $x^2/(x+3)$

25. $D = \mathbb{R}, E = \mathbb{R}$; decreciente en $\mathbb{R}$



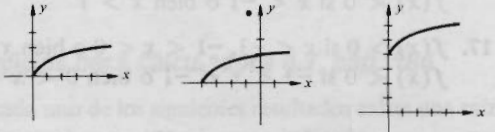
27. $D = [-1, \infty), E = (-\infty, 1]$ decreciente en $[-1, \infty)$



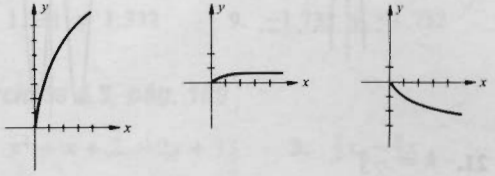
29. $D = \mathbb{R}, E = \{1000\}$



31. (a) (b) (c)

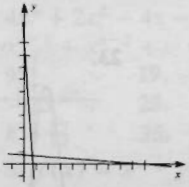


(d) (e) (f)



33. $18x^2 + 9x - 1$; $6x^2 - 15x + 5$

35. $f^{-1}(x) = (10 - x)/15$ **37.** $V = C^3/8\pi^2$



39. (a) $y = 20 - \frac{4}{5}x$ (b) $V = 4x(20 - \frac{4}{5}x)$

41. (a) $C = \frac{1}{16}x$ (b) $C = \frac{5}{88}x + 50$ (c) 8800 mi

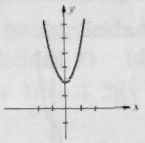
43. (a) $V = 200h^2$ para $0 \le h \le 6$;
$V = 7200 + 3200(h - 6)$ para $6 \le h \le 9$
(b) $V = 10t$; $h = \sqrt{t/20}$ para $0 \le t \le 720$;
$h = 6 + (t - 7207/320$ para $720 \le t \le 1680$

45. 10 125 watts

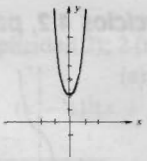
CAPÍTULO 4

Ejercicios 4.1, pág. 175

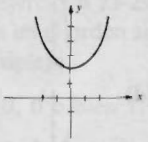
1. (a)



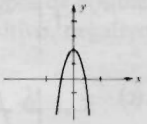
(b)



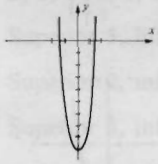
(c)



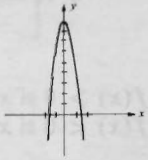
(d)



3. Vértice: (0, −9)



5. Vértice: (0, 9)

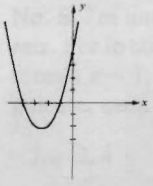


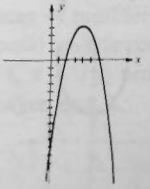
7. $3, -\frac{1}{4}$ **9.** $\frac{2}{3}$

11. $2(x - 4)^2 - 9$; mín: $f(4) = -9$

13. $-5(x + 1)^2 + 8$; máx: $f(-1) = 8$

15. mín: $f(-\frac{5}{2}) = -\frac{9}{4}$ **17.** máx: $f(4) = 4$



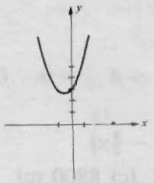


19. mín: $f(-\frac{1}{2}) = \frac{11}{4}$

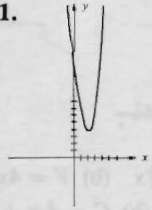
21. mín: $f(2) = 4$

23. máx: $f(-1) = 1$

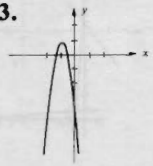
19.



21.



23.



25. $y = \frac{4}{27}x(9 - x)$

27. (a) $x^2 = 500(y - 10)$ (b) 282 pie

29. $y = 2x^2 - 3x + 1$ **31.** 424 pie, 100 pie

33. 10.5 lb

35. (a) $y = 250 - \frac{3}{4}x$ (b) $A = x(250 - \frac{3}{4}x)$
(c) $166\frac{2}{3}$ pie por 125 pie

37. (a) $y = 12 - x$ (b) $A = x(12 - x)$

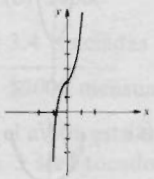
39. (a) $y = -\frac{7}{160}x^2 + x$ **(b) 17.5 pie**

Ejercicios 4.2, pág. 183

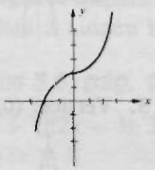
1. (a)



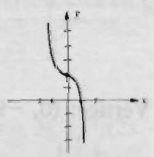
(b)



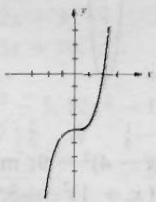
(c)



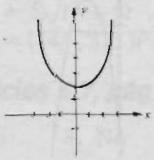
(d)



3. $f(x) > 0$ si $x > 2$
$f(x) < 0$ si $x < 2$



5. $f(x) > 0$ para todo x



7. $f(x) > 0$ si $-3 < x < 0$ o bien $x > 3$
$f(x) < 0$ si $x < -3$ o bien $0 < x < 3$.



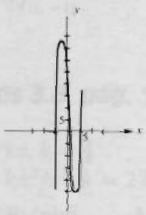
9. $f(x) > 0$ si $x < -2$ o bien $0 < x < 1$
$f(x) < 0$ si $-2 < x < 0$ o bien $x > 1$



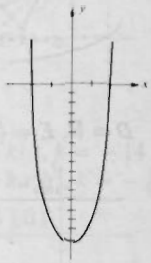
11. $f(x) > 0$ si $-4 < x < 1$ o bien $x > 5$
$f(x) < 0$ si $x < -4$ o bien $1 < x < 5$

13. $f(x) > 0$ si $x < -2$ o bien $x > 2$
$f(x) < 0$ si $-2 < x < 2$

11.



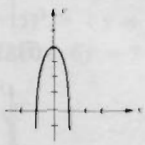
13.



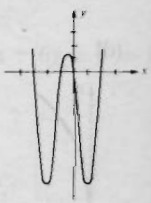
15. $f(x) > 0$ si $-1 < x < 1$
$f(x) < 0$ si $x < -1$ o bien $x > 1$

17. $f(x) > 0$ si $x < -3$, $-1 < x < 0$ o bien $x > 2$
$f(x) < 0$ si $-3 < x < -1$ o bien $0 < x < 2$

15.

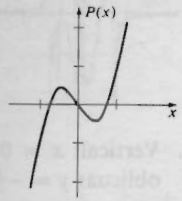


17.

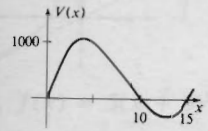


21. $k = -\frac{4}{3}$

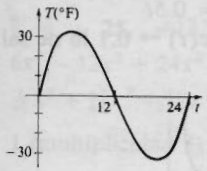
29. $P(x) > 0$ si $-\sqrt{15}/5 < x < 0$ o bien $x > \sqrt{15}/5$; $P(x) < 0$ si $x < -\sqrt{15}/5$ o bien $0 < x < \sqrt{15}/5$



31. $V(x) > 0$ si $0 < x < 10$ o si $x > 15$ (lo cual no es posible)



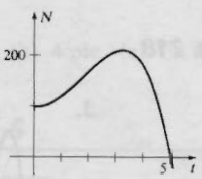
33. (a) $T > 0$ para $0 < t < 12$; $T < 0$ para $12 < t < 24$



(b) $T(6) = 32.4$ y $T(7) = 29.75$

35. (a) $N > 0$ para $0 < t < 5$. La población se extinguirá a los 5 años

(b)



Ejercicios para Calculadora 4.2, pág. 184

En cada uno de los siguientes resultados existe una raíz (o un cero) entre los números indicados.

3. 2.51 y 2.52 **5.** −1.10 y −1.09

7. 1.331 y 1.332 **9.** −1.733 y −1.732

Ejercicios 4.3, pág. 189

1. $x^2 + x + 2, -2x + 13$ **3.** $\frac{5}{2}x, -\frac{9}{2}x$

5. $0, 7x^3 - 5x + 2$ **7.** $2x^2 + x + 6, 7$

9. $x^2 - 3x + 1, -8$

11. $3x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x + 36, -65$

13. $4x^3 + 2x^2 - 4x - 2, 0$

15. $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1, 0$

17. 95 **19.** −23 **21.** 0

23. −23 **25.** 3277 **27.** $8 + 7\sqrt{3}$

33. $k = \frac{17}{12}$ **35.** $f(2) = 0$ **37.** $f(c) > 0$

39. Si $f(x) = x^n - y^n$, entonces $f(y) = 0$. Si n es par, entonces $f(-y) = 0$.

Ejercicios 4.4, pág. 196

1. $-\frac{1}{15}x^3 + \frac{19}{15}x + 2$

3. $-2x^3 + 12x^2 - 22x + 12$

5. $\frac{3}{10}x^3 - \frac{33}{10}x + 6$

7. $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36$

9. $\frac{2}{9}x^8 - \frac{4}{3}x^7 + \frac{8}{3}x^6 - \frac{16}{9}x^5$

11. −4 (multiplicidad 3); $\frac{4}{3}$ (multiplicidad 1)

13. 0 (multiplicidad 3); 5, −1 (cada uno con multiplicidad 1)

15. $\pm\frac{5}{3}$ (cada uno con multiplicidad 4); $\pm 4i$ (cada uno con multiplicidad 1)

17. −2 (multiplicidad 3); 1 (multiplicidad 2); 2 (multiplicidad 1)

19. $(x + 3)^2(x + 2)(x - 1)$ **21.** $(x - 1)^5(x + 1)$

En los Ejercicios 23-29 se dan los tipos de posibles soluciones en el orden siguiente: positivo, negativo, no real complejo.

23. 3, 0, 0 o bien 1, 0, 2. **25.** 0, 1, 2

27. 2, 0, 2, 2, 2, 0; 0, 2, 2; o bien 0, 0, 4

29. 2, 3, 0; 2, 1, 2; 0, 3, 2; o bien 0, 1, 4

31. Superior 5, inferior −2

33. Superior 2, inferior −2

35. Superior 3, inferior −3

Ejercicios 4.5, pág. 203

1. $x^2 - 8x + 17$ **3.** $x^3 - 10x^2 + 37x - 52$

5. $x^4 - 6x^3 + 30x^2 - 78x + 85$

7. $x^5 - 2x^4 + 27x^3 - 50x^2 + 50x$

9. No. Si i es una raíz, entonces $-i$ también es una raíz. Por lo tanto, el polinomio tendría como factores a $x - 1$, $x + 1$, $x - i$, $x + i$ y, por consiguiente, sería de grado mayor que 3.

11. $-1, -2, 4$ **13.** $2, -3, \frac{5}{2}$

15. $4, -7, \pm\sqrt{2}$ **17.** $4, -2, \frac{3}{2}$
19. $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -3$ **21.** $-\frac{3}{4}, (-3 \pm 3\sqrt{7}i)/4$
23. $4, -3, \pm\sqrt{3}i$ **25.** $1, -2, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}$
27. $3, -4, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

37. Las raíces (o ceros) complejas se presentan en pares conjugados.

41. Las dos cajas corresponden a $x = 5$ y a $x = 5(2 - \sqrt{2})$. La caja que corresponde a $x = 5$ tiene el área superficial menor.

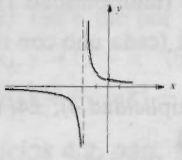
43. $t = 4$ (10 A.M.) y 6.2020 (12:12 P.M.)

45. (c) El triángulo tiene catetos de longitud 5 pie y 12 pie.

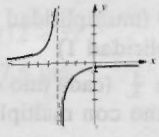
47. (b) $x = 4$ pie

Ejercicios 4.6, pág. 216

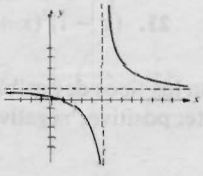
1.



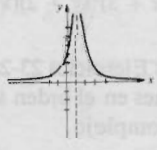
3.



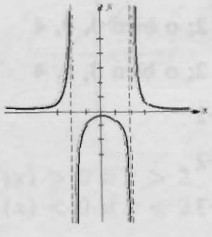
5.



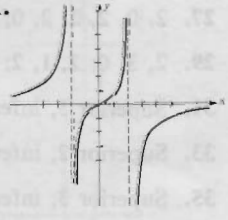
7.



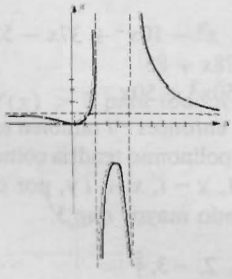
9.



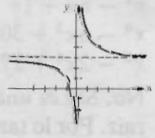
11.



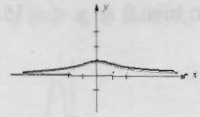
13.



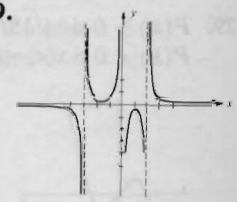
15.



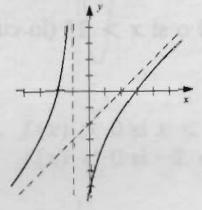
17.



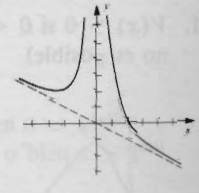
19.



21. Vertical: $x = -1$
oblicua: $y = x - 2$.



23. Vertical: $x = 0$
oblicua: $y = -\frac{1}{2}x$

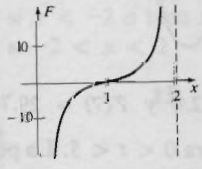


25. (a) $h = \dfrac{16}{(r + 0.5)^2} - 1$

(c) $r < 0$ y $r > 3.5$ debe excluirse.

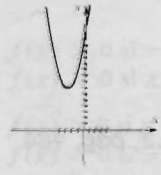
27. (a) $V = 50 + 5t$, $A = 0.5t$
(c) Conforme $t \to \infty$, $c(t) \to 0.1$ lb de sal por galón.

29. (b)

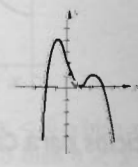


Ejercicios 4.7, pág. 218

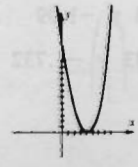
1.



3.



5.



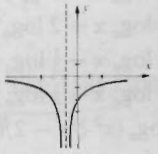
7.



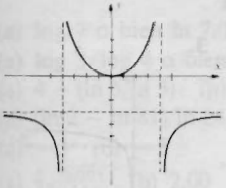
9.



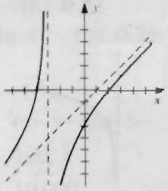
11.



13.



15. Vertical: $x = -3$
oblicua: $y = x - 1$.



17. $f(x) = 5(x + 3)^2 + 4$; mín: $f(-3) = 4$

19. El radio de la semicircunferencia es $1/(8\pi)$ mi; la longitud del rectángulo es $\frac{1}{8}$ mi

21. $3x^2 + 2$, $-21x^2 + 5x - 9$

23. $\frac{9}{2}$, $\frac{53}{2}$ **25.** -132

27. $6x^4 - 12x^3 + 24x^2 - 52x + 104$, -200

29. $\frac{2}{41}x^3 + \frac{14}{41}x^2 + \frac{80}{41}x + \frac{68}{41}$ **31.** $x^7 + 6x^6 + 9x^5$

33. 1 (multiplicidad 5); -3 (multiplicidad 1)

35. (a) 3 positivas y 1 negativa o 1 positiva, 1 negativa y 2 no reales complejas.
(b) Cota superior 3; cota inferior -1.

39. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}$

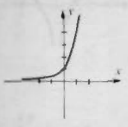
41. El cobertizo mide 12.5 pie de altura y 10 pie de largo.

43. (a) 1 s (b) 4 pie (c) En la Luna, 6 s y 24 pie

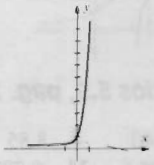
CAPÍTULO 5

Ejercicios 5.1, pág. 227

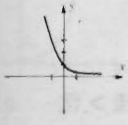
1.



3.



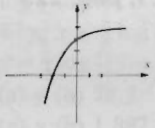
5.



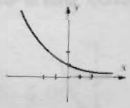
7.



9.



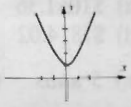
11.



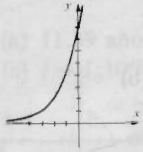
13.



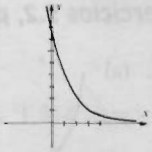
15.



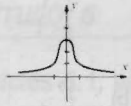
17.



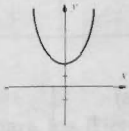
19.



21.



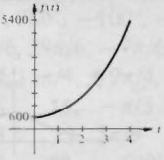
23.



25. (a) 90 (b) 59 (c) 35

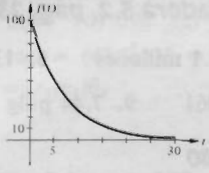
27. (a) 1039; 3118; 5400

(b)



29. (a) 50 g, 25 g, $(100)2^{-5/2} \approx 17.7$ g

(b)



31. $-1/1600$

33. (a) \$1010.00 (b) \$1020.10 (c) \$1061.52 (d) \$1126.83

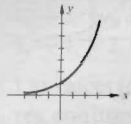
35. (a) \$7800 (b) \$4790 (c) \$2942

37. a^x no siempre es real si $a < 0$

39. Reflexión con respecto al eje x

Ejercicios para Calculadora 5.1, pág. 229

1.



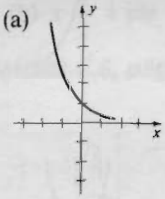
3. (a) \$1061.36 (b) \$1126.49 (c) \$1346.86 (d) \$1814.02

5. (a) 5 años (b) 8 años (c) 12.5 años

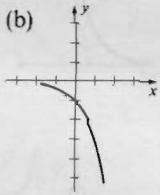
7. \$530.90

Ejercicios 5.2, pág. 234

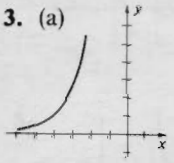
1. (a)



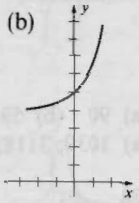
(b)



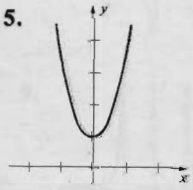
3. (a)



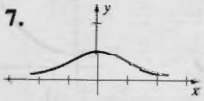
(b)



5.



7.



9. -1 **11.** $0, -\frac{3}{4}$ **13.** $4/(e^x + e^{-x})^2$

Ejercicios para Calculadora 5.2, pág. 234

1. 27.43 g **3.** 261.1 millones **5.** 13.5%

7. (a) 8788 (b) 14 061 **9.** 7.44 pulg

Ejercicios 5.3, pág. 240

1. $\log_4 64 = 3$ **3.** $\log_2 128 = 7$

5. $\log_{10}(0.001) = -3$ **7.** $\log_t s = r$

9. $10^3 = 1000$ **11.** $3^{-5} = \frac{1}{243}$ **13.** $7^0 = 1$

15. $t^p = r$ **17.** -2 **19.** 2 **21.** 5

23. 13 **25.** 27 **27.** $\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}$ **29.** $\frac{2}{2}$

31. No hay solución **33.** 1

35. $2\log_a x + \log_a y - 3\log_a z$

37. $\frac{1}{2}\log_a x + 2\log_a z - 4\log_a y$

39. $\frac{2}{3}\log_a x - \frac{1}{3}\log_a y - \frac{5}{3}\log_a z$

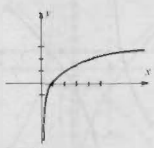
41. $\frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{4}\log_a y + \frac{3}{4}\log_a z$

43. $\log_a (x^2 \sqrt[3]{x-2}/(2x+3)^5)$ **45.** $\log_a (x^4/y^{5/3})$

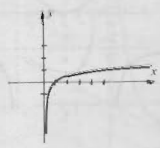
47. $t = -1600 \log_2 (q/q_0)$ **49.** $t = \log_3 (N/10^4)$

Ejercicios 5.4, pág. 243

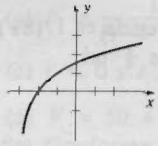
1.



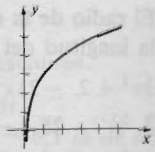
3.



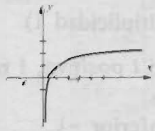
5.



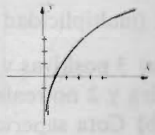
7.



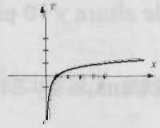
9.



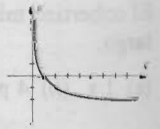
11.



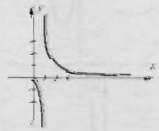
13.



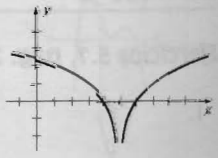
15.



17.



19.



Ejercicios 5.5, pág. 248

1. 4240 **3.** 8.85 **5.** 0.0237 **7.** 9.97

9. 1.05 **11.** 0.202 **13.** (a) 2 (b) 4 (c) 5

15. $A = 10^{(R+7.5)/2.3} - 34{,}000$

17. (a) 10 (b) 30 (c) 40

19. (a) 2.2 (b) 5 (c) 8.3

21. Ácida si pH < 7, básica si pH > 7

23. $t = -(L/R)\ln(I/20)$
25. $h = (\ln 29 - \ln P)/0.000034$
27. $W = 2.4e^{1.84h}$
29. (a) $n = 10^{7.7-0.9R}$ (b) 12 589; 1585 200
31. 110 días **33.** 139 meses
35. En el año 2079

Ejercicios 5.6, pág. 253

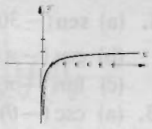
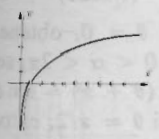
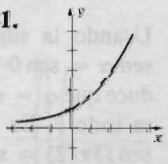
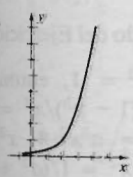
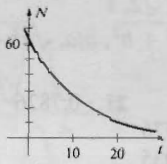
1. (a) log 7 o bien ln 7/ln 10 (b) 0.85
3. (a) log 3/log 4 o bien ln 3/ln 4 (b) 0.79
5. (a) $4 - (\ln 5/\ln 3)$ (b) 2.54
7. (a) $(\ln 2 - \ln 81)/\ln 24$ (b) -1.16
9. (a) -3 (b) -3 **11.** (a) 5 (b) 5
13. (a) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{100t}{111}}$ (b) 2.00 **15.** 100, 1
17. 10^{100} **19.** 10,000
21. $x = \log(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$
23. $= \frac{1}{2}\log[(1 + y)/(1 - y)]$
25. $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$
27. $x = \frac{1}{2}\ln[(1 + y)/(1 - y)]$
29. $t = -(L/R)\ln(1 - RI/E)$
31. 86.4 m **33** (a) 7.21 h (b) 3.11 h

Ejercicios 5.7, pág. 255

1. -4 **3.** 4 **5.** 6 **7.** $\frac{1}{2}$ **9.** 5
11.

13.

15.

17.

19.

21.

23.

25. 9 **27.** 1 **29.** $\log\frac{16}{3}/\log 2$
31. $\log\frac{3}{8}/\log\frac{32}{9}$ **33.** 0, 1, -1
35. $4\log x + \frac{2}{3}\log y - \frac{1}{3}\log z$
37. $x = \frac{1}{2}\log[(y + 1)/(y - 1)]$
39. (a) y (b) 78.3 **41.** (a) y (b) 6.05
43. (a) y (b) 1.887
45. 2000; $2000\sqrt[6]{3} \approx 2401$; $2000\sqrt{3} \approx 3464$; 6000
47.


49. (a) 11.39 años (b) 6.3 años
51. (a) $I = I_0 10^{\alpha/10}$
53. $t = -\frac{1}{k}\ln\frac{a - y}{ab}$ **55.** 1.814 años

CAPÍTULO 6

Ejercicios 6.1, pág. 265

Existen otras respuestas posibles para los Ejercicios 1-11.

1. 480°, 840°, $-240°$, $-600°$
3. 495°, 855°, $-225°$, $-585°$
5. 330°, 690°, $-390°$, $-750°$
7. 260°, 980°, $-100°$, $-460°$
9. $17\pi/6$, $29\pi/6$, $-7\pi/6$, $-19\pi/6$
11. $7\pi/4$, $15\pi/4$, $-9\pi/4$, $-17\pi/4$
13. $5\pi/6$ **15.** $-\pi/3$ **17.** $5\pi/4$ **19.** $5\pi/2$
21. $2\pi/5$ **23.** $5\pi/9$ **25.** 120° **27.** 330°
29. 135° **31.** $-630°$ **33.** 1260° **35.** 20°
37. 114°35′30″ **39.** 286°28′44″ **41.** 37.6833°
43. 115.4408° **45.** 63°10′8″
47. 310°37′17″ **49.** (a) 1.75 (b) 100.27°
51. 6.98 m **53.** 8.59 km
55. Aproximaciones (en millas): (a) 4189 (b) 3142 (c) 2094 (d) 698 (e) 70
57. $\frac{1}{8}$ rad $= (45/2\pi)° \approx 7°10'$ **59.** 7.162°
61. $\theta_2 = (r_1/r_2)\theta_1$

Ejercicios 6.2, pág. 272

Las respuestas a los Ejercicios 1 a 17 están en el orden de sen, cos, tan, csc, sec, cot.

1. $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}$
3. $2\sqrt{13}/13, 3\sqrt{13}/13, \frac{2}{3}, \sqrt{13}/2, \sqrt{13}/3, \frac{3}{2}$
5. $\frac{2}{5}, \sqrt{21}/5, 2\sqrt{21}/21, \frac{5}{2}, 5\sqrt{21}/21, \sqrt{21}/2$

7. $a/\sqrt{a^2+b^2}$, $b/\sqrt{a^2+b^2}$, a/b, $\sqrt{a^2+b^2}/a$, $\sqrt{a^2+b^2}/b$, b/a
9. b/c, $\sqrt{c^2-b^2}/c$, $b/\sqrt{c^2-b^2}$, c/b, $c/\sqrt{c^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-b^2}/b$
11. $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}$
13. $\sqrt{11}/6, \frac{5}{6}, \sqrt{11}/5, 6\sqrt{11}/11, \frac{6}{5}, 5\sqrt{11}/11$
15. $\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 1$
17. $b/\sqrt{a^2+b^2}$, $a/\sqrt{a^2+b^2}$, b/a, $\sqrt{a^2+b^2}/b$, $\sqrt{a^2+b^2}/a$, a/b
19. No; $0 < \operatorname{sen}\theta < 1$ **21.** 0.7826 **23.** 6.197
25. 2.650 **27.** 0.7776
29. 0.4718 **31.** 1.035

Ejercicios para Calculadora 6.2, pág. 273

1. (a) 30.46° (b) 30°28′
3. (a) 74.88° (b) 74°53′
5. (a) 24.94° (b) 24°56′
7. (a) 76.38° (b) 76°23′
9. $P(\frac{1}{2}) = 0.479427\ldots$ y $\operatorname{sen}(\frac{1}{2}) = 0.4794255\ldots$

Ejercicios 6.3, pág. 276

1. $\cot\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}/\operatorname{sen}\theta$
3. $\sec\theta = 1/\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$
5. $\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1}$
7. $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1}/\sec\theta$

Las respuestas a los Ejercicios 11-13 están en el orden sen, cos, tan, csc, sec, cot.

11. $\sqrt{3}/2, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}/3, 2, \sqrt{3}/3$
13. $\frac{2}{3}, \sqrt{5}/3, 2\sqrt{5}/5, \frac{3}{2}, 3\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/2$

Ejercicios 6.4, pág. 282

1. $\beta = 60°$, $a = 20\sqrt{3}/3 \approx 12$, $c = 40\sqrt{3}/3 \approx 23$
3. $\alpha = 38°$, $b \approx 19$, $c \approx 24$
5. $\beta = 72°20'$, $b \approx 14.1$, $c \approx 14.8$
7. $\alpha = 18°9'$, $a \approx 78.67$, $c \approx 252.6$
9. $\alpha \approx 29°$, $\beta \approx 61°$, $c \approx 51$
11. $\alpha \approx 69°$, $\beta \approx 21°$, $a \approx 5.4$
13. $\beta = 52°14'$, $a \approx 396.7$, $c \approx 647.7$
15. $\alpha \approx 49°40'$, $\beta \approx 40°20'$, $b \approx 522$ **17.** 51°
19. 70.6 m **21.** 20.2 m **23.** 29.7 km
25. $d \approx 160$ m **27.** $192(\operatorname{sen}22°30') \approx 73.5$ cm
29. 9 659 pie **31.** 126 mi/h **33.** 28 400 pie
35. 55 mi S63°E **37.** 324 mi
39. (a) 58 pie (b) 27 pie
41. 30° **43.** 21.8° **45.** 3944 mi

Ejercicios para Calculadora 6.4, pág. 285

1. $\beta = 48.73°$, $b \approx 358.5$, $c \approx 476.9$
3. $\alpha \approx 52.94°$, $b \approx 0.3484$, $c \approx 0.5781$
5. $\alpha \approx 87.29°$, $a \approx 151{,}000$, $c \approx 151{,}200$
7. $c \approx 48.67$, $\alpha = 74.36°$, $\beta \approx 15.64°$
9. $\alpha \approx 60.97°$, $\beta \approx 29.03°$, $a \approx 4437$

Ejercicios 6.5, pág. 294

Las respuestas de los Ejercicios 1 a 9 están en el orden sen, cos, tan, csc, sec, cot.

1. $-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{3}$
3. $-5\sqrt{29}/29, -2\sqrt{29}/29, \frac{5}{2}, -\sqrt{29}/5, -\sqrt{29}/2, \frac{2}{5}$
5. $4\sqrt{17}/17, -\sqrt{17}/17, -4, \sqrt{17}/4, -\sqrt{17}, -\frac{1}{4}$
7. $-2\sqrt{53}/53, -7\sqrt{53}/53, \frac{2}{7}, -\sqrt{53}/2, -\sqrt{53}/7, \frac{7}{2}$
9. $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}$
11. 1, 0, —, 1, —, 0 **13.** 0, −1, 0, —, −1, —
15. 0, 1, 0, —, 1, — **17.** −1, 0, —, −1, —, 0
19. IV **21.** III **23.** II **25.** III **27.** I
29. No; $|\operatorname{sen} t| \leq 1$ **31.** No existe ninguno
33. (a) 60° (b) 20° (c) 70°
35. (a) 49°20′ (b) 45° (c) 80°35′
37. (a) $\pi/4$ (b) $\pi/3$ (c) $\pi/6$
39. (a) $\pi/4$ (b) $\pi/6$ (c) $2\pi/3$
41. (a) $\sqrt{3}/2$ (b) $-\sqrt{3}/2$ **43.** (a) −1 (b) −1
45. (a) $-2\sqrt{3}/3$ (b) −2
47. −0.8355 **49.** −3.5656 **51.** 2.443
53. 0.3616 **55.** 0.1048 **57.** −0.1426
59. 214°20′, 325°40′ **61.** 70°20′, 250°20
63. 153°40′, 206°20′ **65.** 48°40′, 311°20′

Ejercicios 6.6, pág. 301

1. (a) $\operatorname{sen}(-30°) = -\operatorname{sen}30° = -\frac{1}{2}$
(b) $\cos(-\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$
(c) $\tan(-\pi/6) = -\tan(\pi/6) = -\sqrt{3}/3$
3. (a) $\csc(-\theta) = 1/\operatorname{sen}(-\theta) = 1/(-\operatorname{sen}\theta) = -(1/\operatorname{sen}\theta) = -\csc\theta$

5. Usando la sugerencia con $\theta = 0$, obtenemos $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}0 = 0$. Como $0 < \alpha < 2\pi$, se deduce que $\alpha = \pi$ y de ahí $\operatorname{sen}(\theta + \pi) = \operatorname{sen}\theta$ para todo θ. En particular, si $\theta = \pi/2$, entonces $\operatorname{sen}(3\pi/2) = \operatorname{sen}(\pi/2)$, o bien $-1 = 1$, lo cual es absurdo.

7. Use $\csc\theta = 1/\operatorname{sen}\theta$ y el resultado del Ejercicio 5.

9. Si $y/x = a$, donde $x^2 + y^2 = 1$, entonces $\pm\sqrt{1-x^2}/x = a$. De ahí que $(1-x^2)/x^2 = a^2$ y $1 - x^2 = a^2x^2$ o bien $1 = a^2x^2 + x^2 = (a^2+1)x^2$. Por consiguiente, $x^2 = 1/(a^2+1)$ o sea $x = \pm 1/\sqrt{a^2+1}$. Si $a > 0$, tome el pun-

to $P(x, y)$ en U con $x = 1/\sqrt{a^2 + 1}$. Si $a < 0$ tome $P(x, y)$ tal que $x = -1/\sqrt{a^2 + 1}$. Por lo tanto, siempre hay un punto $P(x, y)$ en U tal que $y/x = a$.

11. $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$

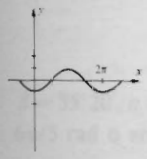
13. (a) $[-2\pi, -3\pi/2), (-3\pi/2, -\pi]$, $[0, \pi/2), (\pi/2, \pi]$
(b) $[-\pi, -\pi/2), (-\pi/2, 0], [\pi, 3\pi/2), (3\pi/2, 2\pi]$
(c) $\sec\theta \to \infty$ conforme $\theta \to (\pi/2)^-$; $\sec\theta \to -\infty$ conforme $\theta \to (\pi/2)^+$
(d) simétrica con respecto al eje y

Ejercicios 6.7, pág. 307

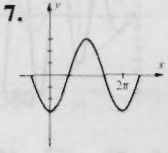
1. Las amplitudes y periodos son:
(a) 4, 2π (b) 1, $\pi/2$ (c) $\frac{1}{4}$, 2π (d) 1, 8π
(e) 2, 8π (f) $\frac{1}{2}$, $\pi/2$ (g) 4, 2π (h) 1, $\pi/2$

3. Las amplitudes y periodos son:
(a) 3, 2π (b) 1, $2\pi/3$ (c) $\frac{1}{3}$, 2π (d) 1, 6π
(e) 2, 6π (f) $\frac{1}{3}$, π (g) 3, 2π (h) 1, $2\pi/3$

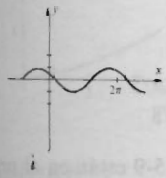
5.



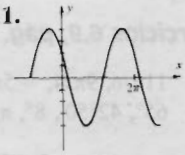
7.



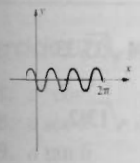
9.



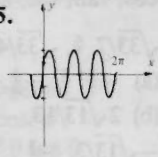
11.



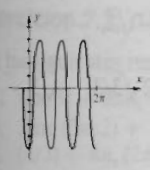
13.



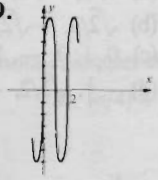
15.



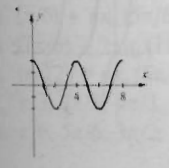
17.



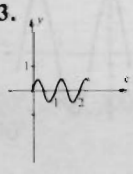
19.



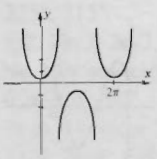
21.



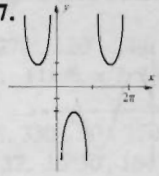
23.



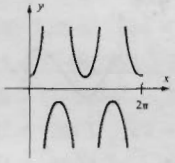
25.



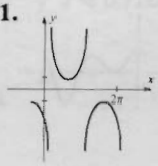
27.



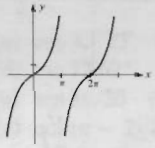
29.



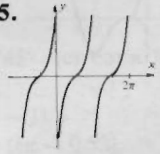
31.



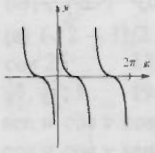
33.



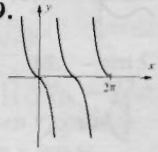
35.



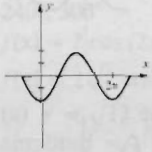
37.



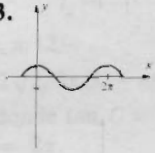
39.



41.



43.



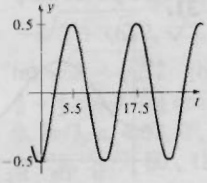
45. (a) Periodo, 2π; amplitud, 4
(b) $y = 4 \operatorname{sen}(x - \pi)$ (c) π

47. (a) Periodo, π; amplitud, 3
(b) $y = 3 \operatorname{sen}(2x - 3\pi/2)$ (c) $3\pi/4$

49. 4π

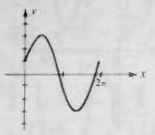
51. $y = 8 \operatorname{sen} 4\pi t$ durante la fase sistólica.

53.

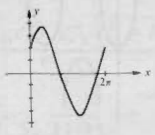


Ejercicios 6.8, pág. 313

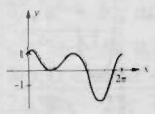
1.



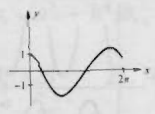
3.



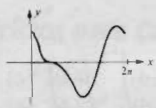
5.



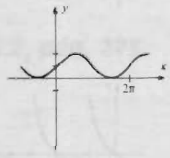
7.



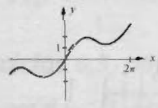
9.



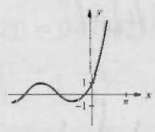
11.



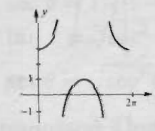
13.



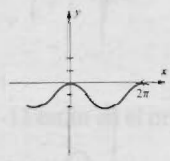
15.



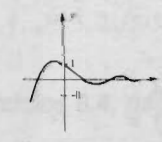
17.



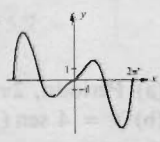
19.



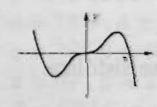
21.



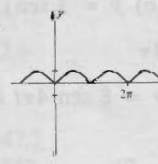
23.



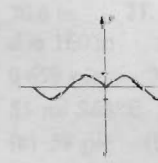
25.



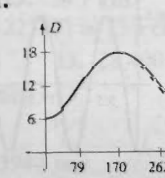
27.



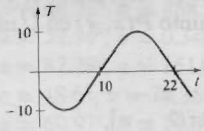
29.



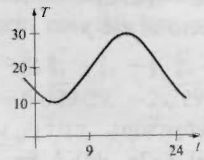
31.



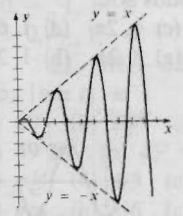
33. (a) $f(t) = 10 \operatorname{sen}[(\pi/12)(t - 10)]$



35. (a) $f(t) = 10 \operatorname{sen}[(\pi/12)(t - 9)] + 20$



37.



Ejercicios 6.9, pág. 314

1. $11\pi/6, 9\pi/4, -5\pi/6, 4\pi/3, \pi/5$

3. $65°, 42°50', 8°, \pi/4, \pi/6, \pi/8$

Las respuestas a los Ejercicios 5-9 están en el orden sen, cos, tan, csc, sec, cot.

5. $\sqrt{33}/7, \frac{4}{7}, \sqrt{33}/4, 7\sqrt{33}/33, \frac{7}{4}, 4\sqrt{33}/33$

7. (a) $-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{3}{4}$

(b) $2\sqrt{13}/13, -3\sqrt{13}/13, -\frac{2}{3}, \sqrt{13}/2, -\sqrt{13}/3, -\frac{3}{2}$

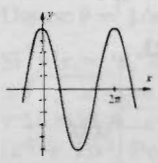
9. (a) 1, 0, —, 1, —, 0

(b) $\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1$

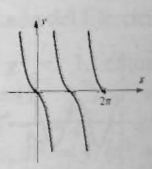
(c) 0, 1, 0, —, 1, —

(d) $-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/3, -2, 2\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}$

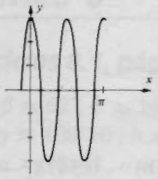
11.



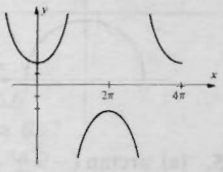
13.



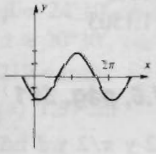
15.



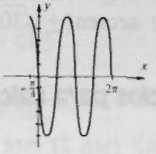
17.



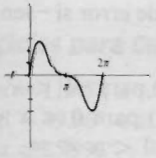
19.



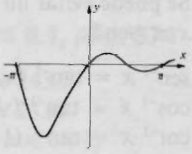
21.



23.



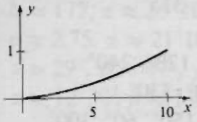
25.



27. $\beta = 35°20'$, $a \approx 310$, $c \approx 380$

29. $6\pi/5$ rad o sea 216

31.



33. 52° **35.** 250 pie

CAPÍTULO 7

Ejercicios 7.1, pág. 321

101. $a^3 \cos^3 \theta$ **103.** $a \tan \theta \operatorname{sen} \theta$
105. $a \sec \theta$ **107.** $(1/a^2) \cos^2 \theta$
109. $a \tan \theta$ **111.** $a^4 \sec^3 \theta \tan \theta$

Ejercicios 7.2, pág. 328

En las siguientes respuestas, n denota cualquier entero.

1. $(2\pi/3) + 2\pi n$, $(4\pi/3) + 2\pi n$ **3.** $(\pi/4) + (\pi/2)n$
5. $2\pi n$, $(3\pi/2) + 2\pi n$
7. $(\pi/3) + \pi n$, $(2\pi/3) + \pi n$
9. $(4\pi/3) + 2\pi n$, $(5\pi/3) + 2\pi n$
11. $(\pi/6) + \pi n$, $(5\pi/6) + \pi n$
13. $(7\pi/6) + 2\pi n$, $(11\pi/6) + 2\pi n$
15. $(\pi/12) + n\pi$, $(5\pi/12) + n\pi$
17. $\pi/3$, $2\pi/3$, $4\pi/3$, $5\pi/3$; 60°, 120°, 240°, 300°
19. $\pi/6$, $5\pi/6$, $3\pi/2$; 30°, 150°, 270°
21. 0, π, $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $7\pi/4$; 0°, 180°, 45°, 135°, 225°, 315°
23. $\pi/2$, $3\pi/2$, $2\pi/3$, $4\pi/3$; 90°, 270°, 120°, 240°
25. No hay soluciones **27.** $11\pi/6$, $\pi/2$; 330° 90°
29. 0, $\pi/2$; 0°, 90° **31.** 0; 0°
33. $7\pi/6$, $11\pi/6$, $\pi/2$, $3\pi/2$; 210°, 330°, 90°, 270°
35. $3\pi/4$, $7\pi/4$; 135°, 315° **37.** 15°30′, 164°30′
39. 41°50′, 138°10′, 194°30′, 345°30′
41. 6.145 min **43.** $t \approx 0.29D$ y $t \approx 0.71D$
45. (a) 3.29 h (b) 4 h
47. $A = (-4\pi/3, \sqrt{3}/2 - 2\pi/3)$,
$B = (-2\pi/3, -\sqrt{3}/2 - \pi/3)$,
$C = (2\pi/3, \sqrt{3}/2 + \pi/3)$,
$D = (4\pi/3, 2\pi/3 - \sqrt{3}/2)$

Ejercicios 7.3, pág. 336

1. (a) $\cos 43°23'$ (b) $\operatorname{sen} 16°48'$ (c) $\cot \pi/3$
(d) $\csc 72.62°$
3. (a) $\operatorname{sen} 3\pi/20$ (b) $\cos(2\pi - 1)/4$
(c) $\cot(\pi - 2)/2$ (d) $\sec(\frac{1}{2}\pi - 0.53)$
5. (a) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})/2$ (b) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$
7. (a) $\sqrt{3} + 1$ (b) $-2 - \sqrt{3}$
9. (a) $(\sqrt{2} - 1)/2$ (b) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$
11. $\cos 25°$ **13.** $\operatorname{sen}(-5°)$ **15.** $-\operatorname{sen} 5$
17. $\frac{36}{85}, \frac{77}{85}$; I **19.** $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}, -\frac{117}{125}, \frac{44}{125}, -\frac{117}{44}$
41. $\operatorname{sen} u \cos v \cos w + \cos u \operatorname{sen} v \cos w + \cos u \cos v \operatorname{sen} w - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w$.
49. 0, $\pi/3$, $2\pi/3$, π, $4\pi/3$, $5\pi/3$; 0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°
51. $f(x) = 2\cos(2x - \pi/6)$; 2, π, $\pi/12$
53. $f(x) = 2\sqrt{2}\cos(3x + \pi/4)$; $2\sqrt{2}$, $2\pi/3$, $-\pi/12$
55. (a) $y = \sqrt{13}\cos(t - C)$, donde $\tan C = \frac{3}{2}$; amplitud $= \sqrt{13}$, periodo $= 2\pi$.
(b) $t = C + (\pi/2) + n\pi \approx 2.5536 + n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
57. $y = 10\sqrt{41}\cos(60\pi t - C)$, donde $\tan C = \frac{5}{4}$; o bien $y \approx 10\sqrt{41}\cos(60\pi t - 0.8961)$.
59. (b) $h \approx 4.69$ mi

Ejercicios 7.4, pág. 344

1. $\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, -\frac{24}{7}$ **3.** $-4\sqrt{2}/9, -\frac{7}{9}, 4\sqrt{2}/7$
5. $\sqrt{10}/10, 3\sqrt{10}/10, \frac{1}{3}$
7. $-\sqrt{2 + \sqrt{2}}/2, \sqrt{2 - \sqrt{2}}/2, -\sqrt{2} - 1$
9. (a) $\sqrt{2 - \sqrt{2}}/2$ (b) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}/2$ (c) $\sqrt{2} + 1$
29. $\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{8}\cos 2\theta$
31. 0, $2\pi/3$, π, $4\pi/3$; 0°, 120°, 180°, 240°
33. $\pi/3$, π, $5\pi/3$; 60°, 180°, 300° **35.** 0, π; 0°, 180°

37. $0, \pi/3, 5\pi/3$; $0°, 60°, 300°$
41. (a) 1.20, 5.09 (b) $P = (2\pi/3, -1.5)$, $Q = (\pi, -1)$, $R = (4\pi/3, -1.5)$
43. (a) $-3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2$
(b) $0, \pm\pi/4, \pm 3\pi/4, \pm\pi, \pm 5\pi/4, \pm 7\pi/4, \pm 2\pi$
45. (b) Si, el punto de desviación B está a 25 millas de A.
47. 24.30° y 65.70°

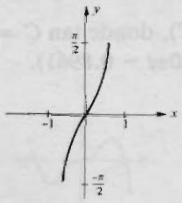
Ejercicios 7.5, pág. 350

1. $\operatorname{sen} 12\theta + \operatorname{sen} 6\theta$ **3.** $\frac{1}{2}\cos 4t - \frac{1}{2}\cos 10t$
5. $\frac{1}{2}\cos 10u + \frac{1}{2}\cos 2u$ **7.** $\frac{3}{2}\operatorname{sen} 3x + \frac{3}{2}\operatorname{sen} x$
9. $2\cos 2\theta \operatorname{sen} 4\theta$ **11.** $-2\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} x$
13. $-2\cos 5t \operatorname{sen} 2t$ **15.** $2\cos \frac{3}{2}x \cos \frac{1}{2}x$
25. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(a+b)x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(a-b)x$
27. $n\pi/4$, donde n es cualquier entero.
29. $n\pi/2$, donde n es cualquier entero.
37. $\pi/4, \pi/2, 3\pi/4, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4$
39 $\pm\pi/4, \pm 3\pi/4, \pm\pi, \pm 5\pi/4, \pm 7\pi/4, \pm 2\pi$
41. $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}[(n\pi/L)(x+kt)] + \frac{1}{2}\operatorname{sen}[(n\pi/L)(x-kt)]$

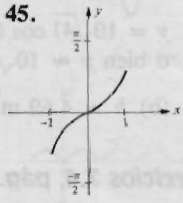
Ejercicios 7.6, pág. 359

1. (a) $\pi/6$ (b) $\pi/6$ **3.** (a) 0 (b) 0
5. (a) $-\pi/2$ (b) π **7.** (a) $\pi/3$ (b) $-\pi/3$
9. (a) 0.9745 (b) 0.974478
11. (a) -0.7069 (b) -0.7067952
13. (a) 1.1403 (b) 1.1402832
15. $\sqrt{3}/2$ **17.** $\frac{3}{5}$ **19.** $-\pi/4$
21. 0 **23.** $-\frac{77}{36}$ **25.** $-\frac{24}{25}$
27. $x\sqrt{1+x^2}/(1+x^2)$ **29.** $\sqrt{2+2x}/2$
39. $\cot^{-1} u = v$ si y sólo si $\cot v = u$.
41. $\csc^{-1} u = v$ si y sólo si $\csc v = u$.

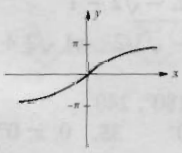
43.



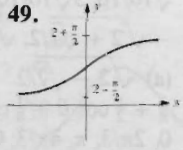
45.



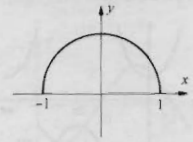
47.



49.



51.



55. (a) $\arctan(-9 \pm \sqrt{57})/4$ (b) $-0.3478, -1.3336$
57. (a) $\arccos(\pm\sqrt{15}/5)$, $\arccos(\pm\sqrt{3}/3)$
(b) 0.6847, 2.4569, 0.9553, 2.1863
59. (a) $\operatorname{arcsen}(\pm\sqrt{30}/6)$ (b) ± 1.1503

Ejercicios para Calculadora 7.6, pág. 361

1. $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} 2)$ está entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ y 2 no está en $[-\pi/2, \pi/2]$. $\cos^{-1}(\cos 2)$ está entre 0 y π. Por lo tanto $\cos^{-1}(\cos 2) = 2$.

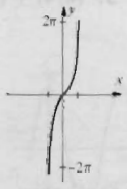
3. Se puede evitar un mensaje de error si $-\operatorname{sen} 1 \le x \le \operatorname{sen} 1$.

5. $\operatorname{sen}^{-1} x = \tan^{-1}(x/\sqrt{1-x^2})$ para $-1 < x < 1$;
$\cos^{-1} x = \tan^{-1}(\sqrt{1-x^2}/x)$ para $0 < x < 1$;
$\cot^{-1} x = \tan^{-1}(1/x)$ para $0 < x < \infty$

Ejercicios 7.7, pág. 361

17. $\pi/2, 3\pi/2, \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$;
$90°, 270°, 45°, 135°, 225°, 315°$
19. $0, \pi$; $0°, 180°$
21. $0, \pi, 2\pi/3, 4\pi/3$; $0°, 180°, 120°, 240°$
23. $\pi/2, 7\pi/6, 11\pi/6$; $90°, 210°, 330°$
25. $\pi/6, 5\pi/6, \pi/3, 5\pi/3$; $30°, 150°, 60°, 300°$
27. $\pi/3, 5\pi/3$; $60°, 300°$
29. $\sqrt{2-\sqrt{3}}/2$ o bien $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$
31. $-\sqrt{2-\sqrt{3}}/2$ o bien $(\sqrt{2}-\sqrt{6})/4$ **33.** $\frac{84}{85}$
35. $-\frac{36}{77}$ **37.** $\frac{240}{289}$ **39.** $\frac{24}{7}$ **41.** $\frac{1}{3}$
43. (a) $\frac{1}{2}\cos 3t - \frac{1}{2}\cos 11t$
(b) $\frac{1}{2}\cos \frac{1}{12}u + \frac{1}{2}\cos \frac{5}{12}u$
(c) $3\operatorname{sen} 8x - 3\operatorname{sen} 2x$
45. $5\pi/6$ **47.** π **49.** $\frac{1}{2}$
51. $-\frac{7}{25}$ **53.** $\pi/2$

55.



57. (b) $t = 0, \pm\pi/4b$ (c) $\frac{2}{3}\sqrt{2}A$
59. (a) $x = 2d(1-\cos\theta)/\operatorname{sen}\theta$ (b) $d \le 1000$ pie

CAPÍTULO 8

Ejercicios 8.1, pág. 371

1. $\beta \approx 62°$, $b \approx 14.1$, $c \approx 15.6$
3. $\gamma \approx 100°10'$, $b \approx 55.1$, $c \approx 68.7$
5. $\alpha \approx 58°40'$, $a \approx 487$, $b \approx 442$
7. $\beta \approx 53°40'$, $\gamma \approx 61°10'$, $c \approx 20.6$
9. $\alpha \approx 77°30'$, $\beta \approx 49°10'$, $b \approx 108$; $\alpha \approx 102°30'$, $\beta = 24°10'$, $b \approx 58.7$
11. $\alpha \approx 20°30'$, $\gamma \approx 46°20'$, $a \approx 94.5$
13. 219 yardas
15. (a) 1.57 mi (b) 0.56 mi
17. 2.7 mi
19. 3.7 mi desde A y 5.4 mi desde B.
21. 628 m **23.** 350 pie **25.** 18.7, 814

Ejercicios para Calculadora 8.1, pág. 374

1. $\alpha = 119.7°$, $a \approx 371.5$, $c \approx 243.5$
3. $\beta = 49.36°$, $a \approx 49.78$, $c \approx 23.39$
5. $\alpha \approx 25.993°$, $\gamma = 32.383°$, $a \approx 0.146$

Ejercicios 8.2, pág. 379

1. $a \approx 26$, $\beta \approx 41°$, $\gamma \approx 79°$
3. $b \approx 177$, $\alpha \approx 25°10'$, $\gamma \approx 4°50'$
5. $c \approx 2.75$, $\alpha \approx 21°10'$, $\beta \approx 43°40'$
7. $\alpha \approx 29°$, $\beta \approx 47°$, $\gamma = 104°$
9. $\alpha \approx 12°30'$, $\beta \approx 136°30'$, $\gamma = 31°$
11. 196 pie **13.** 24 mi **15.** 39 mi
17. Aproximadamente 2.3 mi
19. Aproximadamente N55°31'E.
21. 63.7 pie desde la primera y la tercera bases; 66.8 pie desde la segunda base.
23. 40 630 pie o 7.7 mi
25. (a) 72°, 181.6 pie^2 (b) 37.6 pie

Las respuestas a los Ejercicios 27 a 33 están en unidades cuadradas.

27. 260 **29.** 1125 **31.** 2.9 **33.** 517
35. 1.6 acres

Ejercicios para Calculadora 8.2, pág. 382

1. $a \approx 40.8$, $\beta \approx 26.9°$, $\gamma \approx 104.8°$
3. $c \approx 0.487$, $\beta \approx 5.11°$, $\alpha \approx 168.04°$
5. $\alpha \approx 157°16'$, $\beta \approx 7°49'$, $\gamma \approx 14°55'$

Ejercicios 8.3, pág. 385

1. 5 **3.** $\sqrt{85}$ **5.** 8 **7.** 1 **9.** 0

Las representaciones geométricas en los Ejercicios 11 a 19 son los puntos siguientes:

11. $P(4, 2)$ **13.** $P(3, -5)$ **15.** $P(-3, 6)$
17. $P(-6, 4)$ **19.** $P(0, 2)$
21. $\sqrt{2}(\cos 7\pi/4 + i \operatorname{sen} 7\pi/4)$
23. $8(\cos 5\pi/6 + i \operatorname{sen} 5\pi/6)$
25. $20(\cos 3\pi/2 + i \operatorname{sen} 3\pi/2)$
27. $10(\cos 4\pi/3 + i \operatorname{sen} 4\pi/3)$
29. $7(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$
31. $\sqrt{5}(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, donde $\theta = \arctan \frac{1}{2}$
33. $4\sqrt{2}(\cos 5\pi/4 + i \operatorname{sen} 5\pi/4)$
35. $6(\cos \pi/2 + i \operatorname{sen} \pi/2)$
37. $2(\cos 7\pi/6 + i \operatorname{sen} 7\pi/6)$
39. $12(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$ **41.** $-2, i$
43. $10\sqrt{3} - 10i, (-2\sqrt{3}/5) + \frac{2}{5}i$
45. $40, \frac{5}{2}$ **47.** $8 - 4i, \frac{8}{5} + \frac{4}{5}i$
49. $z_1 z_2 z_3 = r_1 r_2 r_3[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)]$,
$z_1 z_2 \cdots z_n = (r_1 r_2 \cdots r_n)[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$

Ejercicios 8.4, pág. 390

1. $-972 - 972i$ **3.** $-32i$ **5.** -8
7. $-(\sqrt{2}/2) - (\sqrt{2}/2)i$ **9.** $-\frac{1}{2} - (\sqrt{3}/2)i$
11. $-64\sqrt{3} - 64i$
13. $(\sqrt{6}/2) + (\sqrt{2}/2)i, -(\sqrt{6}/2) - (\sqrt{2}/2)i$
15. $(\sqrt[4]{2}/2) + (\sqrt[4]{18}/2)i, -(\sqrt[4]{18}/2) + (\sqrt[4]{4}/2)i$, $(\sqrt[4]{18}/2) - (\sqrt[4]{2}/2)i, -(\sqrt[4]{2}/2) - (\sqrt[4]{18}/2)i$
17. $3i, -(3\sqrt{3}/2) - \frac{3}{2}i, (3\sqrt{3}/2) - \frac{3}{2}i$
19. $\pm 1, \frac{1}{2} \pm (\sqrt{3}/2)i, -\frac{1}{2} \pm (\sqrt{3}/2)i$
21. $\sqrt[10]{2}(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, donde $\theta = 9°, 81°, 153°, 225°, 279°$
23. $\pm 2, \pm 2i$ **25.** $\pm 2i, \pm\sqrt{3} + i, \pm\sqrt{3} - i$
27. $2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$
29. $3 \cos \theta + (3 \operatorname{sen} \theta)i$, donde $\theta = 0, 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$

Ejercicios 8.5, pág. 398

1. $\langle 3, 1\rangle, \langle 1, -7\rangle, \langle 13, 8\rangle, \langle 3, -32\rangle$
3. $\langle -15, 6\rangle, \langle 1, -2\rangle, \langle -68, 28\rangle, \langle 12, -12\rangle$
5. $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, -2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}, 19\mathbf{i} - 17\mathbf{j}, -11\mathbf{i} + 33\mathbf{j}$
7. $-2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}, -6\mathbf{i} + 7\mathbf{j}, -6\mathbf{i} - 26\mathbf{j}, -26\mathbf{i} + 34\mathbf{j}$
9. $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, -15\mathbf{i} + 8\mathbf{j}, 15\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

Las respuestas para los Ejercicios 11 y 13 son los puntos terminales de los vectores.

11. $(3, 2), (-1, 5), (2, 7), (6, 4), (3, -15)$
13. $(-4, 6), (-2, 3), (-6, 9), (-8, 12), (6, -9)$
15. $\frac{1}{2}$a **17.** f **19.** $-\frac{1}{2}$e
37. $3\sqrt{2}, 7\pi/4$ **39.** $5, \pi$
41. $\sqrt{41}$, arccos $(-4\sqrt{41}/41)$ **43.** $18, 3\pi/2$
45. 89 kg, S66°W **47.** 5.8 lb, 129°
49. $\langle 40.96, 28.68\rangle$ **51.** $\langle -61.80, 190.21\rangle$
53. (a) $\mathbf{F} = \langle 7, 2\rangle$ (b) $\mathbf{G} = -\mathbf{F} = \langle -7, -2\rangle$
55. (a) $\mathbf{F} \approx \langle -5.86, 1.13\rangle$
(b) $\mathbf{G} = -\mathbf{F} \approx \langle 5.86, -1.13\rangle$
57. 23.58° **59.** 56°, 232 mi/h
61. 420 mi/h 244° **63.** N22°W

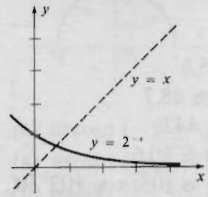
Ejercicios 8.6, pág. 402

1. $a = 50\sqrt{6}, c = 50(1 + \sqrt{3}), \gamma = 75°$
3. $a = \sqrt{43}, \beta = \arccos(4/\sqrt{43})$,
$\gamma = \arccos(5/2\sqrt{43})$
5. $\alpha = 38°, a \approx 8, b \approx 13$
7. $b \approx 10.1, \gamma \approx 41°, \alpha \approx 24°$ **9.** 289.8
11. $10\sqrt{2}(\cos 3\pi/4 + i \operatorname{sen} 3\pi/4)$
13. $17(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$
15. $10(\cos 7\pi/6 + i \operatorname{sen} 7\pi/6)$ **17.** $-512i$
19. $-972 + 972i$
21. $-3, \frac{3}{2} \pm (3\sqrt{3}/2)i$
23. Los puntos terminales son $(-2, -3)$, $(-6, 13)$, $(-8, 10)$, $(-1, 4)$.
25. Circunferencia con centro (a_1, a_2) y radio C.
27. $\langle 14 \cos 40°, -14 \operatorname{sen} 40°\rangle$ **29.** (b) 2 mi
31. (a) 448.52 pie $\approx$ 449 pie
(b) 434.45 pie $\approx$ 434 pie
33. (a) 102.6° (b) 37.4 pie (c) 290.3 pie

CAPÍTULO 9

Ejercicios 9.1, pág. 411

1. $(3, 5), (-1, -3)$ **3.** $(1, 0), (-3, 2)$
5. $(0, 0), (\frac{1}{8}, \frac{1}{128})$ **7.** $(3, -2)$
9. No hay soluciones
11. $(-4, 3), (5, 0)$ **13.** $(-2. 2)$
15. $((-6 - \sqrt{86})/10, (2 - 3\sqrt{86})/10)$,
$((-6 + \sqrt{86})/10, (2 + 3\sqrt{86})/10)$
17. $(-4, 0), (\frac{12}{5}, \frac{16}{5})$ **19.** $(0, 1), (4, -3)$
21. $(\pm 2, 5), (\pm\sqrt{5}, 4)$
23. $(\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{3}), (-\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{3})$
25. $(2\sqrt{2}, \pm 2), (-2\sqrt{2} \pm 2)$
27. $x = 3, y = -1, z = 2$
29. $(1, -1, 2), (-1, 3, -2)$ **31.** 8 pulg 12 pulg
33. Hay sólo una solución en $x \approx 0.6412$.



35. $r = 2$ pulg, $h = 50/\pi$ pulg.
37. (a) $a = 120{,}000$ y $b = 40{,}000$ (b) 77,143
39. $(0, 0)$, $(0, 100)$ y $(50, 0)$. La cuarta solución $(-100, 50)$ no tiene sentido.

Ejercicios 9.2, pág. 417

1. $(4, -2)$ **3.** $(8, 0)$ **5.** $(-1, \frac{3}{2})$
7. $(\frac{76}{53}, \frac{28}{53})$ **9.** $(\frac{51}{13}, \frac{96}{13})$ **11.** $(\frac{8}{7}, -3\sqrt{6}/7)$
13. No hay solución.
15. Todos los pares ordenados tales que $3m - 4n = 2$.
17. $(0, 0)$ **19.** $(-\frac{22}{7}, -\frac{11}{5})$
21. 313 estudiantes y 137 no estudiantes.
23. $x = (30/\pi) - 4 \approx 5.55$ y $y = 12 - (30/\pi) \approx 2.45$
25. $x = 20/\pi$ pie y $y = 10$ pie
27. \$6 650 a 6.5% y \$3 325 a 8%.
29. 40 g de aleación de 35%, 60 g de aleación de 60%.
31. 540 mi/h, 60 mi/h **33.** $v_0 = 10, a = 3$
35. 20 sofás y 30 reclinables.
37. (a) $(c, \frac{4}{5}c)$ para un valor arbitrario $c > 0$
(b) \$16 por hora.

Ejercicios 9.3, pág. 429

1. $(2, 3, -1)$ **3.** $(-2, 4, 5)$
5. No hay solución **7.** $(\frac{2}{3}, \frac{31}{21}, \frac{1}{21})$

Existen otras formas para las respuestas a los Ejercicios 9 a 15.

9. $(2c, -c, c)$ donde c es un número real
11. $(0, -c, c)$ donde c es un número real
13. $((12 - 9c)/7, (8c - 13)/14, c)$, donde c es un número real.

15. $((7c + 5)/10, (19c - 15)/10, c)$ donde c es un número real.
17. $(1, 3, -1, 2)$
19. $x = 2, y = -1, z = 3, s = 4, t = 1$
21. $(\frac{1}{11}, \frac{31}{11}, \frac{3}{11})$ 23. $(-2, -3)$
25. No hay solución.
27. 17 litros de 10%, 11 litros de 30%, 22 litros de 50%.
29. 4 h para A, 2 h para B, 5 h para C.
31. 380 lb de G_1, 60 lb de G_2, 160 lb de G_3.
33. (a) $I_1 = 0, I_2 = 2, I_3 = 2$
(b) $I_1 = \frac{3}{4}, I_2 = 3, I_3 = \frac{9}{4}$
35. (b) $\frac{5}{8}$ lb Colombia, $\frac{1}{8}$ lb Brasil, $\frac{1}{4}$ lb Kenia
37. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}$
39. $x^2 + y^2 - x + 3y - 6 = 0$

Ejercicios 9.4, pág. 436

1. $3/(x - 2) + 5/(x + 3)$
3. $5/(x - 6) - 4/(x + 2)$
5. $2/(x - 1) + 3/(x + 2) - 1/(x - 3)$
7. $(3/x) + 2/(x - 5) - 1/(x + 1)$
9. $2/(x - 1) + 5/(x - 1)^2$
11. $(-7/x) + (5/x^2) + 40/(3x - 5)$
13. $-\frac{23}{25}/(2x - 1) + \frac{24}{25}/(x + 2) + \frac{2}{5}/(x + 2)^2$
15. $(5/x) - 2/(x + 1) + 3/(x + 1)^3$
17. $-2/(x - 1) + (3x + 4)/(x^2 + 1)$
19. $(4/x) + (5x - 3)/(x^2 + 2)$
21. $(4x - 1)/(x^2 + 1) + 3/(x^2 + 1)^2$
23. $2x + 3x/(x^2 + 1) + 1/(x - 1)$
25. $(2x + 3) + 2/(x - 1) - 3/(2x + 1)$

Ejercicios 9.5, pág. 443

1. $\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 & -3 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -5 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ 4 & 0 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ 3 & -15 \\ -18 & 0 \end{bmatrix}$

5. $[11 \quad -3 \quad -3], [-3 \quad -3 \quad 7], [8 \quad -6 \quad 4], [-21 \quad 0 \quad 15]$

7. $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 7 & -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -7 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & -10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 0 & -3 & -9 \\ -6 & 0 & -21 & 6 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 16 & 38 \\ 11 & -34 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 38 \\ 23 & -22 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 3 & -14 & -3 \\ 16 & 2 & -2 \\ -7 & -29 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -20 & -11 \\ 2 & 10 & -4 \\ 15 & -13 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -18 & 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -5 & 2 & 2 \\ -51 & 26 & 10 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

17. $[15], \begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ -12 & 28 & 8 \\ 15 & -35 & -10 \end{bmatrix}$ 19. $\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 18 & 0 & -2 \\ -40 & 10 & -10 \end{bmatrix}$ 31. $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

33. No existe. 35. $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

37. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ 39. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

41. $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -8 & -7 & 4 & -9 \\ -8 & -4 & 4 & -6 \\ -4 & -5 & 2 & -3 \\ 6 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

43. $ab \neq 0; \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{bmatrix}$

47. $(\frac{13}{10}, -\frac{1}{10})$ 49. $(-\frac{25}{3}, -\frac{34}{3}, \frac{7}{3})$

Ejercicios 9.6, pág. 450

1. $M_{11} = -14, M_{21} = 7, M_{31} = 11, M_{12} = 10, M_{22} = -5, M_{32} = 4, M_{13} = 15, M_{23} = 34, M_{33} = 6;$ $A_{11} = -14, A_{21} = -7, A_{31} = 11, A_{12} = -10, A_{22} = -5, A_{32} = -4, A_{13} = 15, A_{23} = -34, A_{33} = 6$

3. $M_{11} = 0, M_{12} = 5, M_{21} = -1, M_{22} = 7;$
$A_{11} = 0, A_{12} = -5, A_{21} = 1, A_{22} = 7$
5. -83 **7.** 5 **9.** 2 **11.** 0
13. -125 **15.** 48 **17.** -216 **19.** *abcd*
31. (a) $x^2 - 3x - 4$ (b) $-1, 4$
33. (a) $x^2 + x - 2$ (b) $1, -2$
35. (a) $-x^3 - 2x^2 + x + 2$ (b) $1, -1, -2$
37. (a) $-x^3 + 4x^2 + 4x - 16$ (b) $4, 2, -2$
39. $-31i - 20j + 7k$ **41.** $-6i - 8j + 18k$

Ejercicios 9.7, pág. 455

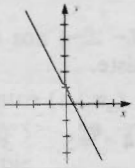
1. R_{23} **3.** $(-1)R_1 + R_3$
5. 2 es un factor común de los renglones 1 y 3.
7. Dos renglones son idénticos. **9.** $(-1)\mathbf{R}_2$
11. Todo número de la columna 2 es 0.
13. $2C_1 + C_3$
15. -10 **17.** -142 **19.** -183
21. 44 **23.** 359

Ejercicios 9.9, pág. 464

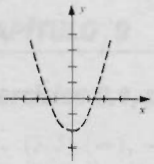
1.



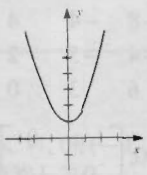
3.



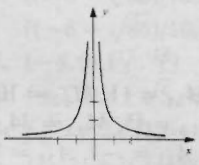
5.



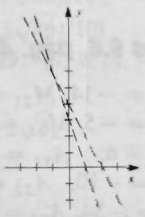
7.



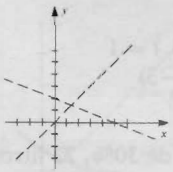
9.



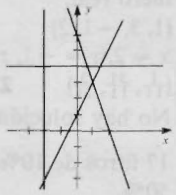
11.



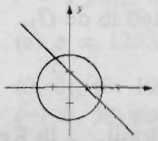
13.



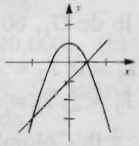
15.



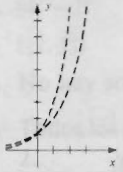
17.



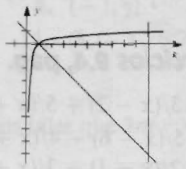
19.



21.



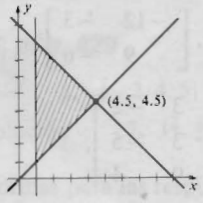
23.



25. Si x y y denotan los números de las marcas A y B, respectivamente, entonces $x \geq 20$, $y \geq 10$, $x \geq 2y$ y $x + y \leq 100$. La gráfica es la región delimitada por el triángulo con vértice (20, 10), (90, 10), $(\frac{200}{3}, (\frac{100}{3})$.

27. Si x y y denotan las cantidades en la primera y la segunda cuentas, respectivamente, entonces $x \geq 2000, y \geq 2000, y \geq 3x$ y $x + y \leq 15000$. La gráfica es la región delimitada por el triángulo con vértices (2000, 6000), (2000, 13000) y (3750, 11250).

29. $x + y \leq 9, y \geq x, x \geq 1$, en la que x = altura del cono y y = altura del cilindro.



31. Si la planta está ubicada en (x, y), entonces $3600 \leq x^2 + y^2 \leq 10{,}000$ y $3600 \leq (x - 100)^2 + y^2 \leq 10{,}000$ y $y \geq 0$ La gráfica es la región en el primer cuadrante que está entre las dos circunferencias concéntricas con

centro en (0, 0) y radios de 60 y 100, y también entre las dos circunferencias concéntricas con centro en (100, 0) y radios de 60 y 100.

Ejercicios 9.10, pág. 470

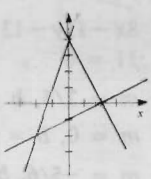
1. 50 Double Fault y 30 Set Point.
3. 3.51 lb de S y 1 lb de T.
5. Enviar 25 de W_1 a A y 0 de W_1 a B. Enviar 10 de W_2 a A y 60 de W_2 a B.
7. 0 acres de alfalfa y 80 acres de maíz.
9. Costo mínimo: 16 oz de X, 4 oz de Y, 0 oz de Z; Costo máximo: 0 oz de X, 8 oz de Y, 12 oz de Z.
11. 2 minibuses y 4 autobuses.
13. Dos respuestas dan un máximo de 12 000 lb. Tener 4000 lobinas o bien 3000 truchas y 2000 lobinas.
15. 60 unidades pequeñas y 20 unidades grandes.

Ejercicios 9.11, pág. 472

1. $(\frac{19}{23}, -\frac{18}{23})$ 3. $(-3, 5), (1, -3)$
5. $(2\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}), (-2\sqrt{3}, \pm\sqrt{2})$ 7. $(\frac{14}{17}, \frac{14}{27})$
9. $(\frac{6}{11}, -\frac{7}{11}, 1)$
11. $(-2c, -3c, c)$, en donde c es un número real.
13. $(5c - 1, (-19c + 5)/2, c)$, en donde c es un número real.
15. $(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$
17.



19.



21. -6 23. 48 25. -84
27. 120 29. 0
31. $a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$ 33. $\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$
35. $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{bmatrix}$
37. $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 4 & -11 & 5 \end{bmatrix}$ 39. $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 16 & 22 & 1 \\ 12 & 11 & 9 \end{bmatrix}$
41. $\begin{bmatrix} -12 & 4 & -11 \\ 6 & -11 & 5 \end{bmatrix}$ 43. $\begin{bmatrix} a & 3a \\ 2b & 4b \end{bmatrix}$
45. $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 13 & 19 \end{bmatrix}$ 49. $-1 \pm 2\sqrt{3}$
53. $8/(x - 1) - 3/(x + 5) - 1/(x + 3)$
55. El terreno mide $40\sqrt{5}$ pie por $20\sqrt{5}$ pie.
57. Impuesto = \$18,750; bonificación = \$3125.
59. Tubería A: 30 pie^3/h; tubería B: 20 pie^3/h; tubería C: 50 pie^3/h.
61. 80 podadoras y 30 orilladores

CAPÍTULO 10

Ejercicios 10.2, pág. 490

1. 9, 6, 3, 0, -3; -12 3. $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{7}{10}, \frac{10}{17}, \frac{13}{26}, \frac{22}{65}$
5. 9, 9, 9, 9, 9; 9
7. 1.9, 2.01, 1.999, 2.0001, 1.99999; 2.00000001
9. $4, -\frac{9}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{11}{8}, \frac{6}{5}; -\frac{15}{16}$ 11. 2, 0, 2, 0, 2; 0
13. $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{8}{9}, \frac{32}{27}, \frac{128}{83}$ 15. 1, 2, 3, 4, 5; 8
17. 2, 1, -2, -11, -38 19. $-3, 3^2, 3^4, 3^8, 3^{16}$
21. 5, 5, 10, 30, 120 23. $2, 2, 4, 4^3, 4^{12}$
25. $a_n = 2n + \frac{1}{24}(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)(a - 10)$ (Hay muchas otras respuestas.)
27. -5 29. 10 31. 25
33. $-\frac{17}{15}$ 35. 61 37. 10,000
39. $(n^3 + 6n^2 + 20n)/3$
41. $(4n^3 - 12n^2 + 11n)/3$
43. $\sum_{k=1}^{5}(4k - 3)$ 45. $\sum_{k=1}^{4} k/(3k - 1)$
47. $1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k x^{2k}/(2k)$ 49. $\sum_{k=1}^{7}(-1)^{k-1}/k$
51. $\sum_{n=1}^{99} 1/n(n + 1)$

Ejercicios para Calculadora 10.2, pág. 492

1. Los términos de la sucesión tienden a 1.
3. 3.142546543, 3.141592653, 3. 141592654, 3.141592654, 3.141592654; cuando $x_1 = 6$, los términos de la sucesión tienden a 2π.
5. 0.4, 0.7, 1, 1.6, 2.8
7. (a) $y_n = K$ para todo n.
   (b) 400, 560, 425.6, 552.3, 436.8, 547.2, 443.9, 543.5, 448.9, 540.7; los términos oscilan alrededor de 500.

Ejercicios 10.3, pág. 495

1. 18, 38, $4n - 2$ 3. 1.8, 0.3, $3.3 - 0.3n$

5. 5.4, 20.9, $(3.1)n - (10.1)$ **7.** $\ln 3^5, \ln 3^{10}, \ln 3^n$
9. -8.5 **11.** -9.8 **13.** -105
15. 30 **17.** 530 **19.** $\frac{423}{2}$
21. 60; 12,780 **23.** 24
25. $\frac{10}{3}, \frac{14}{3}, 6, \frac{22}{3}, \frac{26}{3}$ **27.** 255
29. 23.25, 22.5, 21.75, 21, 20.25, 19.5, 18.75
31. \$1200 **33.** Cuatro lados.

Ejercicios 10.4, pág. 502

1. $\frac{1}{2}, \frac{1}{16}; 8(\frac{1}{2})^{n-1} = 2^{4-n}$
3. $0.03, -0.00003; 300(-0.1)^{n-1}$
5. $3125, 5^8; 5^n$
7. $\frac{81}{4}, -3^7/2^5; 4(-\frac{3}{2})^{n-1}$
9. $x^8, -x^{14}; (-1)^{n-1}x^{2n-2}$
11. $2^{4x+1}, 2^{7x+1}; 2^{nx-x+1}$ **13.** $\frac{243}{8}$
15. $a_1 = \frac{1}{81}, S_5 = \frac{211}{1296}$
17. $-\frac{3}{2}(1 - 3^{10}) = 88{,}572$
19. $-\frac{1}{3}(1 - 2^{-10})$ **21.** $\frac{25\%}{256}$
23. $10{,}000(\frac{6}{5})^t, 10{,}000(\frac{6}{5})^{10}$ **25.** $\frac{2}{3}$ **27.** $\frac{50}{33}$
29. La suma no existe ($|r| = \sqrt{2} > 1$). **31.** $\frac{23}{99}$
33. $\frac{2393}{990}$ **35.** $\frac{5141}{999}$ **37.** $\frac{16123}{9999}$ **39.** 30 m
41. \$3,000,000 **43.** (b) 375 mg
45. (a) $a_{k+1} = \frac{1}{4}\sqrt{10}a_k$
(b) $a_n = (\frac{1}{4}\sqrt{10})^{n-1}a_1$, $A_n = (\frac{5}{8})^{n-1}A_1$, $P_n = (\frac{1}{4}\sqrt{10})^{n-1}P_1$
(c) $[16/(4 - \sqrt{10})]a_1$

Ejercicios 10.5, pág. 508

1. (a) 60 (b) 125 **3.** 64 **5.** 336 **7.** 24
9. (a) $(2.34)10^6$ (b) $(2.16)10^6$
11. 151,200; 5,760
13. 1024 **15.** 210 **17.** 60,480
19. 120 **21.** 6 **23.** 40,320
25. 120 **27.** (a) 60 (b) 125
29. 9,000,000

Ejercicios 10.6, pág. 513

1. 35 **3.** 9 **5.** n **7.** 1
9. 166,320 **11.** 151,200 **13.** 252
15. 28, 56 **17.** 8!5!4!3! **19.** 4,082,400

Ejercicios 10.7, pág. 518

1. (a) $\frac{1}{13}$ (b) $\frac{2}{13}$ (c) $\frac{3}{13}$ **3.** (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{3}$
5. (a) $\frac{1}{18}$ (b) $\frac{5}{36}$ (c) $\frac{7}{36}$ **7.** $\frac{1}{36}$ **9.** $\frac{3}{8}$
11. $624/{}_{52}C_5 \approx 0.00024$
13. $(13)_{13}C_4/{}_{52}C_5 \approx 0.0036$
15. $(4)_{13}C_5/{}_{52}C_5 \approx 0.002$
17. (a) $\frac{1}{256}$ (b) ${}_8C_7/256 = \frac{1}{32}$
(c) ${}_8C_6/256 = \frac{7}{64}$ (d) $\frac{37}{256}$
19. (a) Considere $P(E \cup E')$ (b) $1 - ({}_{48}C_5/{}_{52}C_5) \approx 0.34$
21. (a) $\frac{2}{9}$ (b) $\frac{1}{9}$ **23.** (a) $\frac{1}{32}$ (b) $\frac{31}{32}$
25. (a) $\frac{1}{24}$ (b) $\frac{1}{4}$ **27.** (a) 0 (b) $\frac{1}{9}$
29. (a) $\frac{1}{16}$ (b) $\frac{3}{8}$

Ejercicios 10.8, pág. 520

7. $5, -2, -1, -\frac{20}{29}, -\frac{7}{19}$ **9.** $2, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{65}{64}$
11. $10, \frac{11}{10}, \frac{21}{11}, \frac{32}{21}, \frac{53}{32}$ **13.** $9, 3, \sqrt{3}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[8]{3}$
15. 75 **17.** 1000 **19.** $\sum_{k=1}^{5} 3k$
21. $\sum_{k=0}^{4}(-1)^k 5(20 - k)$
23. $-5 - 8\sqrt{3}, -5 - 35\sqrt{3}$
25. $-31, 50$ **27.** 64 **29.** $4\sqrt{2}$
31. 570 **33.** 2041 **35.** $\frac{5}{7}$
37. (b) Los otros cuatro trazos tienen longitud $1\frac{1}{4}$ pie, 2 pie, $2\frac{3}{4}$ pie y $3\frac{1}{2}$ pie.
39. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}$ **41.** ${}_{52}P_{13}: ({}_{13}P_5)({}_{13}P_3)({}_{13}P_3)({}_{13}P_2)$
43. 495, 84 **45.** (a) $\frac{1}{1000}$ (b) $\frac{1}{100}$ (c) $\frac{1}{20}$
47. (a) $({}_6C_6 + {}_6C_5 + {}_6C_4)/2^6 - \frac{11}{12}$ (b) $\frac{21}{32}$

CAPÍTULO 11

Ejercicios 11.1, pág. 531

1. $m = 8$ **3.** $m = 1/11$ **5.** $m = -1/4$
9. $x - 3y - 11 = 0$ **11.** $x + 5y + 23 = 0$
13. $4x + y - 7 = 0$ **15.** $7x - 3y + 21 = 0$
17. (a) $y = -3$ (b) $x = 7$
19. $y = -x$ **21.** $13x - 8y + 132 = 0$
23. $8x - 15y - 13 = 0, x + 6y + 1 = 0, 10x - 3y - 11 = 0$
25. $m = 2/5, b = 2$ **27.** $m = -3/5, b = 0$
29. $m = 0, b = -2$
31. $m = -5/6, b = 10/3$
33. $m = 0, b = 0$ **35.** $\frac{x}{(3/2)} + \frac{y}{(-3)} = 1$

Ejercicios 11.2, pág. 536

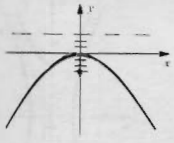
1. (a) 135° (b) 30° (c) $\tan^{-1} 2$ (d) 20°
3. (a) 0 (b) $-\sqrt{3}$ (c) 1 (d) 4/3
7. $5x + 2y - 29 = 0$ **9.** $5x - 3y + 41 = 0$
11. $5x - 7y + 15 = 0$
13. $x + 6y - 9 = 0$; $4x + y - 4 = 0$; $3x - 5y + 5 = 0$; (15/23, 32/23)
15. (a) 10/11 (b) 1/8 **17.** 83°, 23°, 74°
19. $m = (6 \pm 5\sqrt{3})/3$

Ejercicios 11.3, pág. 538

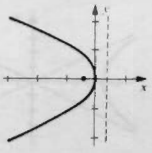
1. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 31 = 0$
5. $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 7 = 0$
7. $(-1, 5)$; 4
9. $(0, 3)$; 2
11. $(5, -4)$; $\sqrt{41}$
13. $(-1, 1)$; 1/2
15. $(1/2, -1/3)$; 1/6
17. $x^2 + y^2 - 3x + 9y - 20 = 0$

Ejercicios 11.5, pág. 546

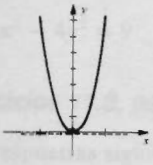
1. $V(0, 0)$; $F(0, -3)$; $y = 3$



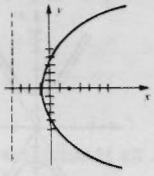
3. $V(0, 0)$; $F(-\frac{3}{8}, 0)$; $x = \frac{3}{8}$



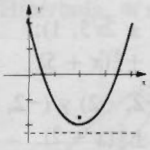
5. $V(0, 0)$; $F(0, \frac{1}{32})$; $y = -\frac{1}{32}$



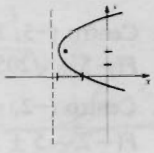
7. $V(-1, 0)$; $F(2, 0)$; $x = -4$



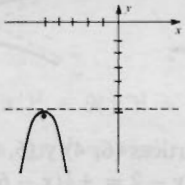
9. $V(2, -2)$; $F(2, -\frac{7}{4})$; $y = -\frac{9}{4}$



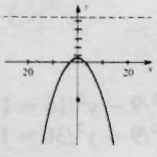
11 $V(-4, 2)$; $F(-\frac{7}{2}, 2)$; $x = -\frac{9}{2}$



13 $V(-5, -6)$; $F(-5, -\frac{97}{16})$; $y = -\frac{95}{16}$



15. $V(0, \frac{1}{2})$; $F(0, -\frac{9}{2})$; $y = \frac{11}{2}$



17 $y^2 = 8x$

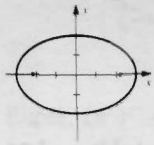
19 $(x - 6)^2 = 12(y - 1)$

21 $3x^2 = -4y$

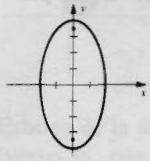
23. $\frac{9}{16}$ pie desde el vértice.

Ejercicios 11.6, pág. 551

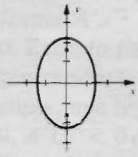
1. $V(\pm 3, 0)$; $F(\pm\sqrt{5}, 0)$



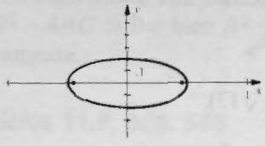
3. $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 2\sqrt{3})$



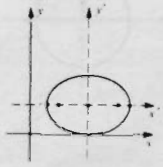
5. $V(0, \pm\sqrt{5})$; $F(0, \pm\sqrt{3})$



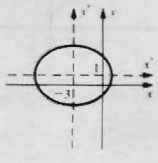
7. $V(\pm\frac{1}{2}, 0)$; $F(\pm\sqrt{21}/10, 0)$



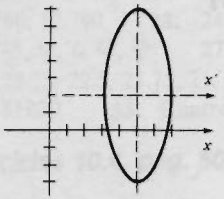
9. Centro (4, 2), vértices (1, 2) y (7, 2), $F(4 \pm \sqrt{5}, 2)$; extremos del eje menor (4, 4) y (4, 0).



11. Centro (−3, 1), vértices (−7, 1) y (1, 1). $F(-3 \pm \sqrt{7}, 1)$; extremos del eje menor (−3, 4) y (−3, −2).



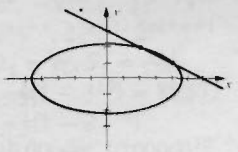
13. Centro (5, 2), vértices (5, 7) y (5, −3), $F(5, 2 \pm \sqrt{21})$; extremos del eje menor (3,2) y (7, 2).



15. $x^2/64 + y^2/39 = 1$ **17.** $4x^2/9 + y^2/25 = 1$

19. $8x^2/81 + y^2/36 = 1$

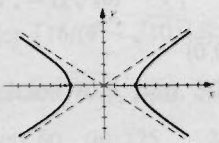
21. $\{(2, 2), (4, 1)\}$ **23.** $2\sqrt{21}$ pie



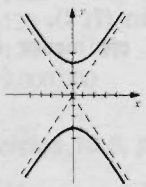
27. $A = 4a^2b^2/(a^2 + b^2)$

Ejercicios 11.7, pág. 558

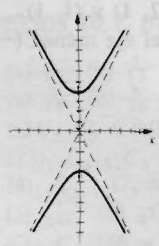
1. $V(\pm 3, 0)$; $F(\pm\sqrt{13}, 0)$; $y = \pm\frac{2}{3}x$



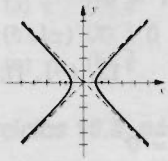
3. $V(0, \pm 3)$; $F(0, \pm\sqrt{13})$; $y = \pm\frac{3}{2}x$



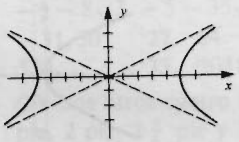
5. $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 2\sqrt{5})$; $y = \pm 2x$



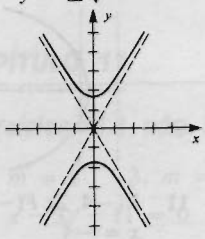
7. $V(\pm 1, 0)$; $F(\pm\sqrt{2}, 0)$; $y = \pm x$



9. $V(\pm 5, 0)$; $F(\pm\sqrt{30}, 0)$; $y = \pm(\sqrt{5}/5)x$



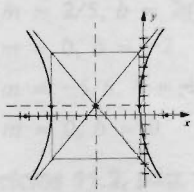
11. $V(0, \pm\sqrt{3})$; $F(0, \pm 2)$; $y = \pm\sqrt{3}x$



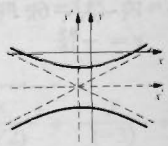
13. Centro (−5, 1); vértices $(-5 \pm 2\sqrt{5}, 1)$; $F(-5 \pm \sqrt{205}/2, 1)$; $y - 1 = \pm\frac{5}{4}(x + 5)$

15. Centro (−2, −5); vértices (−2, −2) y (−2, −8); $F(-2, -5 \pm 3\sqrt{5})$; $y + 5 = \pm\frac{1}{2}(x + 2)$

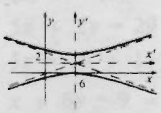
13.



15.



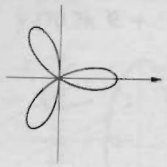
17. Centro (6, 2); vértices (6, 4) y (6, 0); $F(6, 2 \pm 2\sqrt{10})$ $y - 2 = \pm\frac{1}{3}(x - 6)$



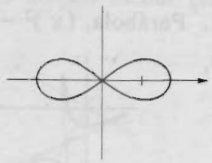
19. $15y^2 - x^2 = 15$ **21.** $x^2/9 - y^2/16 = 1$

23. $y^2/21 - x^2/4 = 1$ **25.** $x^2/9 - y^2/36 = 1$

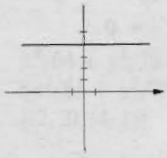
9.



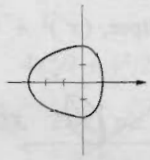
11.



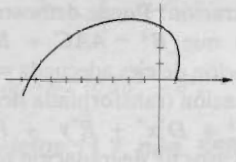
13.



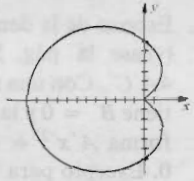
15.



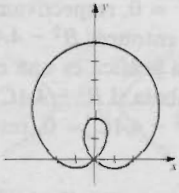
17.



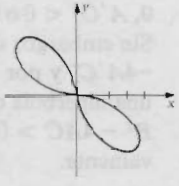
19.



21.



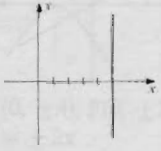
23.



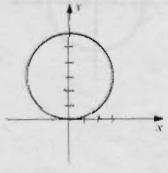
25. $r = -3 \sec\theta$ **27.** $r = 4$ **29.** $r = 6 \csc\theta$

31. $r^2 = 16 \sec 2\theta$

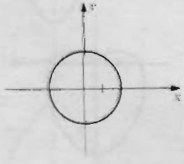
33. $x = 5$



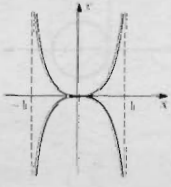
35. $x^2 + y^2 - 6y = 0$



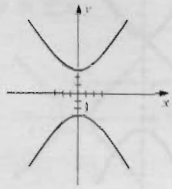
37. $x^2 + y^2 = 4$



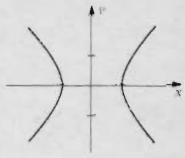
39. $y^2 = x^4/(1 - x^2)$



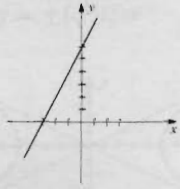
41. $y^2/9 - x^2/4 = 1$



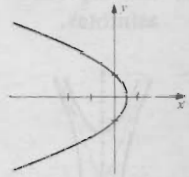
43. $x^2 - y^2 = 1$



45. $y - 2x = 6$



47. $y^2 = 1 - 2x$



Ejercicios 11.10, pág. 573

1. Elipse, vértices $(\frac{3}{2}, \pi/2)$ y $(3, 3\pi/2)$; focos $(0, 0)$ y $(\frac{3}{2}, 3\pi/2)$.

3. Hipérbola; vértices $(-3, 0)$ y $(\frac{3}{2}, \pi)$, focos $(0, 0)$ y $(-\frac{9}{2}, 0)$.

5. Parábola; $V(\frac{3}{4}, 0)$, $F(0, 0)$.

7. Elipse, vértices $(-4, 0)$ y $(-\frac{4}{3}, \pi)$, focos $(0, 0)$ y $(-\frac{8}{3}, 0)$.

9. Hipérbola (excepto para los puntos $(\pm 3, 0)$); vértices $(\frac{36}{5}, \pi/2)$ y $(-6, 3\pi/2)$, focos $(0, 0)$ y $(-\frac{6}{5}, 3\pi/2)$.

11. $9x^2 + 8y^2 + 12y - 36 = 0$

13. $y^2 - 8x^2 - 36x - 36 = 0$

15. $4y^2 = 9 - 12x$ **17.** $3x^2 + 4y^2 + 8x - 16 = 0$

19. $4x^2 - 5y^2 + 36y - 36 = 0$

21. $r = 2/(1 + \cos\theta)$; $e = 1$; $r = 2 \sec\theta$

23. $r = 4/(1 + 2 \operatorname{sen}\theta)$; $e = 2$; $r = 2 \csc\theta$

25. $r = 2/(3 + \cos\theta)$; $e = \frac{1}{3}$; $r = 2 \sec\theta$

27. $r = 2/(3 + \cos\theta)$ **29.** $r = 12/(1 - 4 \operatorname{sen}\theta)$

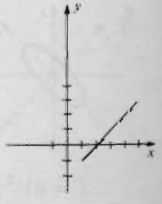
31. $r = 5/(1 + \cos\theta)$ **33.** $r = 8/(1 + \operatorname{sen}\theta)$

Ejercicios 11.11, pág. 579

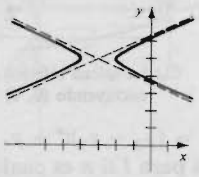
1. $y = 2x + 7$



3. $y = x - 2$



9. Hipérbola; vértices $(-5, 5)$ y $(-3, 5)$; focos $(-4 \pm \sqrt{10}/3, 5)$.



11. $9y^2 - 49x^2 = 441$ **13.** $x^2 = -40y$

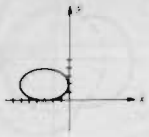
15. $4x^2 + 3y^2 = 300$ **17.** $y^2 - 81x^2 = 36$

19. Elipse; centro $(-3, 2)$, vértices $(-6, 2)$ y $(0, 2)$, extremos del eje menor $(-3, 0)$ y $(-3, 4)$.

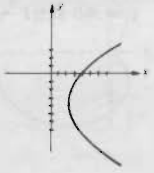
21. Parábola; $V(2, -4)$, $F(4, -4)$.

23. Hipérbola; centro $(2, -3)$, vértices $(2, -1)$ y $(2, -5)$, extremos del eje conjugado $(2 \pm \sqrt{2}, -3)$.

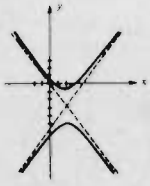
19.



21.



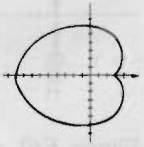
23.



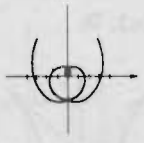
25.



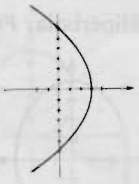
27.



29.



31.

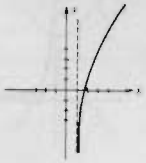


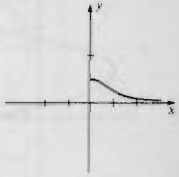
33. $r \operatorname{sen}^2 \theta = 4 \cos \theta$

35. $r(2 \cos \theta - 3 \operatorname{sen} \theta) = 8$

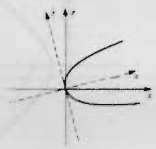
37. $x^3 + xy^2 = y$ **39.** $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$

41. $y = 2(x - 1) - 1/(x - 1)$ **43.** $y = 2^{-x^2}$





45. Parábola: $(y')^2 - 3x' = 0$ es su ecuación después de una rotación de ejes.



47. $\dfrac{x^2}{10000} + \dfrac{y^2}{1200} = 1$; $20\sqrt{3} \approx 34.64$ pie

Ejercicios A.1, pág. 594

1. 2.5403, 7.5403 − 10, 0.5403

3. 9.7324 − 10, 2.7324, 5.7324

5. 1.7796, 5.7796 − 10, 2.7796

7. 3.3044, 0.8261, 6.6956 − 10

9. 9.9235 − 10, 0.0765, 9.9915 − 10 **11.** 4.0428

13. 2.0878 **15.** 8.1462 **17.** 4240

19. 8.85 **21.** 162,000 **23.** 0.543

25. 0.0677 **27.** 189 **29.** 0.0237

31. 1.4062 **33.** 3.7294 **35.** 7.1000 − 10

37. 5.0913 **39.** 9.8913 − 10

41. 2.5851 **43.** 9.9760 − 10 **45.** 4.8234

47. 8.6356 − 10 **49.** 0.4776 **51.** 27.78

53. 49,330 **55.** 0.1467

57. 0.006536 **59.** 234.7 **61.** 1.367

63. 0.09445 **65.** 109,900

67. 0.001345 **69.** 0.2442

71. 0.4440 **73.** −0.1426 **75.** 1.032

77. 0.7911 **79.** 0.5217 **81.** 3.436

83. 0.5315 **85.** 1.3521 **87.** 0.7703

89. 21°33′, 158°27′ **91.** 26°45′, 206°45′

93. 69°44′, 290°16′ **95.** 43°46′, 316°14′